SÉMINAIRE DUBREIL.
ALGÈBRE ET THÉORIE
DES NOMBRES

L. LESIEUR

Théorie algébrique de l'orientation

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 10 (1956-1957), exp. nº 12,
p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1956-1957__10__A12_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)

Année 1956/57
-:-:-:-

Exposé n° 12

THÉORIE ALGÉBRIQUE DE L'ORIENTATION

(Exposé de L. LESIEUR, le 18.2.1957)

1.- Les axiomes de Hilbert.

Rappelons les axiomes de Hilbert[1] pour l'orientation d'une droite, axiomes auxquels on peut donner par exemple la forme suivante[2] , dans laquelle E désigne l'ensemble des points de la droite :

(H_1) Tout point A partage l'ensemble $E-\{A\}$ en deux classes disjointes.

Si B et C sont dans deux classes différentes, on dit que A est situé entre B et C (figure).

(H_2) A , B , C étant trois points distincts, il existe un et un seul des points A , B , C qui est situé entre les deux autres.

L'axiome (H_1) signifie que A détermine dans l'ensemble $E-\{A\}$ une équivalence R_A n'ayant que deux classes et la relation " A est situé entre B et C " exprime que B et C n'appartiennent pas à la même classe modulo R_A ; c'est une relation ternaire. Convenons de la noter :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = -1$$

La relation " A n'est pas situé entre B et C " , c'est-à-dire B et C appartiennent à la même classe modulo R_A , se notera de même

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = +1$$

L'axiome (H_1) peut alors être divisé en deux parties :

(H_1') R_A est une relation d'équivalence

ce qui se note algébriquement :

(1) Voir D. HILBERT, Grundlage der Geometrie, 3e éd. 1909, p. 4.

(2) Voir une forme voisine donnée par R. NEUMEISTER, Bull. de l'Assoc. des Prof. de Math. Mai 1956, p. 400 et Déc. 1956, p. 113.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB}} = 1 \quad ; \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = 1 \Longrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = 1$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = 1 \Longrightarrow \frac{\overline{AB}}{AD} = 1$$

(H_1'') Cette relation d'équivalence R_A n'a que deux classes, c'est-à-dire :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = -1 \qquad \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = -1 \Longrightarrow \frac{\overline{AB}}{AD} = 1$$

L'axiome (H_1) se résume alors par les formules :

(H_1) $$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB}} = 1 \qquad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\;\frac{\overline{AC}}{AD} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$$

Quant à l'axiome (H_2), il se traduit par la propriété :

(H_2) A , B , C étant trois points distincts, parmi les expressions

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \ , \ \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \ , \ \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}$$

il y en a une égale à -1 et les deux autres égales à $+1$.

THÉORÈME 1.1.- L'axiome (H_1'') est une conséquence de (H_1') et (H_2) .

Supposons en effet

$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = -1$, $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = -1$. Cela impose $B \neq C$ et $C \neq D$ d'après (H_1) . On en déduit alors d'après (H_2) : $\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = +1$ et $\frac{\overline{DA}}{\overline{DC}} = +1$.

Si l'on avait $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = -1$, on en déduirait d'après (H_2) :

$\frac{\overline{BD}}{\overline{BA}} = +1$ et $\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = +1$, par suite on aurait d'après (H_1) :

$\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = +1$ et $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = +1$. D'où, d'après (H_2) : $\frac{\overline{CB}}{\overline{CD}} = -1$,

et, d'après (H_1) , cela exclut $\frac{\overline{CA}}{CB} = +1$ et $\frac{\overline{CD}}{\overline{CB}} = +1$ ce qui est contraire à (H_2) .

2.- Définition et axiomes d'une orientation.

En appelant vecteur tout couple ordonné AB de points distincts, on sait que les axiomes de Hilbert permettent de comparer les sens des vecteurs de la droite et nous allons retrouver cette propriété comme cas particulier de notre théorie. Plus précisément, si AB et $A'B'$ ont le même sens, ce que nous écrivons $AB \sim A'B'$, cette relation a les propriétés suivantes :

$$AB \sim AB$$

$$AB \sim A'B' \Longrightarrow A'B' \sim AB$$

$$AB \not\sim A'B' \quad \text{et} \quad AB \not\sim A''B'' \Longrightarrow A'B' \sim A''B''$$

$$AB \sim A'B' \quad \text{et} \quad A'B' \sim A''B'' \Longrightarrow AB \sim A''B''$$

$$AB \not\sim BA$$

Autrement dit, une orientation de la droite est une relation d'équivalence R dans l'ensemble des vecteurs, cette relation R n'ayant que deux classes, les vecteurs AB et BA étant dans chacune des classes. Ceci nous conduit aux définitions suivantes :

<u>DÉFINITION 1</u>.- E étant un ensemble quelconque, on appelle <u>vecteur</u> AB de E un couple ordonné AB de points de E distincts. A est <u>l'origine</u> et B est <u>l'extrémité</u> du vecteur.

