Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

F. Châtelet

Géométrie diophantienne et théorie des algèbres

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 8 (1954-1955), exp. nº 17, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1954-1955__8__A8_0>

Faculté des Sciences de Paris

-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL

(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)

Année 1954/55

-:-:-:-

Exposé n° 17

GÉOMÉTRIE DIOPHANTIENNE ET THÉORIE DES ALGÈBRES.

(Exposé de F. CHÂTELET, le 7 mars 1955)

-:-:-:-

On sait qu'un problème important dans la théorie des algèbres centrales simples est la recherche des corps de décomposition d'une telle algèbre A. Un corps de décomposition de A est un corps K tel que A admette une représentation (irréductible) par matrices à coefficients dans K.

En 1934, M. Ernst WITT[(1)] remarquait que la recherche des corps de décomposition des algèbres de rang 4 (algèbres de quaternions généralisés) est équivalente à un problème diophantien classique : recherche des différents corps qui peuvent être engendrés par les coordonnées d'un point simple situé sur une courbe de genre 0 donnée. Sous une forme plus algébrique, on peut dire que chaque algèbre de rang 4 est décomposée dans un corps convenable D de fonctions algébriques d'une seule variable de genre 0. De plus, tout corps de décomposition de A contient un corps des restes de D suivant une de ses valuations. On peut résumer ces propriétés en disant que D est le corps de décomposition "le plus général" de A.

Sans connaître le travail de M. WITT, je retrouvais en 1945[(2)] ses résultats sous une forme légérement différente et je montrais qu'ils peuvent être généralisés à toutes les algèbres centrales simples. Il y a quelques années, M. AMITSUR retrouvait de son côté des conclusions analogues. Ayant eu connaissance de mon propre travail, il me communiquait ses premiers résultats, relevait quelques erreurs de mon mémoire et prolongeait ses recherches dans cette voie. Au congrès d'AMSTERDAM, il m'a remis une copie d'un mémoire en cours de publication[(3)] où il reprend et complète les travaux antérieurs sur ce sujet.

Je voudrais ici dégager les idées essentielles de ce dernier mémoire qui me semblent par trop noyées dans les détails techniques. Ces détails sont indispensables pour la rigueur des démonstrations et la généralité des résultats. Mais une vue claire des méthodes est toute aussi importante pour pouvoir les utiliser à des recherches ultérieures. Je suis persuadé que le travail de M. AMITSUR n'est pas définitif, mais ouvre des voies nouvelles qui devraient conduire à des résultats intéressants.

1.- Le résultat central de M. AMITSUR et de ses prédécesseurs associe donc à chaque algèbre centrale simple A (sur un corps de base k) un corps de fonctions algébriques D qui peut être considéré comme le corps de décomposition le plus général de A . Mais ce sont d'autres propriétés qui permettent la construction de ce corps.

Le corps D est "rationnel", c'est-à-dire admet des représentations paramétriques birationnelles (ou devient un corps de fonctions rationnelles) dans certaines extensions K du corps de base k . Il admet en outre un groupe de transformations birationnelles en lui-même qui est isomorphe au groupe-quotient du groupe multiplicatif formé par les éléments réguliers de A par le groupe multiplicatif formé par les éléments réguliers de k .

Une représentation paramétrique birationnelle (dans un corps K) d'un corps rationnel R de fonctions algébriques permet d'obtenir les transformations birationnelles de R en lui-même dans K (c'est-à-dire à coefficients dans K) . Elles correspondent aux transformations de Cremona de l'espace H des paramètres dans K . Si on désire représenter seulement les transformations birationnelles de R dans le corps de base k (c'est-à-dire les transformations de R en lui-même qui peuvent être définies par des systèmes de relations dont tous les coefficients sont dans k) , on obtient un groupe très complexe. Pour obtenir un groupe plus simple, on peut se limiter à celles de ces transformations qui sont représentées par des <u>homographies</u> de H . Mais en général, on obtient ainsi un groupe réduit à la seule transformation identique ; les autres transformations de R en lui-même qui sont représentées par des homographies de H n'ont pas en général leurs coefficients dans k . C'est seulement pour des corps rationnels R particuliers et pour des <u>représentations</u> birationnelles <u>particulières</u> de ces corps qu'on obtient un groupe plus étendu.

