Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Marcel Schützenberger

Propriétés nouvelles des tableaux de Young

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 19, nº 2 (1977-1978), exp. nº 26, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1977-1978__19_2_A2_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
19e année, 1977/78, n° 26, 14 p.

6 février 1978

PROPRIÉTÉS NOUVELLES DES TABLEAUX DE YOUNG

par Marcel SCHÜTZENBERGER

Résumé. - Nous explicitons, par une construction sur les tableaux de Young, les coefficients des polynômes de Foulkes, qui permettent l'expression des fonctions Q de Littlewood.

1. Introduction.

Une des bases classiques de l'algèbre des fonctions symétriques (sur un ensemble arbitraire de variables qu'il est inutile de spécifier) est constituée par les fonctions de Schur, $s(J)$. Comme on le sait celles-ci sont indexées de façon biunivoque par les partitions J de leur degré. Une autre base remarquable a été introduite par LITTLEWOOD [4]. Ces nouvelles fonctions, $Q(J)$, dépendent d'un paramètre q , et sont aussi indexées par les partitions. Elles interviennent dans la théorie des représentations des groupes linéaires finis [2] et, pour $q = -1$, dans celle de la représentation projective des groupes symétriques. On trouvera dans [5] un exposé systématique de leurs propriétés et de leurs applications.

Il existe des polynômes $F(I , J) \in \mathbb{Z}[q]$ tels que l'on ait identiquement

$$Q(I) = \sum F(I , J) \, s(J) \, . \tag{1}$$

Dans cette relation, la sommation porte sur l'ensemble $\underset{\sim}{P}_n$ de toutes les partitions J du même entier n que I , et les $s(J)$ sont les fonctions de Schur associées à un système de variables canoniquement attachées à celles sur lesquelles sont définies les Q .

Notre regretté collègue H. O. FOULKES, auquel la théorie des fonctions symétriques est redevable de tant de beaux résultats, avait émis la conjecture [1] que les polynômes F que nous proposons d'appeler polynômes de Foulkes ont des coefficients non négatifs. Un de ses élèves, G. THOMAS l'a d'ailleurs établi pour certaines partitions I , et il était connu de FOULKES que les $F(I , J)$ constituent des q-analogues des nombres de Kostka.

Nous donnerons ici une preuve de la conjecture de Foulkes en précisant les degrés des polynômes.

Dans tout ce travail, nous appellerons partition toute application I décroissante (au sens large) de $1 , 2 , \ldots , m , \ldots$ dans $\underset{\sim}{N}$. La hauteur de I sera le plus grand m tel que $mI \neq 0$. On associera à I une autre application décroissante I^{Σ} par la condition que, pour chaque $m \geqslant 1$,

$$mI^{\Sigma} = \sum_{i \geqslant m} iI \, . \tag{2}$$

Par conséquent, $1I^{\Sigma}$ sera le poids de I , c'est-à-dire l'entier dont I est une partition. Il est bien connu que l'ensemble $\underset{\sim}{P}_n$ des partitions de poids n est muni d'un ordre naturel $\leqslant$, défini par

(3) $J \leqslant I$ si, et seulement si, $mJ^{\Sigma} \leqslant mI^{\Sigma}$ identiquement.

Notre résultat principal est résumé dans l'énoncé suivant.

THÉORÈME. - Si $J \leqslant I$, le polynôme de Foulkes $F(I\ ;\ J)$ est monique, de degré $1I^{\Sigma\Sigma} - 1J^{\Sigma\Sigma}$; dans le cas contraire, il est nul.

La preuve repose sur l'algèbre des tableaux qui joue, de par ailleurs, un certain rôle dans l'étude des groupes classiques, et consiste à attacher à chaque tableau t une valeur $t\nu \in \underset{\sim}{N}$, sa charge, de telle sorte que $F(I\ ,\ J)$ soit la somme des $q^{t\nu}$ sur tous les tableaux de multidegré I et de forme J . Les définitions et les principales propriétés des tableaux sont rappelées dans la section 2. La preuve de la conjecture est effectuée dans les sections 2 et 3 en utilisant diverses propriétés de la charge qu'il est plus commode de traiter séparément, dans les sections 4 et 5 qui sont indépendantes du reste.

Notre travail a été grandement aidé par les tables étendues que notre ami C. PRECETTI a su nous établir grâce aux moyens de calcul du LA. 248, et nous l'en remercions.

2. Généralités sur les tableaux.

Dans tout ce travail, $A = \{a < b < \ldots\}$ est un alphabet totalement ordonné, et A^* le monoïde libre qu'il engendre. Soit w un mot de A^* . Son multidegré est la fonction indiquant le nombre de fois $|w|_x$, où y figure chaque lettre x de A ; sa longueur (ou degré) est la somme $|w|$ des degrés partiels $|w|_x$. Il est commode de considérer w comme l'application dans A de son support $\{1 < 2 < \ldots < |w|\}$ envoyant chaque j sur sa j-ième lettre jw .

Un sous-mot (resp. facteur) de w est alors le mot obtenu en restreignant cette application à une partie (resp. à un sous-intervalle) de son support.

Si, et seulement si, cette application est croissante (lato sensu), w est une ligne (ce que l'on note $w \in L$). Il est clair que tout mot admet une factorisation unique en un nombre minimum de lignes. Sa forme est alors la suite des longueurs de ces dernières. Par exemple, les lignes de $w = bbacda$ sont $w_3 = bb$; $w_2 = acd$; $w_1 = a$, et la forme de w est 231 . Les lignes successives seront indexées à partir de la droite (au rebours de ce qui est fait pour les lettres).

