Jean-Marc Deshouillers

La « nouvelle technique » de Hooley

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 20, nº 2 (1978-1979), exp. nº 23, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1978-1979__20_2_A2_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
20e année, 1978/79, n° 23, 5 p.

26 mars 1979

LA "NOUVELLE TECHNIQUE" DE HOOLEY

par Jean-Marc DESHOUILLERS (*)
[Université de Bordeaux]

1. Introduction. Présentation des résultats.

Soit $\Delta(n) = \max_{u>0} \sum_{d|n, u<d\leq eu} 1$. La méthode récemment introduite par Hooley [1] consiste en une majoration en moyenne de la quantité $\Delta(n)$ et à son application à divers domaines de la Théorie des nombres : évaluation d'expressions arithmétiques liées aux diviseurs, mais aussi approximation modulo 1 , théorie additive (problème de Waring). Voici un échantillonage des résultats obtenus (conformément à l'usage, on notera $d(n)$ le nombre de diviseurs de n).

THÉORÈME 1. - Lorsque le nombre réel x tend vers l'infini, on a :

$$\sum_{n\leq x} \Delta(n) = O(x \log^{(4/\pi)-1} x) .$$

THÉORÈME 2. - Soient x un nombre réel, et k un entier inférieur à $x^{2(1-\delta)}$ (δ réel positif fixé) ; on a

$$\sum_{\ell\leq x, m\leq x, \ell m\equiv a (\mathrm{mod}\ k)} 1 = O_{\varepsilon}\left(\frac{d\{(a , k)\}\, x^2 \log^{(4/\pi)-1+\varepsilon} x}{k}\right)$$

lorsque x tend vers l'infini.

THÉORÈME 3. - Soient B et x deux nombres réels positifs, et a un entier pair non carré inférieur à $\log^B x$; on a :

$$\sum_{n\leq x} d(an^2 - 1) \sim \frac{12x \log x}{\pi^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n}\right)\frac{1}{n}\right)\prod_{p|a}\left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1}$$

uniformément en a lorsque x tend vers l'infini.

THÉORÈME 4. - Soient θ un nombre irrationnel, et γ un nombre réel ; pour tout nombre réel positif ε , il y a une infinité d'entiers n tels que

$$\|n^2 \theta - \gamma\| < n^{(-1/2)} \log^{(2/\pi)-(1/2)+\varepsilon} n .$$

THÉORÈME 5. - Soit $r_8(n)$ le nombre de manières d'exprimer l'entier n comme somme de 8 cubes > 0 ; pour tout nombre réel positif ε , on a, lorsque n tend vers l'infini,

$$r_8(n) = O_{\varepsilon}(n^{5/3}(\log n)^{\sqrt{3}-1+\varepsilon}) .$$

(*) Texte reçu le 1er octobre 1979.
Jean-Marc DESHOUILLERS, Laboratoire associé au CNRS n° 226, UER Mathématiques et Informatique, Université de Bordeaux-I, 351 cours de la Libération, 33405 TALENCE CEDEX.

Dans le temps dont nous disposons, nous allons esquisser la démonstration des théorèmes 1 et 2, et indiquer brièvement une connection entre le théorème 2 et l'évaluation de sommes trigonométriques.

2. Esquisse de la démonstration du théorème 1.

Le lecteur pourra se convaincre de la difficulté du problème en essayant d'améliorer l'encadrement trivial

$$[x] \leqslant \sum_{n\leqslant x} \Delta(n) \leqslant x \sum_{n\leqslant x} d(n) \leqslant x \log x + O(x) .$$

Dans son article, HOOLEY indique les deux résultats

$$\frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} \Delta(n) \dashrightarrow \infty \quad \text{et} \quad \sum_{n\leqslant x} \Delta(n) = O\left(\frac{x \log x}{\sqrt{\log \log x}}\right)$$

obtenus essentiellement par ERDÖS et à la manière d'ERDÖS, par des arguments combinatoires élémentaires et non triviaux.

Le point-clef de la démonstration du théorème 1 est l'obtention de la majoration.

$$(1) \qquad \sum_{n\leqslant x} \mu^2(n) \frac{\Delta(n)}{n} = O(\log^{4/\pi} x) .$$