Pour ces corps et ces représentations particulières, le groupe ainsi formé est isomorphe au groupe-quotient des éléments réguliers de A par les éléments réguliers de k . Chaque élément de l'algèbre A correspond biunivoquement à un des tableaux de coefficients définissant une des homographies du groupe.

Inversement à toute algèbre centrale simple A correspond un corps D

et des représentations birationnelles de ce corps vérifiant les propriétés précédentes.

Dans mon travail, j'avais surtout en vue la construction de l'algèbre A à partir du corps D pour étudier les propriétés géométriques, et plus précisément diophantiennes, de D . Mais il est encore difficile de caractériser complètement les corps rationnels D qui définissent des algèbres centrales simples. De plus, il existe plusieurs algèbres centrales simples (les puissances au sens de Brauer de l'une d'entre elles) qui correspondent à un même corps. M. AMITSUR a cherché à construire le corps D à partir de l'algèbre A pour complèter l'étude de cette algèbre. Je vais adopter ici ce point de vue.

2.- La première étape pour la construction du corps D consiste à définir A au moyen d'un "système de relations matricielles" ou d'un système de "transformations semi-linéaires".

On sait qu'une algèbre centrale simple A peut être représentée par un ensemble de matrices à coefficients dans un corps de décomposition K de A . On peut déduire de cette représentation d'autres représentations analogues, en généralisant le passage d'un élément géométrique imaginaire à l'élément géométrique "imaginaire conjugué".

Pour simplifier l'exposé, bornons-nous au cas où le corps K est une extension normale du corps de base k . Choisissons un élément φ du groupe de Galois de K par rapport à k . Remplaçons chaque coefficient de chaque matrice M par son transformé par φ ; la matrice $\varphi(M)$ ainsi obtenue représente le même élément de A que M dans une nouvelle représentation que nous appellerons "représentation transformée de la première par φ" . Or les résultats classiques d'E. NOETHER permettent de construire rationnellement toutes les représentations (irréductibles) d'une algèbre centrale simple à partir de l'une d'entre elles. La matrice $\varphi(M)$ représentant le même élément de A que la matrice M est la transmuée de M par une matrice fixe que nous appellerons T_φ :

$$\varphi(M) = T_\varphi^{-1} M T_\varphi \qquad (1)$$

Inversement, on peut montrer que toutes les matrices M qui vérifient l'ensemble des "relations matricielles" (1) correspondant aux différents éléments φ du groupe de Galois de K par rapport à k représentent les éléments de A .

Le principe de la méthode précédente est due à M. Richard BRAUER en 1929. Je l'ai repris indépendemment et sous une forme légérement différente en 1945. M. AMITSUR l'expose à son tour en remplaçant l'utilisation des matrices T_φ par celles des "transformations semi-linéaires" correspondantes.

Les matrices T_φ définissent des transformations linéaires dans un espace vectoriel E de K de dimension convenable (n si l'ordre de A est n^2) . On peut définir une transformation Φ de cet espace en remplaçant chaque coordonnée de chaque élément de cet espace par son transformé par φ . La transformation semi-linéaire S_φ définie par la matrice T_φ est le produit de la transformation linéaire définie par T_φ et de la transformation Φ . L'intérêt de ces transformations S_φ est que la relation matricielle (1) exprime encore que la transformation linéaire définie par M (dans le même espace vectoriel E) est permutable avec S_φ :

$$(2) \qquad M\, S_\varphi = S_\varphi\, M$$

D'autre part, les matrices T_φ sont reliées par des relations indépendantes de l'algèbre A (mais non du corps de décomposition K) conséquences des relations matricielles (1) . Ces relations, assez compliquées, expriment aussi que le produit de 2 transformations semi-linéaires S_φ et S_ψ est, au produit près par un scalaire de K , la transformation $S_{\varphi\psi}$ correspondant au produit $\varphi\psi$. Si on considère l'espace vectoriel E comme l'espace des coordonnées homogènes d'un espace homographiqué H , chaque transformation semi-linéaire S_φ définit une "anti-homographie" de H . La condition précédente exprime encore que les anti-homographies ainsi obtenues forment un groupe isomorphe au groupe de Galois de K par rapport à k[4] .