<u>DÉFINITION 2</u>.- On appelle <u>orientation</u> de l'ensemble E une relation d'équivalence R dans l'ensemble des vecteurs cette relation n'ayant que deux classes, les vecteurs AB et BA étant dans chacune des classes.

Si l'on convient de noter la relation $AB \sim A'B'$ par $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = +1$ et la relation $AB \not\sim A'B'$ par $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = -1$, il est clair qu'une orientation sera définie par les propriétés suivantes :

(1) $$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB}} = +1$$

(2) $$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \; \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = +1$$

(3) $$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = -\frac{\overline{BA}}{\overline{A'B'}} = -\frac{\overline{AB}}{\overline{B'A'}}$$

(4) $$\frac{\overline{AB}}{A'B'} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A''B''}} \; \frac{\overline{A''B''}}{A'B'}$$

En particulier, on doit avoir les axiomes suivants qui ne font intervenir que des rapports de vecteurs de même origine :

(O_1) $$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB}} = 1$$

(O_2) $$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\ \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$$ (O'_2) $$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = 1 .$$

(O_3) $$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}\ \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = -1 .$$

((O'_2) est une conséquence de (O_1) et (O_2))

Par exemple l'axiome de Hilbert (H_1) est identique aux axiomes (O_1) et (O_2), tandis que l'axiome (H_2) entraîne évidemment l'axiome (O_3).

3.- Comparaison des vecteurs.

Soit E un ensemble quelconque. On considère les vecteurs de E, c'est-à-dire les couples ordonnés AB ($A \in E$, $B \in E$, $A \neq B$).

Soit G le groupe multiplicatif $G = K - \{0\}$ d'un corps K. Le cas de l'orientation est celui où G se réduit à $+1$ et à -1. On suppose que l'on sait comparer deux vecteurs de même origine, c'est-à-dire qu'il existe une application $(AB, AC) \longrightarrow x$, où $x \in G$, que l'on note $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = x$ et qui jouit des propriétés suivantes :

DÉFINITION. - Soient deux vecteurs $\overline{AB}$ et $\overline{A'B'}$

1°) Si $A \neq B'$, on définit

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}}\ \frac{\overline{B'A}}{\overline{A'B'}}$$

2°) Si $A \neq A'$, on définit :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = -\frac{\overline{AB}}{\overline{AA'}}\ \frac{\overline{A'A}}{\overline{A'B'}}$$

JUSTIFICATION. -

1°) Si $A \neq B'$ et $A \neq A'$ les deux définitions coïncident.

En effet posons

$$x = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} \quad \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'A'}} \quad , \quad y = - \frac{\overline{AB}}{\overline{AA'}} \quad \frac{\overline{A'A}}{\overline{A'B'}}$$

D'après (0_2) on a : $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AA'}} \; \dfrac{\overline{AA'}}{\overline{AB'}}$ d'où

$x = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AA'}} \; \dfrac{\overline{AA'}}{\overline{AB'}} \; \dfrac{\overline{B'A}}{\overline{B'A'}}$. D'après (0_3) on a : $\dfrac{\overline{AA'}}{\overline{AB'}} \; \dfrac{\overline{B'A}}{\overline{B'A'}} = - \dfrac{\overline{A'A}}{\overline{A'B'}}$

d'où $x = y$

2°) Si $A = A'$ on a $A \neq B'$ et la définition de $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ est la définition 1°) , c'est-à-dire $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} \; \dfrac{\overline{B'A}}{\overline{B'A'}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AB'}}$.

Elle coïncide avec la définition connue pour deux vecteurs de même origine.

