Karl Egil Aubert

Caractérisations des anneaux de valuation à l'aide de la théorie des r-idéaux

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 10 (1956-1957), exp. n° 10, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1956-1957__10__A10_0>

CARACTÉRISATIONS DES ANNEAUX DE VALUATION A L'AIDE DE LA THÉORIE DES r-IDEAUX.

(Exposé de Karl Egil AUBERT, le 4.2.1957)

Nous allons ici exposer quelques résultats relatifs à la caractérisation de divers types d'anneaux de valuation à l'aide de la théorie des r-idéaux de Prüfer-Krull-Lorenzen. Pour un exposé plus détaillé nous renvoyons le lecteur à [1].

1. Groupes ordonnés et r-systèmes.

Le groupe abélien G noté multiplicativement est dit préordonné si on a défini sur G une structure de préordre invariante par les translations, c'est-à-dire une relation $a \leqslant b$ vérifiant

$$(1) \quad a \leqslant a$$

$$(2) \quad a \leqslant b \text{ et } b \leqslant c \longrightarrow a \leqslant c$$

$$(3) \quad a \leqslant b \longrightarrow ax \leqslant bx \qquad \text{pour tout } x \in G .$$

Si en plus

$$(4) \quad a \leqslant b \text{ et } b \leqslant a \longrightarrow a = b ,$$

G est dit groupe ordonné. Désignant par e l'élément unité de G nous supposons toujours $G \neq \{e\}$. L'élément a de G est dit entier, si $a \geqslant e$. Un sous-ensemble A de G est dit borné inférieurement s'il existe un élément $b \in G$ tel que $b \leqslant a$ pour tout $a \in A$. G est appelé filtrant, si tout sous-ensemble fini de G est borné inférieurement. Si G est totalement ordonné, et la topologie induite par l'ordre est la topologie discrète, nous dirons que G est discret. G est discret, si et seulement si chaque élément de G possède un successeur et un prédécesseur immédiats.

On dit qu'on a défini sur le groupe préordonné filtrant G un r-système si on a défini une application $A \longrightarrow A_r$ de l'ensemble des parties de G bornées inférieurement dans l'ensemble des parties de G telle que les axiomes suivants soient vérifiés :

I $\quad A \subseteq A_r$

II $\quad A \subseteq B_r \rightarrow A_r \subseteq B_r$

III $\quad \{a\}_r = Sa$, $\quad (S = \{c \ , \ c \geqslant e\})$

IV $\quad aB_r = (aB)_r$

Si $A = A_r$ on dit que A est un r-<u>idéal</u> (fractionnaire , et il est dit <u>entier</u> s'il est contenu dans le semi-groupe S des éléments entiers de G . Un r-idéal est dit fini s'il peut être engendré par un nombre fini d'éléments a_1 , ... , a_n et nous écrirons dans ce cas $A_r = (a_1 \ldots a_n)_r$. Il est <u>principal</u> s'il peut être engendré par un seul élément a , et nous écrivons $A_r = (a)_r = (a)$ puisque $(a)_r = Sa$ ne dépend pas de r . Un r-système est dit de <u>caractère fini</u> si le r-idéal engendré par A est égal à la réunion des r-idéaux engendrés par les parties finies de A .

Nous introduisons maintenant 5 r-systèmes particuliers, à savoir le s-système, le v-système, le v_s-système, le s_v-système et le d-système, qui vont jouer un rôle fondamental dans ce qui suit.