L'exposé de M. AMITSUR envisage le cas général où le corps k est arbitraire et où l'extension K peut ne pas être normale. Ce qui nécessite des détails techniques de démonstration assez délicats.

3.- La seconde étape permet maintenant la construction du corps D à partir des matrices T_φ (ou des transformations semi-linéaires S_φ).

Pour cela, considérons le corps R des fonctions rationnelles dans K (c'est-à-dire à coefficients dans K) de $n - 1$ variables indépendantes, si n^2 est l'ordre de A . Introduisons une variable d'homogénéité dans R . Chaque matrice M régulière permet de définir une transformation linéaire de ces variables homogènes. En effectuant cette transformation dans chaque élément de R , on obtient une transformation birationnelle de R en lui-même, que nous appellerons encore M . On peut remarquer que cette transformation ne change pas si on multiplie M par un scalaire (élément de K) . Chaque matrice T_φ permet de définir de façon analogue une transformation birationnelle de R en lui-même. Mais on peut aussi effectuer la transformation linéaire T_φ sur les variables homogènes et l'isomorphisme φ sur les coefficients de chaque élément de R (fonction rationnelle de n variables homogènes à coefficients dans K). Appellons I_φ la transformation de R en lui-même ainsi obtenue ; ce n'est plus une transformation birationnelle, mais c'est encore un isomorphisme (elle transforme la somme et le produit de 2 éléments de R en la somme et le produit des transformés de ces éléments). Cette transformation I_φ est permutable avec chaque transformation M de R en lui-même précédemment définie (pour les matrices M de l'algèbre A) . L'ensemble des transformations I_φ forme un groupe isomorphe au groupe de Galois de K par rapport à $\mathbf{k}$.

L'ensemble de tous les éléments de R qui sont invariants dans toutes ces transformations I_φ est un sous-corps D de R est une extension finie.

M. AMITSUR définit ce corps D d'une façon légérement différente. Il applique d'abord une transformation semi-linéaire S_φ à l'espace dual de l'espace des variables homogènes précédentes (c'est-à-dire à l'espace des fonctions linéaires et homogènes de ces variables à coefficients dans K). En opérant de même pour l'espace dual de celui des produits n à n des mêmes variables homogènes, il définit les transformés des polynomes homogènes de ces variables, puis de leurs quotients d'est-à-dire des éléments de R . Le corps D est encore l'ensemble de tous les éléments de R invariants dans toutes les transformations ainsi obtenues à partir des différentes transformations semi-linéaires S_φ .

En général, il n'y a pas de fonction homographique invariante dans toutes les transformations I_φ et le corps D n'est pas un corps de fonctions rationnelles, mais seulement un corps de fonctions algébriques. Les seules fonctions constantes de R qui sont invariantes dans toutes les transformations I_φ sont les éléments de k ; le corps D est un corps de fonctions algébriques à coefficients dans k . Plus précisément, l'extension de D obtenue en lui adjoignant les éléments de K est le corps R lui-même.

Chaque matrice régulière M de A définit encore une transformation birationnelle de D lui-même. En effet, la propriété de permutabilité de M et des transformations I_φ montre M transforme chaque élément de D en un élément de R qui est aussi invariant dans chaque transformation I_φ , donc appartient aussi à D . L'ensemble des transformations birationnelles de D

en lui-même ainsi défini est isomorphe au groupe-quotient des groupes multiplicatifs formés par les éléments réguliers de A et de k.
Ce qui établit les propriétés essentielles de D.