Une ligne u est minorée par une ligne v si, et seulement si,

$$|u| \leqslant |v| \quad \text{et} \quad jv < ju \quad \text{pour} \quad j = 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ |u|\ .$$

Par exemple, $u = bbcd$ est minorée par $v = aabcd$; elle ne l'est ni par $v' = aaa$ (parce que $|v'| < |u| = 4$) ni par $v'' = aacd$ (parce que $3v'' \geqslant 3u$).

Définition 2.1. - Un mot w est un tableau si, et seulement si, chacune de ses lignes est minorée par la précédente.

On notera T l'ensemble des tableaux, et T^J le sous-ensemble de ceux dont la forme est une partition J donnée.

Cette condition équivaut à la possibilité d'écrire les lignes successives du mot les unes au-dessous des autres de telle sorte que, d'une part, l'ensemble des points occupés soit un diagramme de Ferrer et, d'autre part, que les lettres de chaque colonne soient en ordre strictement croissant. Donc, en particulier, toutes les lignes sont des tableaux, et la forme d'un tableau est une partition dont la hauteur est la longueur de la première colonne.

Par exemple : le mot cbbcdaabb est un tableau dont l'écriture plane est

$$\begin{array}{llll} c & & & \\ b & b & c & d \\ a & a & b & b \end{array}$$

(et la forme, la partition 144). Le mot bccbbaabb n'est pas un tableau à cause de sa forme (324) et il en est de même de ccbccaabb bien que sa forme (234) soit une partition, parce que sa troisième ligne (cc) n'est pas minorée par la seconde (bcc).

C'est un résultat classique (dont nous ne ferons pas usage) que la fonction de Schur $s(J)$, sur les variables de A , est la somme des images commutatives de tous les tableaux de forme J .

Par exemple, pour $A = \{a < b < c\}$, $J = 12$, il y a 8 tableaux possibles:

$$\begin{array}{l} b \\ a\ a \end{array} ; \begin{array}{l} c \\ a\ a \end{array} ; \begin{array}{l} b \\ a\ b \end{array} ; \begin{array}{l} c \\ a\ b \end{array} ; \begin{array}{l} b \\ a\ c \end{array} ; \begin{array}{l} c \\ a\ c \end{array} ; \begin{array}{l} c \\ b\ b \end{array} ; \begin{array}{l} c \\ b\ c \end{array}$$

et l'on obtient donc $s(12) = 2abc + \sum x^2 y$, où la sommation est étendue à toutes les paires de lettres distinctes $x , y \in A$.

Nous aurons besoin par contre de l'énoncé suivant qui est lui aussi bien connu [7], et dont la preuve est donc omise.

THÉORÈME 2.2. - <u>Soit</u> $\equiv$ <u>la congruence sur</u> A^* , <u>définie par les relations</u>

$$xzy \equiv zxy \quad \underline{\text{et}} \quad zty \equiv tzy$$

<u>pour toutes les lettres</u> $x \leq y < z \leq t$ <u>de</u> A .

<u>Il existe une surjection</u> R <u>de</u> A^* <u>sur l'ensemble</u> T <u>des tableaux telle que,</u> <u>si</u> $w \in A^*$ <u>et</u> $t \in T$, <u>on ait</u> $tR = t$; $wR \equiv w$; $wR \equiv t$ <u>si, et seulement si,</u> $wR = t$.

Autrement dit, T est une section de la congruence $\equiv$, et R est l'opérateur de redressement associé. On notera que R préserve les multidegrés.

<u>Remarque</u> 2.3. - Soient $v = v_1 v_4$, $u = u_1 u_2 u_3$, deux lignes dans lesquelles u_1 (resp. $u_1 u_2$) est le plus long facteur gauche de u minorant le facteur gau-

che de même longueur v_1 (resp. un facteur droit) de v .

Le redressé $(vu)R$ est un tableau $\overline{\overline{vu}}$ dont les lignes sont $\bar{v} = v_1\ g$ et $\bar{u} = u_1\ fu_3$ avec $|g| = |u_2|$, $|f| = |v_4|$, et g un sous-mot de v_4 .

Si $vu \neq \overline{\overline{vu}}$, et si $v_1'\ u'$ est une autre paire de lignes telle que

$$v'u' \neq (v'u')R = \overline{\overline{vu}} ,$$

on a

$$v' = v_1\ v'' \quad \text{et} \quad u' = u_1\ u'' ,$$

et u_1 est le plus long facteur gauche de u' minorant un facteur gauche de même longueur de v' .

Soit par exemple $v = bbcc$, $u = abcd$. On a

$$u_1 = a\ ;\ u_2 = b\ ;\ u_3 = cd\ ;\ v_1 = b \quad \text{et} \quad vuR = \begin{matrix} b\ c & \\ a\ b & bccd \end{matrix} .$$

Les paires (v', u') satisfaisant les conditions de la remarque sont $(bbcccd , ab)$, $(bbccc , abd)$ et $(bbc , abccd)$.

Remarque 2.4. - Soient u une ligne, et $t = t_h\ t_{h-1} \dots t_2\ t_1$ la factorisation en lignes d'un tableau t de hauteur h . Le tableau $s = (tu)R$ a une hauteur $h' = h$ ou $h + 1$, et ses lignes successives s_i sont définies par les équations

$$(t_i\ v_i)R = v_{i+1}\ s_i\ , \quad v_{i+1} \text{ est une ligne,}$$

avec $v_1 = u$.