Etant donnés 2 r-systèmes, r_1 et r_2 dans G , on dit que le r_1-système est plus <u>fin</u> que le r_2-système si chaque r_2-idéal est aussi un r_1-idéal. En écrivant $r_1 < r_2$ si r_1 est plus fin que r_2 , la famille de tous les r-systèmes de G devient un ensemble partiellement ordonné qui possède un élément maximum v et un élément minimum s . Ces deux systèmes peuvent être définis d'une manière explicite par

$$A_v = \bigcap_{A \subseteq (a)} (a) \quad \text{et} \quad A_s = \bigcup_{a \in A} (a) = Sa \quad ,$$

Nous avons donc $s < r < v$ pour tout r . En désignant par N un ensemble fini, le v_s-système et le s_v-système sont définis par

$$A_{v_s} = \bigcup_{N \subseteq A} N_v \quad \text{et} \quad A_{s_v} = \bigcap_{A \subseteq N_s} N_s$$

Soit A un domaine d'intégrité avec K comme corps des quotients. En notant $K^* = K - \{0\}$ le groupe multiplicatif de K , et en posant $A^* = A - \{0\}$ on voit que K^* devient un groupe préordonné et filtrant par rapport à la divisibilité modulo A^* . Etant donné un r-système dans K^* avec $\mathcal{R}$ comme famille de r-idéaux, nous convenons de considérer la famille $\{A_r \cup \{0\}\}_{A_r \in \mathcal{R}}$ comme définissant un r-système dans K . Un sous-ensemble B de K est donc un r-idéal dans K si et seulement si $0 \in B$ et si $B - \{0\}$ est un **r-idéal dans** K^* . Par cette convention les idéaux fractionnaires de Dedekind vont en particulier former un r-système dans K que nous appellerons de d-système dans K .

2. Caractérisations des anneaux de valuation généraux.

Nous donnons dans ce paragraphe quelques caractérisations par les r-idéaux des anneaux de valuation généraux. De telles caractérisations seront par exemple obtenues en supposant que coïncident les éléments d'un certain couple de r-systèmes.

LEMME 1. - *Soit A un domaine d'intégrité. A est totalement préordonné par la divisibilité si et seulement si chaque s-idéal dans A est aussi un d-idéal dans A .*

DÉMONSTRATION. - Soit B_s un s-idéal dans A , et soient a et b deux éléments de B_s . Si l'on suppose que A est totalement préordonné par la divisibilité, on déduit par exemple de $a | b$ que $b = ca$ avec $c \in A$. Donc $a - b = a - ca = a(e - c) \in B_s$ et B_s est un d-idéal. Supposons inversement que chaque s-idéal dans A est un d-idéal dans A , en particulier le s-idéal $(a) \cup (b)$ sera un d-idéal, c'est-à-dire $a - b \in (a)$ ou $a - b \in (b)$ ce qui équivaut respectivement à a/b ou b/a .

Les deux lemmes suivants sont bien connus.

LEMME 2. - *Chaque v_s-idéal dans un corps K est aussi un d-idéal dans K .*

LEMME 3. - *Si A est un ensemble borné dans un groupe préordonné G les propriétés suivantes sont équivalentes :*

I A *est un v-idéal dans* G

II $A = (A^{-1})^{-1} (= S : (S : A))$

III *Il existe un sous-ensemble B non vide tel que* $A = B^{-1}$ $(= S : B)$

IV A *contient toutes les bornes supérieures de l'ensemble de ses bornes inférieures.*

Nous pouvons maintenant démontrer le

THÉORÈME 1. - *Si R est un domaine d'intégrité qui n'est pas un corps les propriétés suivantes sont équivalentes :*

A. R *est un anneau de valuation.*

B. *Chaque s-idéal dans R est un d-idéal dans R .*

C. Chaque s_v-idéal dans R est un d-idéal dans R.
D. Chaque s-idéal dans R est un v_s-idéal dans R.
E. Chaque s_v-idéal dans R est un v_s-idéal dans R.
F. Chaque s_v-idéal dans R est un v-idéal dans R.

DÉMONSTRATION. – L'équivalence de A et B est une conséquence du lemme 1. L'implication $B \to C$ découle de $s < s_v$ et $C \to A$ peut être démontrée de la même manière que $B \to A$ puisque chaque s-idéal fini est un s_v-idéal. Ceci établit l'équivalence des trois premières propriétés. Le théorème est donc démontré si nous prouvons la chaîne d'implications suivantes :

$$A \to D \to A \to F \to E \to A .$$

1° $A \to D$: Ceci résulte du fait que dans un anneau de valuation chaque s-idéal est un v_s-idéal.