On peut encore construire un système effectif de générateurs de D, au moins dans le cas où le corps de base k de A contient une infinité d'éléments.

Pour cela, choisissons un corps de décomposition K_1 de A séparable et de degré n(5) (où n^2 est l'ordre de A). Appelons θ un élément primitif de K_1 et K l'extension normale de k engendrée par les conjugués θ_i $(i = 1, \dots, n)$ de θ par rapport à k. En utilisant une représentation de A par matrices à coefficients dans K_1, on obtient un système de matrices T_φ dont chacune ne dépend que de l'effet de φ sur les éléments de K_1. Il y a donc n matrices T_i distinctes correspondant aux n conjugués θ_i de θ ; mais il faut remarquer que les coefficients de ces matrices sont dans le corps normal K (et non dans le corps K_1). On montre qu'il existe, dans l'espace vectoriel E (sur lequel opèrent les matrices T_φ et M), une base formée par les transformés λ_i d'un élément λ de E par les n matrices T_i. Adoptons cette nouvelle base dans E ; on obtient ainsi une nouvelle représentation de A par matrices à coefficients dans K (et non plus dans K_1). Cette représentation correspond à un nouveau système de matrices T_φ ; le nombre (en général $n!$) de ces nouvelles matrices T_φ est plus élevé que celui des matrices T_i ; mais la forme de chaque matrice T_φ est plus simple que celle des matrices T_i. La matrice T_φ définit une transformation linéaire de E de la forme :

$$\lambda'_i = a_{i,\varphi} \quad \lambda_j$$

si $\theta_j = \varphi(\theta_i)$, $a_{i,\varphi}$ étant un élément de K dépendant de l'entier i et de l'élément φ du groupe de Galois de K par rapport à k.

Considérons maintenant la matrice diagonale Y dont les coefficients (de la diagonale principale) sont :

$$y_1 + y_2 \ \theta_i + \dots + y_n \ \theta_i^{n-1} \qquad (i = 1, \dots, n)$$

où $y_1, \dots, y_n$ désignent n indéterminées. Choisissons une matrice M dans la nouvelle représentation de A ; la relation :

$$\det. \ [M - Y] = 0$$

définit un corps de fonctions algébriques de $n-1$ des variables $y_1, \dots, y_n$
On montre que cette relation a ses coefficients dans k, donc le corps précé-

dent peut être défini sur k. Le corps ainsi défini sur k est un sous-corps de D ; c'est le corps D lui-même si la matrice :

$$M - d$$

est de rang au moins égal à $n - 1$, pour toute matrice diagonale d à coefficients dans K. Or on montre que, si k contient une infinité d'éléments, on trouve une matrice M dans la représentation de A qui possède cette propriété.

Les constructions précédentes du corps D sont dues à M. AMITSUR. J'avais, pour ma part, donné une construction de ce corps beaucoup moins satisfaisante.

4.- Pour donner un exemple précis des propriétés précédentes, il faut choisir une algèbre centrale simple A. Il existe des méthodes théoriques pour construire de telles algèbres, par exemple la construction comme "produit croisé". Mais, en fait, cette construction n'avait pu être pratiquement effectuée jusqu'ici que pour les "algèbres cycliques", en raison de la difficulté du choix d'un certain système de facteurs vérifiant des conditions compliquées. Dans le cas des algèbres cycliques, les propriétés précédentes sont immédiatement équivalentes aux propriétés classiques des "normes" des nombres d'une extension algébrique.

Une des conséquences fort intéressante du travail de M. AMITSUR, que celui-ci n'a pas exploitée, est de permettre la construction d'algèbres centrales simples moins triviales. Je me bornerai à donner quelques indications sur les algèbres de rang 9 ; elles correspondent à certaines surfaces cubiques de l'espace de dimension 3, ou à des corps D de fonctions algébriques de 2 variables indépendantes (non homogènes).