Par exemple, si

$$t = \begin{matrix} b\ c\ c & \\ a\ b\ bd \end{matrix} \quad \text{et} \quad u = ab ,$$

on trouve successivement $v_2 = bd$ et $s_1 = aabb$; $v_3 = c$ et $s_2 = bbcd$; $v_4 = 1$; $s_3 = c$. Le tableau s est donc le tableau $s_3\ s_2\ s_1$ donné plus haut en exemple.

Il est clair que $tu = s$ quand u minore la première ligne t_1 de t .

Nous isolons aussi la remarque suivante.

Remarque 2.5. - Si $|u| \geqslant |t_1|$, et $tu \neq (tu)R = s$, on a $|s_1| > |u|$ où s_1 est la première ligne du tableau s .

En effet, posant $t_1 = v$, et utilisant les notations de la remarque 2.3, on a

$$s_1 = u_1\ fu_3 ,$$

où $|f| = |v_4| = |v| - |u_1|$ est aumoins égal à $|u_2\ u_3|$ puisque $|u| \geqslant |v|$ par hypothèse, et où $|u_3| > 0$ puisque tu , donc $t_1\ u$, est supposé ne pas être un tableau.

3. Formule de Pieri ; suites exactes.

Soient J une partition de poids $n - m \geqslant 0$, et $m \geqslant 0$.

Définition 3.1. - $J \otimes m$ est l'ensemble des partitions H de poids n telles que

$$\ldots \leqslant 3H \leqslant 2J \leqslant 2H \leqslant 1J \leqslant 1H \; .$$

Par exemple si $J = 123$, et $m = 2$, cet ensemble est constitué par les 7 partitions

$$125 \; ; \; 134 \; ; \; 224 \; ; \; 233 \; ; \; 1124 \; ; \; 1133 \; ; \; 1223 \; .$$

C'est celui des formes des diagrammes de Ferrer, obtenus à partir de celui de J en ajoutant un point à m de ses colonnes. Donc, de façon équivalente, $J \otimes m$ est l'ensembles des formes des tableaux qui se déduisent d'un tableau arbitraire de forme J par l'adjonction de m occurences d'une nouvelle lettre plus grande que toutes celles qui y figurent déjà. Réciproquement, si H est la forme d'un tableau t' , dont z est la plus grande lettre, et $m = |t'|_z$, la restriction de t' à $A \backslash z$ est un tableau t dont la forme J est telle que $H \in J \otimes m$.

THÉORÈME 3.2 (<u>Formule de Pieri</u>). - <u>Si</u> t <u>est un tableau de forme</u> J , <u>et</u> u <u>une ligne de longueur</u> m , <u>les formes de</u> $(tu)R$ <u>et</u> $(ut)R$ <u>appartiennent à</u> $J \otimes m$.

Réciproquement, si t' est un tableau dont la forme est dans $J \otimes m$, il existe une, et une seule, paire (t , u) constituée d'un tableau t de forme J , et d'une ligne u telle que $(tu)R = t'$; il en est de même pour l'équation $(ut)R = t'$.

Soit $n \geqslant 0$ donné. Nous désignons par M l'ensemble des paires (H , m) , où $m \leqslant n$ est un entier naturel et H une partition de $n - m$. On distingue le sous-ensemble $\bar{M}$ des paires telles que $m + 1 = 1H$, et on note M' son complément. Ce dernier contient le sous-ensemble M^0 des paires (H , m) telles que $m \geqslant 1H$.

<u>Définition</u> 3.3. - La <u>suite définie par la paire</u> $(H , m) \in M^0$ est celle des paires $(H^d , m_d) \in M$ $(d = 0 , 1 , \ldots)$ telles que $(H^0 , m_0) = (H , m)$, et pour $d \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} m_d &= dH - d \geqslant 0 \\ kH^d &= (k - 1)H - 1 \quad \text{pour} \quad k \leqslant d \; , \\ kH^d &= kH \qquad\qquad\;\; \text{pour} \quad k > d \; , \end{aligned}$$

Par exemple, la suite définie par $m = 12$; $H = (2 , 4 , 6 , 6 , 9 , 9)$ est formée de (H , m) lui-même et des quatres paires suivantes correspondant à $d = 1 , 2 , 3 , 4$. Il n'en existe pas d'autre puisque $dH - d$ est négatif pour $d \geqslant 5$

$$(2 , 4 , 6 , 6 , 9 , 13 \; ; 8)$$

$$(2 , 4 , 6 , 6 , 10 , 13 \; ; 7)$$

$$(2 , 4 , 6 , 10 , 10 , 13 \; ; 3)$$

$$(2 , 4 , 7 , 10 , 10 , 13 \; ; 2)$$

LEMME <u>d'exactitude</u> 3.4 (cf. [3]). - <u>L'ensemble des suites, définies par les</u>

$(H\ ,\ m)$ de $\underset{\sim}{M}^0$, est une partition de $\underset{\sim}{M}' = \underset{\sim}{M} \setminus \bar{\underset{\sim}{M}}$.

Pour tout $(H^d\ ,\ d)$, où $d \geqslant 1$, on a

$$m_d < dH^{d-1} = (d+1)H - 1 < dH^d \ ,$$

et chaque élément de $X_d = H^d \otimes m_d$ est contenu dans un des deux ensembles analogues X_{d-1} et X_{d+1} . L'ensemble X_0 est contenu dans X_1 .