THÉORÈME 3.1.- $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AB}} = 1$

THÉORÈME 3.2.- $\boxed{\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \; \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = 1}$

α) Supposons A , A' distincts. Le théorème revient d'après la définition 2°) à :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AA'}} \quad \frac{\overline{A'A}}{\overline{A'B'}} \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'A}} \quad \frac{\overline{AA'}}{\overline{AB}} = 1$$

ce qui est une conséquence immédiate de (0_1) et (0_2) appliqués aux origines A et A' .

β) Supposons $A = A'$. Le théorème est une conséquence de $(0_2')$ appliqué à l'origine commune A .

THÉORÈME 3.3.- $\boxed{\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = - \dfrac{\overline{BA}}{\overline{A'B'}} = - \dfrac{\overline{AB}}{\overline{B'A'}}}$

α) Démontrons d'abord la relation

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = - \frac{\overline{AB}}{\overline{B'A'}}$$

On a par exemple :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} \quad \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'A'}}$$

et $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{B'A'}} = - \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} \quad \dfrac{\overline{B'A}}{\overline{B'A'}} = - \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$

β) La relation $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = - \dfrac{\overline{BA}}{\overline{A'B'}}$ résulte du cas α par application du théorème 3.2.

<u>THÉORÈME 3.4.</u>-

$$\boxed{\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A''B''}} \quad \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}}}$$

α) Supposons $A \neq A''$. On a donc :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A''B''}} = - \frac{\overline{AB}}{\overline{AA''}} \quad \frac{\overline{A''A}}{\overline{A''B''}}$$

Prenons une définition quelconque de $\dfrac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}}$:

$$\frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A''B'}} \quad \frac{\overline{B'A''}}{\overline{B'A'}}$$

On en déduit d'après (O_2) et le théorème 3.3.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A''B''}} \quad \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} = - \frac{\overline{AB}}{\overline{AA''}} \quad \frac{\overline{A''A}}{\overline{A''B'}} \quad \frac{\overline{B'A''}}{\overline{B'A'}} = - \frac{\overline{AB}}{\overline{AA''}} \quad \frac{\overline{A''A}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AA''}} \quad \frac{\overline{AA''}}{\overline{A'B'}}$$

Prenons une définition quelconque de $\dfrac{\overline{AA''}}{\overline{A'B'}}$:

$$\frac{\overline{AA''}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AA''}}{\overline{AB'}} \quad \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'A'}}$$

Il vient donc :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A''B''}} \quad \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} \quad \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'A'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$$

Le théorème est démontré.

β) Supposons $A = A''$. On a donc $A \neq B''$. Si on échange A'' et B'' le second membre ne change pas dans l'énoncé du théorème 3.4 en vertu du théorème 3.3. On se ramène donc au cas α .

4.- Espace de dimension n .

Soit E un espace muni d'une relation de dépendance linéaire qu'on peut définir par exemple au moyen des axiomes suivants, ou axiomes de Steinitz-van der Waerden[3] :

1) $M_i (i = 1 , 2 , \dots , n)$ dépend de $\{M_1 M_2 \dots M_n\}$
2) Si M dépend de $\{M_1 M_2 \dots M_n\}$ et si chaque $M_i (i = 1 , 2,\dots,n)$ dépend de $\{P_1 P_2 \dots P_m\}$, M dépend de $\{P_1 \dots P_m\}$.
3) Si Q dépend de $\{M_1 M_2 \dots M_n P\}$ sans dépendre de $\{M_1 M_2 \dots M_n\}$ P dépend de $\{M_1 M_2 \dots M_n Q\}$.

Nous supposons en outre que la dépendance linéaire est géométrique, c'est-à-dire vérifie l'axiome supplémentaire :

4) P dépend de $Q \Longleftrightarrow P = Q$.

Enfin nous supposons que E est de dimension $n-1$, c'est-à-dire que le nombre maximum de points indépendants est n . Il est aisé de voir que l'ensemble de ces axiomes équivaut à la propriété pour E d'être l'ensemble des points d'un treillis géométrique de dimension $n-1$[4] . Nous dirons simplement que E est un espace de dimension n .

Désignons par $\mathcal{J}(A_1 A_2 \dots A_n)$ (ou $\mathcal{D}(A_1 A_2 \dots A_n)$) la propriété pour les points A_i $(i = 1 , 2 , \dots , n)$ d'être indépendants (ou dépendants).

On peut alors établir les théorèmes suivants[5] :

---

(3) VAN DER WAERDEN, Moderne Algèbra, t. 1, p. 105.

