Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Jean Cougnard

Groupes de torsion associés à des anneaux d'entiers

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 20, nº 1 (1978-1979), exp. nº 11, p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1978-1979__20_1_A7_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
20e année, 1978/79, n° 11, 2 p.

18 décembre 1978

GROUPES DE TORSION ASSOCIÉS À DES ANNEAUX D'ENTIERS

par Jean COUGNARD (*)
[Université de Franche-Comté, Besançon]

Résumé.

On désigne par N une extension galoisienne de $\underset{\sim}{Q}$ de groupe de Galois G, par O_N la clôture intégrale de $\underset{\sim}{Z}$ dans N, et par $\mathfrak{M}$ un ordre maximal de $\underset{\sim}{Q}[G]$ contenant $\underset{\sim}{Z}[G]$.

Dans un travail précédent [3], on a donné un exemple d'extension $N/\underset{\sim}{Q}$ sauvagement ramifiée telle que le $\mathfrak{M}$-module $\mathfrak{M}O_N$ ne soit pas stablement libre, contrairement à ce qui se passe pour les extensions modérément ramifiées ([7], th. 11), les p-extensions et les extensions abéliennes ([2], [8]).

Le groupe G, utilisé dans [3], est un groupe métacyclique d'ordre pq (p et q premiers). Dans cet exemple si, au lieu de considérer $\mathfrak{M}O_N$, on fait l'extension des scalaires $\mathfrak{M} \otimes_{\underset{\sim}{Z}[G]} O_N$, on obtient un $\mathfrak{M}$-module isomorphe à $\mathfrak{M}O_N \oplus T$ où T est un $\mathfrak{M}$-module fini, et on a le résultat suivant [4] :

THÉORÈME. - Lorsque G est un groupe métacyclique d'ordre pq (p et q premiers), les classes de $\mathfrak{M} \otimes_{\underset{\sim}{Z}[G]} O_N$ et de $\mathfrak{M}$ sont les mêmes dans le groupe de Grothendieck $G_0(\mathfrak{M})$ de la catégorie des $\mathfrak{M}$-modules de type fini.

On remarque aisément que le théorème est encore vrai si $N/\underset{\sim}{Q}$ est une p-extension [4] ou une extension abélienne [1]. Dans ce dernier cas, ainsi que lorsque G est un groupe quaternionien d'ordre 8, on peut décrire explicitement le groupe de torsion T [5].

Etant donnés deux ordres maximaux $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ de $\underset{\sim}{Q}[G]$, il existe un isomorphisme canonique entre $G_0(\mathfrak{M})$ et $G_0(\mathfrak{M}')$; si ces ordres contiennent $\underset{\sim}{Z}[G]$ la question se pose de savoir si les images de $\mathfrak{M} \otimes_{\underset{\sim}{Z}[G]} O_N$ et $\mathfrak{M}' \otimes_{\underset{\sim}{Z}[G]} O_N$ se correspondent dans cet isomorphisme. Si oui, est-ce que le théorème énoncé ci-dessus reste valable ?

Additif. - Dans l'exposé 33 du 11 juin 1979 de ce même séminaire Stephen M. J. WILSON montre que la réponse à ces questions est négative.

(*) Texte reçu le 17 septembre 1979.
Jean COUGNARD, E. R. A. 0 0654 C. N. R. S., Laboratoire de Mathématiques, Faculté des Sciences, Route de Gray, La Bouloie, 25030 BESANÇON CEDEX.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHATELAIN (Danièle). - Etude du 0-module $\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} O_K$ pour une extension $K/\mathbb{Q}$ abélienne de groupe G, avec $\mathcal{O}$ ordre maximal de $\mathbb{Q}[G]$, O_K anneau des entiers de K, Publications mathématiques de la Faculté des Sciences de Besançon, 1976/77.

[2] COUGNARD (Jean). - Propriétés galoisiennes des anneaux d'entiers des p-extensions, Comp. Math., Groningen, t. 33, 1976, p. 303-336.

[3] COUGNARD (Jean). - Un contre-exemple à une conjecture de J. Martinet, "Algebraic number fields", Edited by A. Fröhlich, p. 539-559. - Academic Press, 1977.

[4] COUGNARD (Jean). - Une propriété de l'anneau des entiers des extensions galoisiennes non abéliennes de degré pq des rationnels, Comp. Math., Groningen (à paraître).

[5] COUGNARD (Jean). - Groupes de torsion associés à des extensions quaternioniennes de degré 8 du corps des nombres rationnels, Publications mathématiques de la Faculté des Sciences de Besançon, 1977/78.

[6] FRÖHLICH (A.). - Locally free modules over arithmetic orders, J. für die reine und angew. Math., t. 274/275, 1975, p. 112-138.

[7] FRÖHLICH (A.). - Arithmetic and Galois-module structure for tame extensions, J. für die reine und angew. Math., t. 286/287, 1976, p. 380-440.

[8] LEOPOLDT (H. W.). - Über die Hauptordnung der ganzen Elementen eines abelschen Zahlkörpers, J. für die reine und angew. Math., t. 201, 1959, p. 119-149.