Preuve. - Soit $(K\ ,\ m')$ dans $\underset{\sim}{M}$. On lui associe la séquence de nombres formée de $m' + n = OK'$ et des n entiers naturels $jK + n - j$ $(j = 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ n)$. Comme K est une partition, cette séquence est strictement décroissante à partir de son deuxième terme.

Son premier terme $m' + n$, égal à un autre si, et seulement si, $(K\ ,\ m')$, appartient au sous-ensemble exceptionnel $\bar{M}$.

Dans le cas contraire, il existe un $d \geqslant 0$ (unique !) tel que la séquence obtenue en insérant $m' + n$ entre le d-ième et le $(d + 1)$-ième terme soit strictement décroissante. Elle devient alors la séquence déduite d'une paire $(H\ ,\ m)$ de M^0 , et on vérifie que $(K\ ,\ m')$ est le d-ième terme $(H^d\ ,\ m_d)$ de la suite définie par $(H\ ,\ m)$.

Réciproquement, cette construction redonne bien $(H\ ,\ m)$ quand on part du d-ième terme de la suite définie par un $(H\ ,\ m) \in M^0$, ce qui achève la preuve de la première partie de l'énoncé.

Les inégalités suivantes résultent des définitions puisque l'on a

$$m_d = dH - d < dH^{d-1} = dH = (d+1)H^{d+1} - 1 < dH^d = (d-1)H + 1 \ .$$

Considérons pour finir un élément J de X_d . D'après les inégalités précédentes, on a

$$(d+1)H \leqslant dJ \leqslant (d-1)H + 1$$

en raison de la définition même de X_d . Tenant compte de ce que la suite des valeurs de $H^{(d-1)}$ (resp. H^{d+1}) ne diffère de celle de H^d que pour d (resp. pour $d + 1$), on voit que J appartient à X_{d-1} si, et seulement si, $dJ \leqslant dH$, et à X_{d+1} si, et seulement si, au contraire $dH + 1 \leqslant dJ$.

Q. E. D.

Soient I' une partition fixe de n , et $r = 1I'$. Rappelant que a est la première lettre de l'alphabet, on associe à chacune des paires $(H\ ,\ m)$ de M , considérées ci-dessus, l'ensemble $W(H)$ des mots tu de multidegré I' tels que t soit un tableau de forme H , et u une ligne : $|u| = m$, $|u|_a = r$.

On distingue, dans l'union W des $W(H)$, le sous-ensemble $\bar{W}$ de ceux pour lesquels $m + 1 = 1H$ et son complément $W' = W \setminus \bar{W}$.

Soit $w \in W'$. D'après la première partie du lemme d'exactitude, il appartient à un (et un seul) ensemble $W(H^d)$. Si, et seulement si, $wR = w$ (ce qui ne peut se produire que pour $d = 0$), ce mot est un tableau, et nous notons $w \in W^T$. Dans le cas contraire, la formule de Pieri indique que la forme du mot redressé wR appartient à $X_d = H^d \otimes m_d$ et, d'après la dernière partie du lemme, elle appartient aussi à exactement un des deux ensembles X_{d-1} et X_{d+1}, ce que nous dénotons respectivement par $w \in W_-$ ou $w \in W_+$. En particulier, d'après la remarque 2.5, on a $w \in W_+$ quand $d = 0$.

Au total, les quatre sous-ensembles $\bar{W}$, W^T, W_-, W_+ constituent une partition de W.

PROPRIÉTÉ 3.5. - La relation $wR = w'R$ définit une bijection θ de W_+ sur W_-.

Preuve. - Supposons que $w = tu$ appartient à $W(H^d)$ et à W_+. D'après la formule de Pieri et le lemme d'exactitude, il existe une paire (t', u') unique telle que $wR = (t'u')R$, t' est un tableau de forme H^{d+1}, et u' est une ligne de longueur m_{d+1}. Il suffit de montrer que a^r est un facteur gauche de u' pour prouver que $w' = t'u' = w\theta$ appartient à $W(H^{d+1})$.
Soient $t_h \dots t_1$ et $t'_{h'} \dots t'_1$ les factorisations en lignes de t et de t'. D'après les inégalités indiquées dans le lemme précédent, on a

$$h = h' \quad \text{et} \quad |t_j| = |t'_j| \quad \text{pour tout} \quad j \geqslant d+1 .$$

Nous effectuons le calcul de tableau $s = (tu)R = (t'u')R$ comme dans la remarque 2.4, mais en nous arrêtant au d-ième pas.

On trouve, pour $(tu)R$, que

$$s = (\bar{t}v_{d+1})R.s_d\ s_{d-1} \dots s_1 ,$$

où $\bar{t}$ est le tableau $t_h \dots t_{d+1}$, et une expression analogue, avec $\bar{t}'$ et v'_{d+1} pour $s = (t'u')R$. Comme on doit avoir

$$(\bar{t}v_{d+1})R = s_{h'} \dots s_{d+1} = (\bar{t}'v'_{d+1})R$$

et que $\bar{t}$ et $\bar{t}'$ ont la même forme, la formule de Pieri montre que, de fait, $\bar{t} = \bar{t}'$ et $v_{d+1} = v'_{d+1}$.