Soit $\nu = p_1 \dots p_s$ un entier sans facteur carré ; le nombre de diviseurs de ν dans l'intervalle $]u , eu]$ est égal au nombre de solutions de la double inégalité

$$\log u < \beta_1 \log p_1 + \dots + \beta_s \log p_s \leqslant \log u + 1 ,$$

(où les β_i valent 0 ou 1), ou encore au nombre $P_\nu(w)$ de solutions de la double inégalité

$$w - 1 < \alpha_1 \log p_1 + \dots + \alpha_s \log p_s \leqslant w + 1$$

(où les α_i valent $+1$ ou -1 et $w = \log eu^2/\nu$). De la minoration $\pi^2 \sin^2 z/2 \geqslant 2z^2$ valable pour $|z| \leqslant 1$, on déduit la majoration

$$\Delta(\nu) \leqslant \sup_w \frac{\pi^2}{2} \sum_{\alpha_j=\pm1} \frac{\sin^2 1/2(F(\alpha_1 , \dots , \alpha_s) - w)}{(F(\alpha_1 , \dots , \alpha_s) - w)^2} ,$$

où $F(\alpha_1 , \dots , \alpha_s) = \alpha_1 \log p_1 + \dots + \alpha_s \log p_s$.

A l'aide de la relation $(4 \sin^2 \frac{1}{2} z)/z^2 = \int_{-1}^{1}(1 - |t|)\exp itz\, dt$, on obtient

$$\Delta(\nu) \leqslant \sup_w \frac{\pi^2}{8} \int_{-1}^{1}(1 - |t|\exp itw(\sum_{\alpha_j=\pm1} \exp it\, F(\alpha_1 ,\dots, \alpha_s))dt$$

$$\leqslant 3 \int_0^1 \prod_{j=1}^{s} 2|\cos(t \log p_j)|\,dt ;$$

ainsi $\Delta(\nu)$ est majoré par l'intégrale d'une fonction multiplicative, et on a donc

$$\sum_{n\leqslant x} \mu^2(n) \frac{\Delta(n)}{n} \leqslant 3 \int_0^1 \prod_{p\leqslant x}\left(1 + \frac{2|\cos(t \log p)|}{p}\right)dt$$

$$\leqslant 3 \int_0^1 \exp\left(2 \sum_{p\leqslant x} \frac{|\cos(t \log p)|}{p}\right)dt .$$

La dernière somme écrite, qui vaut $\int_{3/2}^{x}(|\cos(t \log u)|\, d\pi(u))/u$ est alors majorée sans grande difficulté à l'aide du théorème des nombres premiers (la forme $\pi(u) = li\, u + O(u.\log^{-2} u)$ est suffisante) et la majoration (1) en résulte.

Grâce à la majoration triviale

(2) $$\Delta(\ell m) \leq d(\ell)\Delta(m) ,$$

on déduit de (1) la majoration

(3) $$\sum_{n\leq x} \frac{\Delta(n)}{n} = O(\log^{4/\pi} x) .$$

Pour en déduire le théorème 1, HOOLEY écrit

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} \Delta(n) &\leq \sum_{n\leq x^{1/2}} d(n) + \sum_{x^{1/2}<n\leq x} \Delta(n)\\ &= O(x^{1/2} \log x) + O(\frac{1}{\log x} \sum_{n\leq x} \Delta(n)\log n) ,\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} \Delta(n)\log n &= \sum_{n\leq x} \Delta(n) \sum_{m/n} \Lambda(m)\\ &= \sum_{\ell m\leq x} \Delta(\ell m)\Lambda(m)\\ &\leq \sum_{\ell\leq x} \Delta(\ell) \sum_{m\leq x/\ell} d(m)\Lambda(m)\\ &= O(x \sum_{\ell\leq x} \frac{\Delta(\ell)}{\ell}) ,\end{aligned}$$

ce qui conduit à la démonstration du théorème 1.

3. Esquisse de la démonstration du théorème 2. (On notera $\eta = 2^{5/\delta}$, $X = x^{\delta^2/5\eta \log\log x}$.)

Pour majorer la somme introduite dans l'énoncé du théorème 2, on commence par découper le champ de sommation de ℓ en intervalles de la forme $[L , eL]$; la contribution des L inférieurs à $x \log^{-\eta} x$ est évaluée par une technique classique due à VAN DER CORPUT [2] ; la contribution des L restants est

$$O(\log\log x \sum_{n\leq x^2, n\equiv a (\mathrm{mod}\ k)} \Delta(u)) ,$$

et nous nous attacherons désormais à la majoration de cette dernière somme en supposant (cas auquel on se ramène sans grand problème) que a et k sont premiers entre eux.