(4) M.L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR et R. CROISOT, Leçons sur les Treillis, Paris, 1953, p. 124 et 151.

(5) Voir par exemple pour la démonstration :
R. PIEDVACHE, Dépendance linéaire (Conférences du Séminaire de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Poitiers, 1956/57.)

THÉORÈME 4.1.- Soit $\mathcal{J}(A_1\ A_2\ \dots\ A_n)$ et soit M un point quelconque. Il existe au moins un point A_i tel qu'en le remplaçant par M on obtienne $\mathcal{J}(A_1\ A_2\ \dots\ A_{i-1}\ M\ A_{i+1}\ \dots\ A_n)$.

THÉORÈME 4.2.- Soit $\mathcal{J}(A_1\ A_2\ \dots\ A_p\ A_{p+1}\ \dots\ A_n)$. Si les points obtenus en remplaçant l'un des A_j par M sont dépendants quel que soit $j = p+1\ \dots\ n$ on a $\mathcal{D}(A_1\ A_2\ \dots\ A_p\ M)$.

THÉORÈME 4.3.- Soit $\mathcal{J}(A_1\ A_2\ \dots\ A_n)$. Si les points obtenus en remplaçant l'un des A_j par M sont dépendants quel que soit $j = 2\ ,\ \dots\ ,\ n$, on a $M = A_1$.

5.- Problème de l'orientation et de la mesure d'un simplexe.

Soit E un espace (ou treillis géométrique) de dimension $n-1$ défini au paragraphe 4. On appelle simplexe l'ensemble ordonné de n points indépendants $(A_1\ A_2\ \dots\ A_n)$.

Soit G le groupe multiplicatif $\dot{K} = K - \{0\}$ d'un corps K . Etant donnés deux simplexes $(A_1\ A_2\ \dots\ A_{n-1}\ A_n)$ et $(A_1\ A_2\ \dots\ A_{n-1}\ A'_n)$ ayant leurs $n-1$ premiers sommets communs, on suppose qu'il existe une application

$$\frac{(A_1\ A_2\ \dots\ A_{n-1}\ A_n)}{(A_1\ A_2\ \dots\ A_{n-1}\ A'_n)} = x \in G$$

vérifiant les axiomes suivants, dans lesquels Ω_{n-1} désigne un ensemble ordonné de $n-1$ points $(A_1\ A_2\ \dots\ A_{n-1})$ et Ω_{n-2} un ensemble ordonné de $n-2$ points $(A_1\ A_2\ \dots\ A_{n-2})$:

$$(O_1)\qquad \frac{(\Omega_{n-1}\ A_n)}{(\Omega_{n-1}\ A_n)} = 1$$

$$(O_2)\qquad \frac{(\Omega_{n-1}\ A_n)}{(\Omega_{n-1}\ A'_n)} = \frac{(\Omega_{n-1}\ A_n)}{(\Omega_{n-1}\ A''_n)}\ \frac{(\Omega_{n-1}\ A''_n)}{(\Omega_{n-1}\ A'_n)}$$

$$(O'_2)\qquad \frac{(\Omega_{n-1}\ A_n)}{(\Omega_{n-1}\ A'_n)}\ \frac{(\Omega_{n-1}\ A'_n)}{(\Omega_{n-1}\ A_n)} = 1\ .\quad \text{(Conséquence de } (O_1) \text{ et } (O_2))$$

$$(O_3)\qquad \frac{(\Omega_{n-2}\ A\ C)}{(\Omega_{n-2}\ A\ B)}\ \frac{(\Omega_{n-2}\ B\ A)}{(\Omega_{n-2}\ B\ C)}\ \frac{(\Omega_{n-2}\ C\ B)}{(\Omega_{n-2}\ C\ A)} = -1\ .$$

(O_4) $\dfrac{(\Omega_{n-1}\, A)}{(\Omega_{n-1}\, A')}$ reste invariant par toute permutation sur les lettres de Ω_{n-1}.