Dans ce cas, l'espace vectoriel E est de dimension 3 et le corps K_1 est de degré 3. Supposons en outre que le corps K_1 ne soit pas normal par rapport à k (dans le cas contraire, l'algèbre A est une algèbre cyclique). Il y a donc 6 matrices T_φ correspondant aux 6 permutations des indices 1, 2, 3. Choisissons la base de E comme il a été dit à la fin du paragraphe précédent. Les matrices T_{φ_1} et T_{φ_2} correspondant aux permutations φ_1 des indices 1, 2, 3 en 2, 1, 3 et φ_2 des indices 1, 2, 3 en 1, 3, 2 sont de la forme :

$$T_{\varphi_1} = \begin{Vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad T_{\varphi_2} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{Vmatrix}$$

Pour que les anti-homographies précédentes soient d'ordre 2, il est nécessaire que :

$$a \quad \varphi_1(b) \;=\; b \quad \varphi_1(a) = 1$$

$$c \quad \varphi_2(d) \;=\; d \quad \varphi_2(c) = 1 \,.$$

Les matrices T_{φ_1} et T_{φ_2} sont donc de la forme :

$$T_{\varphi_1} = \begin{Vmatrix} 0 & a & 0 \\ \varphi_1(a^{-1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad T_{\varphi_2} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & \varphi_2(c^{-1}) & 0 \end{Vmatrix}$$

Puisque φ_1 et φ_2 engendrent le groupe de Galois de K par rapport à k, les anti-homographies correspondant à T_{φ_1} et T_{φ_2} permettent de construire les autres, donc de calculer toutes les matrices T_φ (chacune à un coefficient de proportionalité près). Toutefois, l'ensemble des anti-homographies ainsi obtenues ne forme un groupe isomorphe au groupe des permutations des indices 1, 2, 3 que si les matrices T_{φ_1} et T_{φ_2} vérifient la relation que l'on déduit de :

$$\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_1 \quad \varphi_2 \;=\; 1$$

Cette relation se traduit par une relation entre a et b que je n'écris pas ici en raison de sa complexité ; je donnerai seulement un exemple de choix possible pour a et c.

Dans une note récente aux C. R. de l'Académie des Sciences(6), j'ai indiqué un tel choix. Mais il a le grave inconvénient de conduire à un corps D de fonctions rationnelles et à une algèbre centrale simple semblable à l'unité. Voici un autre exemple qui ne présente pas en général cet inconvénient :

$$a = 1 \;, \qquad\qquad c = \frac{\theta_1^2\ \theta_2 + \theta_2^2\ \theta_3 + \theta_3^2\ \theta_1}{\theta_1^2\ \theta_3 + \theta_2^2\ \theta_1 + \theta_3^2\ \theta_2}$$

Le nombre c a un seul conjugué par rapport à k que je désigne par c'.

Les 5 matrices T_φ (autres que la matrice unité qui correspond à l'élément unité du groupe de Galois) sont :

$$T_{\varphi_1} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad T_{\varphi_2} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & c'^{-1} & 0 \end{Vmatrix} \qquad T_{\varphi_3} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & c' \\ 0 & 1 & 0 \\ c^{-1} & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$T_{\psi_1} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c' \\ c^{-1} & 0 & 0 \end{Vmatrix} \qquad T_{\psi_2} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & c'^{-1} & 0 \end{Vmatrix}$$

La permutation φ_3 est celle qui transforme les indices 1, 2, 3 en 3, 2, 1 . Les permutations ψ_1 et ψ_2 sont les permutatiohs circulaires des indices 1, 2, 3 respectivement en 2, 3, 1 et 3, 2, 1 .

Le corps D est le corps de fonctions algébriques de 2 variables sur k qui peut être défini par la relation :

$$(3) \quad (X + \theta_1 Y + \theta_1^2 Z)(X + \theta_2 Y + \theta_2^2 Z)(X + \theta_3 Y + \theta_3^2 Z) - (X + \theta_1 Y + \theta_1^2 Z)$$

$$- (X + \theta_2 Y + \theta_2^2 Z) - (X + \theta_3 Y + \theta_3^2 Z) + \frac{c}{c'} + \frac{c'}{c} = 0$$

5.- Prenons pour corps de base k celui des nombres rationnels et considérons la surface cubique S_0 définie par la relation (3) dans l'espace X , Y , Z .