L'entier n étant donné, on posera $n = n_1 n_2$, où n_1 regroupe les facteurs premiers de n au plus égaux à X , et n_2 les autres. Une version pondérée de la méthode de VAN DER CORPUT déjà citée permet de majorer la contribution des entiers n pour lesquels n_1 est anormalement grand $(n_1 > x^\delta)$, et on est conduit à majorer la somme

$$\Sigma = \sum_{n_1 n_2\leq x^2, n_1\leq x^\delta, n_1 n_2\equiv a (\mathrm{mod}\ k)} \Delta(n_1 n_2) ;$$

l'inégalité (2) du paragraphe précédent implique

$$\Sigma \leq \sum_{n_1\leq x^\delta, (n_1,k)=1} \Delta(n_1) \sum_{n_2\leq x^2/n_1, n_2\equiv a n_1^{-1} (\mathrm{mod}\ k)} d(n_2) .$$

Pour majorer la dernière somme écrite, HOOLEY commence par majorer (via le crible) la quantité

$$\sum_{n_2 \leq x^2/n_1 , n_2 \equiv a n_1^{-1} (\mathrm{mod}\ k)} 1$$

et se ramène à celle-ci par un argument alternatif :

ou bien $\Omega(n_2)$ est petit (au plus $\frac{4}{\delta}$), et alors on utilise la majoration $d(n_2) = O(1)$,

ou bien $\Omega(n_2)$ est grand, mais alors n_2 admet un petit (au plus $n_2^{\delta/4}$) diviseur d tel que $d_2 = d$ et qui possède, à constante près, $(\frac{4}{\delta})$, autant de facteurs premiers que n_2 . En découpant la sommation en n_2 selon les valeurs de d_2 , on est de nouveau ramené à majorer une quantité

$$\sum_{d_2 \leq z , d_2 \equiv a d_1^{-1} (\mathrm{mod}\ k)} 1 .$$

HOOLEY obtient ainsi

$$\sum_{n_2 \leq x^2/n_1 , n_2 \equiv a n_1^{-1} (\mathrm{mod}\ k)} d(n_2) = O\left(\frac{x^2 (\log \log x)^{\varepsilon}}{n_1 \ \varphi(k) \log x}\right)$$

pour un certain $\varepsilon(\delta)$.

Cette majoration, jointe à la majoration (3) du paragraphe précédent, conduit au théorème 2.

4. Utilité du théorème 2.

Soit à évaluer la somme $S_0 = \sum_{n \leq N} e(\frac{a}{b} n^3)$, somme qui intervient aussi bien dans l'étude de la répartition modulo 1 de la suite αn^3 que lors de l'étude du nombre de représentations d'un entier en somme de cubes ; en suivant H. WEYL, on écrit

$$|S_0|^2 = \sum_{1 \leq n_1 \leq N} \sum_{1 \leq n_2 \leq N} e(\tfrac{a}{b}(n_1^3 - n_2^3)) .$$

Par le changement de variables $n = n_1$, $h = n_1 - n_2$, on a :

$$|S_0|^2 = N + \sum_{0 < |h| < N} \sum_{1 \leq n \leq N , 1 \leq n-h \leq N} e(\tfrac{a}{b} h(3n^2 - 3nh + h^2))$$

en élevant de nouveau au carré et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient la majoration suivante (dans laquelle T_h désigne la dernière somme écrite) :

$$|S_0|^4 \ll N^2 + N \sum_{0 < |h| < N} |T_h|^2 .$$

Ainsi, la majoration de S_0 passe-t-elle par la majoration de

$$|T_h|^2 = \sum_{m_1} \sum_{m_2} e(3 \tfrac{a}{b} h(m_1^2 - m_1 h - m_2^2 + m_2 h)) ,$$

où m_1 et m_2 sont tels que $1 \leq m_i \leq N$ et $1 \leq m_i - h \leq N$; par le changement de variables $m = m_1$, $k = m_1 - m_2$, on est essentiellement ramené à la majoration de

$$S_1 = \sum_{1\leq h\leq N} \sum_{1\leq k\leq N} \left| \sum_m e\left(6\,\frac{a}{b}\,hkm\right) \right| \ ,$$

où le champ de sommation de la troisième variable est un sous-intervalle de l'intervalle $1 \ , \ N$. La troisième somme étant une progression géométrique, on est ramené à majorer

$$S_2 = \sum_{1\leq h\leq N} \sum_{1\leq k\leq N} \frac{1}{\left\| 6\,\frac{ahk}{b} \right\|^*}$$

(où $\|u\|^* = \max(\|u\| \ , \ \frac{1}{N})$), somme qui se réécrit :

$$S_2 = \sum_{u \bmod b} \frac{1}{\left\| 6\,\frac{au}{b} \right\|^*} \sum_{1\leq h\leq N,\, 1\leq k\leq N,\, hk\equiv u \pmod b} 1$$

expression dans laquelle la dernière somme est justiciable du théorème 2.

RÉFÉRENCES

[1] HOOLEY (C.). - On a new technique and its applications to the theory of numbers, Proc. London math. Soc., Series 3, t. 38, 1979, p. 115-151.

[2] VAN DER CORPUT (J. G.). - Une inégalité relative au nombre des diviseurs, Koninkl. nederl. Akad. Wetensch., Proc., t. 42, 1939, p. 547-553.