Observons maintenant que le plus long facteur gauche u_1, de u qui minore un facteur gauche de même longueur de la première ligne de t, admet lui-même a^r comme facteur gauche et que par conséquent $|u_1| \geqslant r$.

Par induction sur $j = 1, 2, \dots, d$ on déduit de la remarque 2.3 qu'il en est de même pour la paire de ligne (v_{d+1}, s_d), puis par induction sur $j = d,\dots,2,1$ que chaque ligne v'_j a le même facteur gauche de longueur $|u_1|$ que v_j. Comme $v'_1 = u'$ et $v_1 = u$, ceci établit la propriété cherchée.

Par conséquent, θ est une injection de W_+ dans W_-. Un raisonnement analogue s'applique au cas où $w \in W_-$ et montre que cet ensemble est l'image de W_+ par θ.

Q. E. D.

4. Preuve de la conjecture de Foulkes.

Quand t est un tableau, on peut sans inconvénient noter $s(t)$ la fonction de Schur $s(\|t\|)$, où $\|t\|$ est la forme de t puisque celle-ci est une partition. Cette convention s'étend à tous les mots w de A^* , mais nous n'en aurons besoin que dans le cas où $w = tv$, avec t un tableau de forme K , et v une ligne de longueur $m' = n - |t|$. Supposant que $|w| = n$ et que, par conséquent, $(K , m') \in M$, on a alors :

$$s(w) = s(K , m') = 0 \quad \text{si} \quad m' + 1 = 1K ,$$

$s(w) = s(K , m') = (-1)^d\, s(H')$, si (K , m') , est le d-ième terme (H^d , m_d) de la suite définie en 3.3 (à partir de (H , m)).

Soient encore I' une partition fixe de n , $r = 1I'$, et I la partition de $n - r$ telle que $iI = (i + 1)I'$ identiquement. Nous nous basons sur la formule remarquable suivante, due à A. O. MORRIS [6].

LEMME 4.1.

$$Q(I') = \sum F(I , J)\, q^{m'-r}\, s(K , m') ,$$

où la sommation est étendue à l'ensemble E des triples (K , m' , J) tels que $(K , m') \in M$, $m' \geqslant r$, et $J \in K \otimes (m' - r)$.

Dans la section suivante, on définira une application $\nu : T \longrightarrow \underset{\sim}{N}$ (la charge), dont les propriétés utilisées ici sont rassemblées dans la proposition (5.6).

THÉORÈME 4.2. - Pour toute partition I ,

$$Q(I) = \sum q^{t\nu}\, s(t) ,$$

où la sommation est étendue à tous les tableaux t de multidegré I .

Preuve. - Procédant par induction, on peut supposer le théorème établi pour $n - r$, et le lemme de Morris devient

$$Q(I') = \sum q^{t'\nu}\, q^{m'-r}\, s(K , m') ,$$

où la sommation cette fois est sur les mêmes triples (K , m' , J) de E , et pour chacun d'eux sur tous les tableaux t' de multidegré I et de forme J .

D'après la formule de Pieri, il correspond à chaque t' exactement une paire (t , v) telle que $(vt)R = t'$, t est un tableau de forme K , et v une ligne. Réciproquement, chaque semblable paire (t , v) définit un triple $(K = \|t\|$, $m' = |v|$, $J = \|(vt)R\|)$ de E défini au lemme 4.1 et un tableau $t' = (vt)R$.

On peut supposer que tous ces tableaux sont sur l'alphabet $A\backslash a$ et on obtient enfin

$$Q(I') = \sum q^{(vt)R\nu}\, q^{|v|}\, s(ta^r\, v) = \sum q^{(ta^r v)\nu}\, s(ta^r\, v)$$

où les sommations sont cette fois sur tous les mots $w = ta^r\, v = tu$ de l'ensemble W défini dans la section précédente, et où la deuxième égalité résulte de l'équation

$$(vt)R\nu + |v| = (ta^r\, v)\nu \ ,$$

donnée dans la proposition.

On a partitionné W en quatre ensembles à savoir, $\bar{W}$, W_+ , W_- , et l'ensemble W^T des w qui sont des tableaux.

D'après les conventions d'indexation des fonctions de Schur, la somme relative à $\bar{W}$ est nulle ; d'après ces mêmes conventions et l'existence de la bijection $\theta : W_+ \longrightarrow W_-$, il en est de même de la somme des deux suivants puisque w et $w\theta$ ont même charge (cf. Prop. 5.6). Par conséquent, $Q(I')$ se réduit à la somme sur W^T .

Q. E. D.

5. Charge.

Soient I une partition de n , A^{*I} l'ensemble des mots de multidegré I , et $\Gamma = \{\alpha < \dots\}$ un second alphabet ordonné.

Définition 5.1. Un ordonnancement d'un mot w de A^{*I} est un mot $\bar{w}$ de $(A \times \Gamma)^*$ de même longueur tel que

1° $\bar{w}$ est envoyé sur w par la projection de $(A \times \Gamma)^*$ sur A^* ;

2° Il existe un intervalle initial F de l'ensemble ordonné $A \times \Gamma$ tel que chaque lettre de F apparaisse exactement une fois dans $\bar{w}$.

Il est clair que F est isomorphe au diagramme de Ferrer de I . Il ne dépend donc pas du choix du mot w dans A^{*I} , ni de son ordonnancement. Le multidegré de la projection de $\bar{w}$ sur Γ^* est la partition adjointe $\tilde{I}$ de I .