J'ai dit, dans un exposé antérieur(7), qu'une surface cubique définit une algèbre centrale simple (sur le corps des nombres rationnels) si elle contient un sextuplet rationnel : ensemble de six droites gauches deux à deux dont chaque droite peut ne pas être rationnelle (c'est-à-dire définie par un ensemble de 2 équations à coefficients rationnels), mais qui contient les conjuguées (par rapport au corps des nombres rationnels) de chacune de ces droites. Ce résultat ne s'applique pas à la surface précédente S_0 qui contient 3 points doubles coniques et par suite ne contient aucun sextuplet. Mais l'ensemble formé par les 3 droites D_1 , D_2 , D_3 à l'infini dans les plans :

$$X + \theta_1 Y + \theta_1^2 Z = 0 \quad , \quad X + \theta_2 Y + \theta_2^2 Z = 0 \quad , \quad X + \theta_3 Y + \theta_3^2 Z = 0$$

et les 3 droites D'_1 , D'_2 , D'_3 à distance finie :

$$X + \theta_1 Y + \theta_1^2 Z = -\frac{c}{c'} \quad , \quad X + \theta_2 Y + \theta_2^2 Z = -\frac{c'}{c}$$

$$X + \theta_2 Y + \theta_2^2 Z = -\frac{c}{c'} \quad , \quad X + \theta_2 Y + \theta_2^2 Z = -\frac{c'}{c}$$

$$X + \theta_3 Y + \theta_3^2 Z = -\frac{c}{c'} \quad , \quad X + \theta_1 Y + \theta_1^2 Z = -\frac{c'}{c}$$

joue un rôle analogue à celui d'un sextuplet rationnel. En effet, la surface S_0 admet la représentation paramétrique birationnelle définie par les formules :

$$X + \theta_1 Y + \theta_1^2 Z = -\frac{\mu + c\nu}{\lambda}$$

$$X + \theta_2 Y + \theta_2^2 Z = -\frac{\lambda + c'\nu}{\mu}$$

$$X + \theta_3 Y + \theta_3^2 Z = -\frac{c^{-1}\lambda + c'^{-1}\mu}{\nu}$$

où λ , μ , ν sont 3 paramètres homogènes. Dans cette représentation les 6 points du plan de coordonnées homogènes λ , μ , ν définis par les relations :

$$\mu = \nu = 0 \quad , \quad \nu = \lambda = 0 \quad , \quad \lambda = \mu = 0 \quad ,$$
$$\lambda = \mu + c\nu = 0 \quad , \quad \mu = \lambda + c'\nu = 0 \quad , \quad \nu = c^{-1}\lambda + c'^{-1}\mu = 0$$

sont représentés chacun par toute une droite de S_0 (respectivement par les droites D_1 , D_2 , D_3 , D'_1 , D'_2 , D'_3). Les droites du plan de coordonnées homogènes λ , μ , ν sont représentées par des cubiques gauches qui forment sur S_0 un réseau homoloïdal rationnel et dont aucune ne coupe les 6 droites D_1 , D_2 , D_3 , D'_1 , D'_2 , D'_3 . Cette représentation paramétrique (ou ce réseau homoloïdal) déterminée par l'ensemble de 6 droites D_1 , D_2 , D_3 , D'_1 , D'_2 , D'_3 conduit à une algèbre centrale simple A .

Remarquons encore que l'ensemble formé par les 3 droites à l'infini D_1 , D_2 , D_3 et les 3 droites D''_1 , D''_2 , D''_3 , obtenues en invertissant c et c' dans les équations des droites D'_1 , D'_2 , D'_3 joue aussi le rôle d'un sextuplet rationnel. Il conduit aussi à une algèbre centrale simple ; mais cette algèbre est le carré A^2 , au sens de BRAUER, de l'algèbre A précédente, d'après un résultat de M. AMITSUR. Ce qui donne une interprétation géométrique des puissances au sens de BRAUER d'une algèbre.