2° Inversement $D \to A$ est une conséquence de $B \to A$ et du lemme 2.

3° $A \to F$: Cette implication découle du fait que dans un anneau de valuation chaque v-idéal fini est un idéal principal.

4° $F \to E$ est évidente, et $E \to A$ résulte du lemme 2 et de la démonstration de $B \to A$ (lemme 1).

3. Caractérisations des anneaux de valuations discrets.

Nous dirons qu'un anneau de valuation est discret si son groupe de divisibilité est discret par rapport à l'ordre induit par la divisibilité.

THÉORÈME 2. – Un domaine d'intégrité R est un anneau de valuation discret si et seulement si chaque s-idéal de R est un v-idéal dans R.

DÉMONSTRATION. – Soit R en anneau de valuation discret, soit A_s un s-idéal entier dans le groupe de divisibilité G de R et soit C une borne supérieure de l'ensemble des borne inférieures de A_s. Comme G est discret, C possède un successeur immédiat C^+ qui ne peut pas être une borne inférieure de A_s puisque C^+ est strictement plus grand qu'une telle borne inférieure. Donc $C^+ \in A_s$. Il y a maintenant deux possibilités :

1° $C \in A_s$ pour chaque choix de C, alors A_s est un v-idéal d'après le lemme 3.

2° $C \notin A_s$ pour un certain C, disons $C = C_0$. Dans ce cas $A_s = (C_0^+)$ est A_s est encore un v-idéal.

Supposons inversement que R soit un domaine d'intégrité où chaque s-idéal est un v-idéal. Comme chaque v-idéal est un d-idéal il suit de théorème 1 que R est un anneau de valuation. Reste à montrer que G est discret, c'est-à-dire que chaque élément a de G possède un successeur immédiat a^+ et un prédécesseur immédiat a^-. Si a ne possédait pas un successeur immédiat, l'ensemble B de tous les éléments x tels que $a < x$ ne pourrait pas avoir un élément minimum. Donc chaque borne inférieure b de B devrait vérifier $b \leq a$ et a serait la plus grande borne inférieure de B. Ceci entraînerait $B_v = B \cup \{a\}$ et B_v contiendrait B proprement. Notant w l'application canonique $K^* \to G$, il correspondrait donc à B un s-idéal $\{0\} \cup w^{-1}(B)$ dans K qui ne serait pas un v-idéal. Cette contradiction établit l'existence de a^+. Puisque G est un groupe ceci entraîne aussi l'existence de a^- et on a $a^- = ((a^{-1})^+)^{-1}$.

COROLLAIRE. - <u>Si</u> R <u>est un domaine d'intégrité qui n'est pas un corps les propriétés suivantes sont équivalentes.</u>

I R <u>est un anneau de valuation discret.</u>

II <u>Le</u> s_v<u>-système est identique au</u> d<u>-système</u>.

III <u>Le</u> s_v<u>-système est identique au</u> v_s<u>-système</u>.

DÉMONSTRATION. - En vertu du théorème 1, il suffit de montrer qu'un anneau de valuation est discret si et seulement si $s_v = d$ ou bien $s_v = v_s$. Dans un anneau de valuation $s = d = v_s < s_v = v$ de sorte que dans un tel anneau les relations $s_v = d$ et $s_v = v_s$ sont chacune équivalente à $s = v$. Notre corollaire est donc une conséquence immédiate du théorème 2.

4. <u>Un théorème sur l'arithmétique des groupes ordonnés. Caractérisation des anneaux de valuation archimédiens.</u>

La caractérisation fondamentale des sous-groupes du groupe additif R des nombres réels en tant que groupe ordonné est la suivante

(A) <u>Un groupe abélien totalement ordonné</u> G <u>est isomorphe à un sous-groupe de</u> R <u>si et seulement si</u> G <u>est archimédien</u>.