Lorsque G se réduit à $+1$ et -1 la théorie qui suit est celle de l'orientation des simplexes ; lorsque $G = K^* = K - \{0\}$ cette théorie est celle de la mesure d'un simplexe dans K. Elle consiste à étendre l'application précédente au rapport de deux simplexes quelconques

$\dfrac{(A_1\, A_2 \ldots A_n)}{(A'_1\, A'_2 \ldots A'_n)}$, cette extension devant satisfaire aux conditions suivantes :

$$\frac{(A_1\, A_2 \ldots A_n)}{(A_1\, A_2 \ldots A_n)} = 1$$

$$\frac{(A_1\, A_2 \ldots A_n)}{(A'_1\, A'_2 \ldots A'_n)} \; \frac{(A'_1\, A'_2 \ldots A'_n)}{(A_1\, A_2 \ldots A_n)} = 1$$

La fonction $\dfrac{(A_1\, A_2 \ldots A_n)}{(A'_1\, A'_2 \ldots A'_n)}$ est une fonction alternée des A_i ainsi que des A'_i.

$$\frac{(A_1\, A_2 \ldots A_n)}{(A'_1\, A'_2 \ldots A'_n)} = \frac{(A_1\, A_2 \ldots A_n)}{(A''_1\, A''_2 \ldots A''_n)} \; \frac{(A''_1\, A''_2 \ldots A''_n)}{(A'_1\, A'_2 \ldots A'_n)}$$

6.- Définition du rapport de deux simplexes et énoncés[6] des théorèmes.

La définition du rapport de deux simplexes $\dfrac{(\Omega_{n-1}\, A)}{(\Omega_{n-1}\, A')}$

étant connue lorsque les deux simplexes ne diffèrent que par leur dernier sommet, nous allons l'étendre au cas où ils ne diffèrent que par les deux derniers sommets. Plus généralement, supposons étendue la définition au cas où les deux simplexes ne diffèrent que par les $p-1$ derniers sommets, et supposons vérifiées les hypothèses suivantes relatives à ce cas, où $\Omega = (O_1\, O_2 \ldots O_{k+1})$ désigne une suite de $k+1$ points $(k = n - p)$.

---

(6) Les démonstrations seront publiées dans un mémoire à paraître ultérieurement dans le Journal de Mathématiques pures et appliquées de Mr VILLAT. Le cas du plan $(n = 3)$ est exposé en détail dans une Conférence du Séminaire de la Faculté des Sciences de Poitiers.

Hypothèses d'induction :

(1) $$\frac{(\Omega A_1 \dots A_{p-1})}{(\Omega A_1 \dots A_{p-1})} = 1$$

(2) $$\frac{(\Omega A_1 \dots A_{p-1})}{(\Omega A'_1 \dots A'_{p-1})}$$ reste invariant par toute permutation sur les points de Ω .

(3) $$\frac{(\Omega A_1 \dots A_{p-1})}{(\Omega A'_1 \dots A'_{p-1})} \; \frac{(\Omega A'_1 \dots A'_{p-1})}{(\Omega A_1 \dots A_{p-1})} = 1$$

(4) $$\frac{(\Omega A_1 \dots A_{p-1})}{(\Omega A'_1 \dots A'_{p-1})}$$ est une fonction alternée des A_i , ainsi que des A'_i

(5) $$\frac{(\Omega A_1 \dots A_{p-1})}{(\Omega A'_1 \dots A'_{p-1})} = \frac{(\Omega A_1 \dots A_{p-1})}{(\Omega A''_1 \dots A''_{p-1})} \; \frac{(\Omega A''_1 \dots A''_{p-1})}{(\Omega A'_1 \dots A'_{p-1})}$$

Nous allons étendre la théorie en raisonnant par récurrence sur p .

Soit $\omega = (O_1 \, O_2 \dots O_k)$ un groupement de $k = n-p$ points figurant dans les simplexes considérés maintenant :

$$(\omega \, A_1 \, A_2 \dots A_p) \qquad \text{et} \qquad (\omega \, A'_1 \, A'_2 \dots A'_p) \; .$$

Si on remplace successivement $A'_1 \dots A'_p$ par A_1 on obtient au moins un simplexe véritable ; sinon les points (ωA_1) seraient dépendants d'après le théorème 4.2 , et ceci est impossible puisque $(\omega \, A_1 \dots A_p)$ est un simplexe. Soit donc r tel que :

$$(\omega A'_1 \dots A'_{r-1} \, A_1 \, A'_{r+1} \dots A'_n)$$

est un simplexe. On pose alors :