Par exemple, si $I = 1223$ et $w = bdacbaabc$, un des ordonnancements possibles de w serait

$$b\beta.d\alpha.a\gamma.\overline{c\beta}.\overline{b\gamma}.a\alpha.a\beta.\overline{b\alpha}.\overline{c\alpha} \ ,$$

et F peut être représenté par

$$\begin{array}{lll} d\alpha & & \\ c\alpha & c\beta & \\ b\alpha & b\beta & \\ a\alpha & a\beta & a\gamma \ . \end{array}$$

Nous appellerons filière ζ d'un ordonnancement $\bar{w}$ le sous-mot formé des lettres dont la deuxième composante est la lettre ζ . Par exemple, la filière β est le sous-mot bca de support $\{1 , 4 , 7\}$.

Si x est une lettre de A (ou de Γ), nous désignons par x_+ (resp. x_-) son successeur (resp. prédecesseur) dans le même alphabet.

Définition 5.2. - Soit $y\eta \in F$ une lettre d'un ordonnancement $\bar{w}$. Elle est forte si, et seulement si, elle se trouve à droite de la lettre $y_-\eta$, et sa charge $(y\eta)\nu$ est le nombre des lettres fortes $y'\eta$, $y' \leq y$, de la filière η . La charge de $\bar{w}$ est la somme des charges des lettres. De façon équivalente, $y\eta$ est forte si, et seulement si, $\bar{w}$ a le sous-mot $y\eta . y_{\_}\,\eta$.

Dans l'exemple précédent, les lettres fortes sont soulignées et la table ci-dessous (indexée par les lettres de A et de Γ) donne leur charge ; celle de $\bar{w}$ est donc 7 :

$$\begin{array}{ccc} 2 & & \\ 2 & 1 & \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

PROPRIÉTÉ 5.3. - Le mot $w \in A^{*I}$ possède un ordonnancement unique, son relèvement $\bar{w}$, caractérisé par les conditions suivantes, pour chaque $y \in A$ et $\theta \in \Gamma$, où $x = y_{\_}$, $\eta = \theta_{\_}$ et où a est la première lettre de A .

1° $\bar{w}$ n'a pas de sous-mot $a\eta . a\theta$.

2° $\bar{w}$ n'a pas de sous-mot

$$y\eta . y\theta . x\eta \ , \quad y\theta . x\eta . y\eta \ , \ \text{ni} \quad x\eta . y\eta . y\theta \ .$$

Preuve. - La condition 1° signifie que le sous-mot des occurences de a dans $\bar{w}$ est

$$\ldots a\gamma . a\beta . a\alpha \ .$$

Supposons par recurrence que l'on ait existence et unicité pour un intervalle initial de F contenant $x\theta$, $y\eta$, mais non $y\theta$. La condition 2° est satisfaite si l'on prend pour $y\theta$ la première occurence d'un y à gauche de $x\theta$, qui n'est pas encore affectée à une filière, si une telle occurence existe, et sinon la première occurence d'un y non encore affectée en lisant w à partir de la droite.

Définition 5.4. - La charge $w\nu$ d'un mot w est celle de son relèvement.

Le relèvement du même mot w que ci-dessus peut être obtenu par les affectations successives suivantes :

$$b.d.a\gamma.c.b.a\beta.a\alpha.b.c \ ,$$

$$b\beta.d.a\gamma.c.b\alpha.a\beta.a\alpha.b\gamma.c \ ,$$

et enfin,

$$\bar{w} = b\beta.d\alpha.a\gamma.c\alpha.b\alpha.a\beta.a\alpha.\underline{b\gamma}.\underline{c\beta} \ .$$

La fonction charge est donnée par

$$\begin{array}{ccc} 0 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

et la charge de w est donc 2 .

On remarquera que lorsque $iI \leqslant 1$ identiquement, c'est-à-dire quand w est une permutation de son alphabet, sa charge est simplement son "Indice du Major" (cf. [8]).

On peut montrer que la charge d'un mot (définie par son relèvement) n'est jamais plus grande que celle définie par un autre ordonnancement et que l'on a identiquement $(x\eta)\nu \leqslant (x\eta_+)\nu$, c'est-à-dire que la fonction charge ν , associée au relèvement, est croissante (l. s.) sur F .

Ces remarques ne seront pas utilisées ici, et les preuves omises.

PROPRIÉTÉ 5.5. - Deux mots w , w' congrus mod $\equiv$ (cf. section 2) ont même charge.

Preuve. - Il suffit d'établir le résultat quand ces mots ne diffèrent que par l'une des relations élémentaires de commutation.

Soient donc $x \leqslant y < z \leqslant t$ des lettres, et d'abord $w = uxzyv$; $w' = uzxyv$, le relèvement de $\bar{w}$ étant $\bar{u}.x\xi.z\zeta.y\eta.\bar{v}$. Il résulte immédiatement de la propriété 5.3 que celui de w' est $\bar{u}.z\zeta.x\xi.y\eta.\bar{v}$ quand $z \neq x_+$ ou quand $\zeta < \xi$, les lettres fortes étant les mêmes. Maintenant si $z = x_+$ on a $y = x$ puisque $x \leqslant y < z$. De nouveau d'après la propriété 5.3, on en conclut que $\eta < \xi$, avec $\zeta \leqslant \eta$. Donc $\zeta < \xi$, ce qui établit le résultat.