Nous nous proposons ici de donner une nouvelle caractérisation des sous-groupes de R qui nous semble présenter un certain intérêt pour plusieurs raisons. D'abord elle est très différente de la caractérisation (A) ci-dessus, bien que notre démonstration utilise (A). Puis elle ajoute un nouveau théorème de r-groupe à ceux déjà connus. Finalement en employant les caractérisations des anneaux de valuation généraux et discrets données dans les paragraphes précédents, le théorème en question possède quelques corollaires parmi lesquels se trouve le théorème de s-groupe pour un domaine d'intégrité ("s-Gruppensatz" dans la terminologie de Krull).

Si l'on définit une r-multiplication, notée O_r, dans l'ensemble des r-idéaux fractionnaires de G par $A_r \, O_r \, B_r = (AB)_r$, on sait que la condition suivante joue un rôle fondamental en arithmétique des domaines d'intégrité.

Condition de r-groupe. - Les r-idéaux fractionnaires de G forment un groupe par rapport à la r-multiplication.

Nous dirons en particulier qu'un domaine d'intégrité satisfait à la condition de r-groupe si son groupe de divisibilité y satisfait. Si G ($\neq S$) est le groupe de divisibilité d'un domaine d'intégrité on sait que la condition de r-groupe donne respectivement dans les cas $r = d$, $r = v_s$, $r = v$ et $r = s$ une caractérisation des anneaux de Dedekind, des anneaux normaux, des anneaux complètement intégralement clos et des anneaux de valuation discrets de rang 1. En général nous allons appeler "théorème de r-groupe" un théorème qui caractérise les groupes satisfaisant à la condition de r-groupe. Il est naturel de se demander si le cinquième cas $r = s_v$ donne aussi une caractérisation d'une classe d'anneaux bien connus. Nous allons voir que c'est en effet le cas en démontrant le théorème suivant :

THÉOREME 3 ("théorème de s_v-groupe"). - Le groupe abélien filtrant G est isomorphe à un sous-groupe du groupe additif des nombres réels si et seulement si G satisfait à la condition de s_v-groupe, c'est-à-dire si et seulement si les s_v-idéaux fractionnaires de G forment un groupe par rapport à la s_v-multiplication.

La démonstration repose sur les deux lemmes suivants :

LEMME 4. - Si G satisfait à la condition de s_v-groupe alors S est complètement intégralement clos dans G.

DÉMONSTRATION. - Si les s_v-idéaux forment un groupe par rapport à la s_v-multiplication chaque s_v-idéal est de la forme A^{-1} et est donc un v-idéal (lemme 3). Ceci montre que $s_v = v$ et d'après le théorème de v-groupe S est complètement intégralement clos dans G.

LEMME 5. - Si G satisfait à la condition de s_v-groupe G est totalement ordonné.

DÉMONSTRATION. - Dans le cas où G est le groupe de divisibilité d'un domaine d'intégrité A, ceci résulte immédiatement de l'égalité $s_v = v$ établie dans la démonstration précédente et du théorème 1 qui affirme que cette égalité entraîne que A est un anneau de valuation. Donnons maintenant une démonstration qui ne fait pas intervenir le d-système et qui est donc valable pour un groupe abélien filtrant quelconque.