DÉFINITION.-

$$x = \frac{(\omega A_1 \dots A_p)}{(\omega A'_1 \dots A'_p)} = (-1)^{r-1} \; \frac{(\omega A_1 \, A_2 \dots\dots\dots\dots\dots A_p)}{(\omega A_1 \, A'_1 \dots A'_{r-1} \, A'_{r+1} \dots A'_p)}$$

$$\frac{(\omega A'_1 \dots A'_{r-1} \, A'_{r+1} \dots A'_p \, A_1)}{(\omega A'_1 \dots A'_{r-1} \, A'_{r+1} \dots A'_p \, A'_r)}$$

<u>JUSTIFICATION</u>.- 1°) Supposons qu'il existe une deuxième position possible pour A_1 , soit A'_s . On obtient donc :

$$y = (-1)^{s-1} \quad \frac{(\omega A_1 A_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_p)}{(\omega A_1 A'_1 \ldots A'_{s-1} A'_{s+1} \ldots A'_p)}$$

$$\frac{(\omega A'_1 \ldots A'_{s-1} A'_{s+1} \ldots A'_p A_1)}{(\omega A'_1 \ldots A'_{s-1} A'_{s+1} \ldots A'_p A'_s)}$$

D'après (5) on a :

$$x = (-1)^{r-1} \quad \frac{(\omega A_1 A_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_p)}{(\omega A_1 A'_1 \ldots A_{s-1} A'_{s+1} \ldots A_p)}$$

$$\frac{(\omega A_1 A'_1 \ldots A'_{s-1} A'_{s+1} \ldots A_p)}{(\omega A_1 A'_1 \ldots A'_{r-1} A'_{r+1} \ldots A'_p)} \qquad \frac{(\omega A'_1 \ldots A'_{r-1} A'_{r+1} \ldots A'_p A_1)}{(\omega A'_1 \ldots A'_{r-1} A'_{r+1} \ldots A'_p A'_r)}$$

Mais, si l'on considère le groupement commun

$H = (\omega A'_1 \ldots A'_{r-1} A'_{r+1} \ldots A'_{s-1} A'_{s+1} \ldots A'_p)$ et les points $A_1 A'_r A'_s$,

on a d'après l'axiome fondamental (O_3) :

$$\frac{(H A_1 A'_r)}{(H A_1 A'_s)} \quad \frac{(H A'_s A_1)}{(H A'_s A'_r)} = - \frac{(H A'_r A_1)}{(H A'_r A'_s)}$$

et, en vertu de (O_4) et de (4) :

$$\frac{(\omega A_1 A'_1 \ldots A'_{s-1} A'_{s+1} \ldots A_p)}{(\omega A_1 A'_1 \ldots A'_{r-1} A'_{r+1} \ldots A'_p)} = (-1)^{r+s-1} \quad \frac{(H A_1 A'_r)}{(H A_1 A'_s)}$$

En appliquant (O_4) on obtient $x = y$.

2°) Dans le cas $A'_1 = A_1$, la définition précédente redonne la définition déjà connue de

$$\frac{(\omega A_1 A_2 \ldots A_p)}{(\omega A_1 A'_2 \ldots A'_p)} .$$

On démontre alors les théorèmes suivants :

THÉORÈME 6.1.- $$\frac{(\omega A_1 A_2 \ldots A_p)}{(\omega A_1 A_2 \ldots A_p)} = 1$$

THÉORÈME 6.2.- $$\frac{(\omega A_1 \ldots A_p)}{(\omega A'_1 \ldots A'_p)}$$ reste invariant par toute permutation sur les points de ω.

THÉORÈME 6.3.- $$\frac{(\omega A_1 \ldots A_p)}{(\omega A'_1 \ldots A'_p)} \frac{(\omega A'_1 \ldots A'_p)}{(\omega A_1 \ldots A_p)} = 1$$

THÉORÈME 6.4.- La fonction $$\frac{(\omega A_1 A_2 \ldots A_p)}{(\omega A'_1 A'_2 \ldots A'_p)}$$ est une fonction alternée des A_i. Elle est également une fonction alternée des A'_i.

THÉORÈME 6.5.- $$\frac{(\omega A_1 \ldots A_p)}{(\omega A'_1 \ldots A'_p)} = \frac{(\omega A_1 \ldots A_p)}{(\omega A''_1 \ldots A''_p)} \frac{(\omega A''_1 \ldots A''_p)}{(\omega A'_1 \ldots A'_p)}$$

Les hypothèses d'induction (5) sont donc étendues de $p-1$ à p. On démontre donc par récurrence sur p que la définition du rapport de deux simplexes quelconques satisfait aux conditions exigées à la fin du paragraphe 5.