Soient maintenant $w = uztyv$, $w' = uzytv$ et $\bar{w} = \bar{u}z\zeta.t\tau.y\eta.\bar{v}$.

On vérifie que si $t \neq y_+$ ou si $\tau < \eta$, le relèvement de w' ne diffère de celui de w que par l'échange des lettres $y\eta$ et $t\tau$. Supposons donc $t = y_+$, ce qui implique $z = t$, et $\tau \geqslant \eta$. On en déduit que $\zeta \geqslant \tau = \eta$ c'est-à-dire que $\bar{w} = \bar{u}.t\zeta.t\eta.y\eta.\bar{v}$ avec $\zeta > \eta$, et on trouve $\bar{w}' = \bar{u}.t\eta.y\eta.t\zeta.\bar{v}$ avec les mêmes lettres fortes.

Q. E. D.

Autrement dit, l'application charge passe au quotient :

$$\nu : \quad A^* \longrightarrow A^*/\equiv \longrightarrow \underset{\sim}{N} .$$

PROPRIÉTÉ 5.6. - Si $w = ta^r v \in A^{*I}$, où $r = |w|_a > 0$, on a

$$w\nu - |v| = (vta^r)\nu = (vt)\nu = (vt)R\nu .$$

Preuve. - La dernière égalité résulte du théorème précédent, et la précédente de ce que l'hypothèse $|w|_a = r \geqslant |w|_b$ entraîne que les différentes occurences des b soient les mêmes dans les relèvements de w et de vt , et qu'aucune d'elles ne soit forte. Pour établir la première relation, il suffit par induction sur $|v|$ de vérifier que

$$(xta^r\, v')\nu - 1 = (ta^r\, v'x)\nu$$

quand x est une lettre $\neq a$. Notant que la règle 2° définissant les relèvements, est invariante par permutation circulaire, on voit que les relèvements de $xta^r\,v'$ et $ta^r\,v'x$ ne diffèrent que par le passage d'une lettre $x\zeta$ de la première à la dernière place. Comme $x\zeta$ est nécessairement non forte pour $xta^r\,v'$ et forte pour l'autre mot, le résultat est établi.

Q. E. D.

6. Tableaux extrémaux.

On note $T(I , J)$ l'ensemble des tableaux de multidegré I , et forme J , où I et J sont deux partitions du même entier n .

Si h est la hauteur de I , et si z est la h-ième lettre de l'alphabet, on voit facilement, au moyen de l'écriture plane des tableaux, qu'à chaque tableau t de $T(I , J)$ correspond un autre tableau, noté t^- , obtenu en effaçant dans t les hI occurences de z ; ainsi qu'on l'a vu précedement, la forme H de t^- satisfait la relation $J \in H \otimes hI$. Comme les occurences de z doivent être dans des colonnes différentes, il existe un plus grand indice r pour lequel $rJ \geqslant hI$, et nous dirons que les z sont en position extrémale dans t si, et seulement si, H est la partition définie par :

$$iH = iJ \qquad \text{pour } i \leqslant r - 1 ;$$

$$rH = (r + 1)J + rJ - hI ;$$

$$iH = (i + 1)J \quad \text{pour } i \geqslant r + 1 ;$$

Ceci permet de définir la famille des tableaux extrémaux comme la plus petite famille E contenant le tableau vide, et chaque tableau t tel que, d'une part, ses dernières lettres sont en position extrémale et, d'autre part, le tableau t^- , obtenu en effacant celles-ci, est lui-même dans E .

Par exemple, la dernière lettre d est en position extrémale dans les deux tableaux

$$t = \begin{array}{cccc} d & & & \\ b & b & c & d \\ a & a & a & c \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cccc} d & & & \\ b & c & c & d \\ a & a & a & b \end{array}$$

mais seul le second de ceux-ci est dans E , car c n'est pas en position extrémale dans t^- .

On rappelle que la relation d'ordre naturel entre partitions (de même poids) est définie par

$$J \leqslant I \text{ si, et seulement si, } iJ^{\Sigma} \leqslant iI^{\Sigma} \text{ pour tout } i \geqslant 1 .$$

6.1. - L'ensemble $T(I , J)$ est non vide si, et seulement si, $J \leqslant I$ ou, de façon équivalente, si, et seulement si, $T(I , J)$ contient un tableau extrémal. Supposant ces conditions remplies, ce tableau t est unique et sa charge est égale à $1I^{\Sigma\Sigma} - 1J^{\Sigma\Sigma}$.

Preuve. - Elle se fait par induction sur la hauteur h de I . En ce qui concerne la première assertion, il suffit de vérifier que I , J étant donnés, la forme H , décrite plus haut, est minimale (pour l'ordre naturel) parmi les partitions H' de poids $n - hI$ telles que $J \in H' \otimes hI$.

En ce qui concerne la seconde, il est clair que chaque ensemble $T(I , J)$ non vide contient au plus un tableau extrémal t . Toujours par induction sur h , on vérifie d'abord que dans son redressement les attributions des occurences de la dernière lettre z aux filières $\alpha < \beta < \ldots$ sont effectuées par ordre croissant en lisant les lignes de haut en bas et chaque ligne de droite à gauche. Ensuite que la charge de chacune de celles-ci est égale à la différence entre son rang h dans l'alphabet et l'indice de la ligne où se trouve cette occurence. Il en résulte facilement que la somme des charges est égale à la somme de $iI^{\Sigma} - iJ^{\Sigma}$ sur tous les $i \geqslant 1$.