Supposons que G vérifie la condition de s_v-groupe. Les s_v-idéaux de G forment donc en particulier un demi-groupe avec règle de simplification par rapport à la s_v-multiplication. Mais cette règle de simplification (par rapport à l'égalité) entraîne la règle de simplification par rapport à l'inclusion $\subseteq$. En effet d'une inclusion $A_r \circ_r B_r \subseteq A_r \circ_r C_r$ il résulte

$$A_r \circ_r C_r = (A_r \circ_r B_r) \cup (A_r \circ_r C_r) = A_r \circ_r (B_r \cup C_r) .$$

D'où si la règle de simplification par rapport à l'égalité est valable $C_r = B_r \cup C_r$, et donc $B_r \subseteq C_r$. Il est clair que pour les s-idéaux nous avons $(1\ ,\ a)_s \subseteq (a\ ,\ a^{-1})_s \circ_s (1\ ,\ a)_s$. Puisque chaque s-idéal fini est un s_v-idéal, il s'en suit que

$$(1\ ,\ a)_{s_v} \subseteq (a\ ,\ a^{-1})_{s_v} \circ_{s_v} (1\ ,\ a)_{s_v}$$

et d'après la remarque générale ci-dessus en simplifiant par $(1\ ,\ a)_{s_v}$

$$1 \in (a\ ,\ a^{-1})_{s_v} = (a\ ,\ a^{-1})_s$$

Ceci signifie qu'on a, ou bien $a \in S$, ou bien $a^{-1} \in S$, et G est bien totalement ordonné.

DÉMONSTRATION du théorème de s_v-groupe. - Si G satisfait à la condition de s_v-groupe les deux lemmes ci-dessus montrent que G est totalement ordonné et que S est complétement intégralement clos dans G, ce qui signifie que G est archimédien. La caractérisation A montre alors que G est isomorphe à un sous-groupe de R.

Inversement soit R_0 un sous-groupe de R. Puisque R_0 est totalement ordonné, chaque s_v-idéal de R_0 est un v-idéal. R_0 étant archimédien satisfait à la condition de v-groupe, donc aussi à la condition de s_v-groupe.

COROLLAIRE 1. - <u>Un domaine d'intégrité</u> A <u>est un anneau de valuation de rang 1, c'est-à-dire un anneau de valuation à valeurs réelles, si, et seulement si,</u>

les s_v-idéaux fractionnaires non-nuls de A forment un groupe par rapport à la s_v-multiplication.

COROLLAIRE 2. - Un domaine d'intégrité A satisfait à la condition de s-groupe si et seulement si A satisfait à la fois à la condition de s_v-groupe et à la condition de d-groupe, ou bien à la fois à la condition de s_v-groupe et à la condition de v_s-groupe.

Ceci résulte des théorèmes de d-groupe, de v_s-groupe (et de s-groupe) caractérisant respectivement les anneaux de Dedekind, les anneaux normaux et les anneaux de valuation discrets de rang 1 . Mais il est ici intéressant de noter qu'on peut facilement démontrer ce corollaire sans connaître ces trois théorèmes. En effet le théorème de s_v-groupe entraîne que A est un anneau de valuation et par suite $s = d$ (théorème 1). Grâce à la condition de s_v-groupe la condition de d-groupe coïncide donc avec la condition de s-groupe. Même raisonnement si l'on remplace d par v_s .

COROLLAIRE 3 ("théorème de s-groupe"). - Le domaine d'intégrité A est un anneau de valuation discret de rang 1 si et seulement si les s-idéaux fractionnaires (non-nuls) de A forment un groupe par rapport à la s-multiplication.

DÉMONSTRATION. - Le fait qu'un anneau de valuation discret de rang un satisfait à la condition de s-groupe est évident. Inversement si A satisfait à la condition de s-groupe il satisfait d'après le corollaire 2 à la fois à le condition de s_v-groupe et à la condition de d-groupe. La condition de s_v-groupe entraîne que A est un anneau de valuation de rang 1 , donc en particulier $s = d$. La condition de d-groupe entraîne $d = v$. Par suite $s = v$, et A est un anneau de valuation discret de rang 1 , d'après le théorème 2 .

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUBERT (Karl Egil). - Contribution à la théorie des idéaux et à la théorie des valuations. - Oslo, Presse Universitaire, 1957 (Thèse Sc. math. Paris. 1957).