On peut alors chercher toutes les surfaces cubiques ayant 3 points doubles coniques qui conduisent à des algèbres centrales simples. En choisissant les points doubles dans le plan de l'infini, une telle surface peut être définie par une relation de la forme :

$$(4) \quad (X + \theta_1 Y + \theta_1^2 Z)(X + \theta_2 Y + \theta_2^2 Z)(X + \theta_3 Y + \theta_3^2 Z) - \alpha_1(X + \theta_1 Y + \theta_1^2 Z)$$
$$- \alpha_2(X + \theta_2 Y + \theta_2^2 Z) - \alpha_3(X + \theta_3 Y + \theta_3^2 Z) + D = 0$$

où θ_1 , θ_2 , θ_3 a la même signification que précédemment, où α_1 est un nombre du corps engendré par θ_1 , α_2 et α_3 sont les conjugués de α_1 et où D est un nombre rationnel. En général, la surface cubique définie par la relation (4) ne conduit pas à une algèbre centrale simple.

Cette surface contient seulement 12 droites : les 3 droites à l'infini qui joignent les points doubles, 6 droites qui se répartissent en 3 couples de droites passant par un seul des points doubles et 3 droites ne passant par aucun point double. Pour que la surface conduise à une algèbre centrale simple, il faut et il suffit que les 6 droites passant par un seul point double se répartissent en 2 triplets rationnels (ensembles de 3 droites gauches 2 à 2 contenant les conjuguées de chacune de ses droites). Cette condition peut d'ailleurs être exprimée simplement en fonction des coefficients α_1, α_2, α_3, D : le nombre rationnel

$$D^2 + 4\,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$$

doit être le produit du carré d'un nombre rationnel et du nombre

$$\left(\frac{c}{c'} - \frac{c'}{c}\right)^2 \qquad \text{où} \qquad c = \frac{\theta_1^2\theta_2 + \theta_2^2\,\theta_3 + \theta_3^2\,\theta_1}{\theta_1^2\,\theta_3 + \theta_2^2\,\theta_1 + \theta_3^2\,\theta_2}$$

Chacune des surfaces cubiques ainsi obtenues conduit à 2 algèbres centrales simples dont l'une est le carré, au sens de BRAUER, de l'autre.

6.- En terminant cet exposé, j'insiste encore sur les voies de recherches nouvelles qu'ouvre le travail de M. AMITSUR. Il faudrait généraliser à des hypersurfaces convenables ce que j'ai dit des surfaces cubiques de l'espace ordinaire et compléter ces derniers résultats. Il faudrait reprendre les démonstrations de la théorie du corps des classes (équivalente à la théorie des algèbres centrales simples sur un corps de nombres algébriques) et chercher si les méthodes et résultats précédents ne peuvent pas les améliorer et les compléter.

NOTES

(1) - E. WITT : Ueber ein Gegenbeispiel zum Normensatz. Math. Zeit. 39 (1935) p. 462 .

(2) - F. CHATELET : Variations sur un thème de Poincaré. Ann. Sc. Ec. norm. sup. (3) 59 (1944) p. 249.

(3) - Mémoire en cours de publication aux Annals of Math.

(4) - Voir F. CHATELET : Applications des idées de Galois à la géométrie algébrique. Colloque de géométrie algébrique, Liège 1949.

(5) - L'existence de tels corps de décomposition est équivalente à celle des sous-corps maxima de l'algèbre. Cette dernière est démontrée dans DEURING : Algebren, Leipzig 1934, p. 44, théorème 6, et p. 47, théorème 16 ; ou dans A. ALBERT : Structure of algebras, New York, 1939 p.

(6) - C. R. Académie des Sciences, t. 239, (1954) p. 1578 .

(7) - Séminaire d'algèbre, 20 février 1954 .