Q. E. D.

Ce calcul est illustré par le tableau extrémal suivant :

$$\begin{array}{llll} d\alpha 0 & & & \\ c\alpha 0 & & & \\ b\beta 0 & b\alpha 0 & c\beta 1 & d\beta 2 \\ a\gamma 0 & a\beta 0 & a\alpha 0 & b\gamma 1 \end{array}$$

$$I = (2 , 2 , 3 , 3) \; ; \quad I^{\Sigma} = (2 , 4 , 7 , 10) \; ;$$

$$J = (1 , 1 , 4 , 4) \quad J^{\Sigma} = (1 , 2 , 6 , 10) \; ;$$

$1I^{\Sigma\Sigma} - 1J^{\Sigma\Sigma} = 1 + 2 + 1 = 4$ qui est bien égal à la charge du tableau.

Nous rappelons que le polynôme de Foulkes $F(I , J)$ est la somme de $q^{t\nu}$ sur tous les tableaux t de $T(I , J)$. Il est donc nul sauf si $J \leqslant I$.

PROPRIÉTÉ 6.2. - Supposant $J \leqslant I$, le polynôme de Foulkes est monique de degré $1I^{\Sigma\Sigma} - 1J^{\Sigma\Sigma}$.

Preuve. - Il suffit de montrer que la charge du tableau extrémal de $T(I , J)$ est strictement plus grande que celle de tout autre tableau de ce même ensemble. Comme précédement, nous supposons ce résultat prouvé pour les partitions de hauteur strictement inférieure à celle de I .

Le tableau extrémal t est le produit d'un tableau t_1 et de sa première ligne ; cette dernière a la forme $a^s u$, où $s = 1I$, et où u est une ligne de longueur $|u| = 1J - 1I$. Soient J_1 la forme de t_1 , et I_2 la partition de $n - s$ qui est le multidegré du tableau $t_2 \equiv ut_1$.

D'après 5.6, la charge de t_2 est égale à $t\nu - |u| = c$ et, comme on le sait, sa forme appartient à $J_1 \otimes |u|$. On voit que cet ensemble contient une partition minimale unique K définie par

$$1K = 1J_1 + |u| \quad (= 2J + |u|)$$

$$iK = iJ_1 \quad (= (i + 1)J) \quad \text{pour } i \geqslant 2 ,$$

et on calcule facilement que la différence $1I_2^{\Sigma\Sigma} - 1K^{\Sigma\Sigma}$ est précisément égale à c .

Utilisant l'hypothèse d'induction, on en conclut que t_2 est le tableau extrémal de l'ensemble $T(I_2 , K)$.

Considérons maintenant un autre tableau t' de $T(I , J)$. On a encore $t' = t'_1 a^s u'$, où t'_1 est un tableau de forme J_1 , et u' une ligne de même longueur que u ; le multidegré du tableau $t'_2 \equiv u't'_1$ est encore I_2 , sa charge est $t'\nu - |u|$, et sa forme K' est contenue dans $J_1 \otimes |u|$.

En raison du caractère extrémal de K , on a

$$t\nu - |u| > t'\nu - |u| \quad \text{quand} \quad K' \neq K$$

et, dans le cas contraire, la même inégalité est satisfaite en raison de l'hypothèse d'induction. Q. E. D.

RÉFÉRENCES

[1] FOULKES (H. O.). - A survey of some combinatorial aspectsof symmetric functions, "Permutations", p. 79-92. - Paris, Gauthier-Villars, 1974.

[2] GREEN (J. A.). - The characters of the finite general linear groups, Trans. Amer. math. Soc., t. 80, 1955, p. 402-447.

[3] LASCOUX (A.). - Polynômes symétriques, foncteurs de Schur et grassmanniennes, Thèse Sc. math., Paris 1977.

[4] LITTLEWOOD (D. E.). - The theory of groups characters, 2nd edition. - Oxford, Clarendon Press, 1950.

[5] MORRIS (A. O.). - A survey on Hall-Littlewood functions and their applications to representation theory, "Combinatoire et représentation du groupe symétrique [1976. Strasbourg]", p. 136-154. - Berlin, Springer-Verlag, 1977 (Lecture Notes in Mathematics, 579).

[6] MORRIS (A. O.). - The characters of the group $Gl(n , q)$, Math. Z., t. 81, 1963, p. 112-123.

[7] SCHÜTZENBERGER (M. P.). - La correspondance de Robinson, "Combinatoire et représentation du groupe symétrique [1976. Strasbourg]", p. 59-113. - Berlin, Springer-Verlag, 1977 (Lecture Notes in Mathematics, 579).

[8] THOMAS (G. P.). - Further results on Baxter sequences and generalized Schur functions, "Combinatoire et représentation du groupe symétrique [1976. Strasbourg]", p. 155-167. - Berlin, Springer-Verlag, 1977 (Lecture Notes in Mathematics, 579).

(Texte reçu le 20 février 1978)

NOTE [ajoutée en septembre 1978]. - La présentation donnée ici fait partie d'un travail plus général réalisé en collaboration avec Alain LASCOUX. Les résultats ont été annoncés dans une note aux Comptes rendus :

LASCOUX (A.) et SCHÜTZENBERGER (M.-P.). - Sur une conjecture de H. O. Foulkes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 286, 1978, Série A, p. 323-324.

Marcel P. SCHÜTZENBERGER
97 rue du Ranelagh
75016 PARIS