

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

GEORGES GRISO

Équirépartition et zéros de la fonction zêta

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 19, n° 2 (1977-1978),
exp. n° 23, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1977-1978__19_2_A1_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉQUIRÉPARTITION ET ZÉROS DE LA FONCTION ZÊTA

par Georges GRISO

(d'après E. HLAWKA [1])

Soit $(\rho_n) = (\beta_n + i\gamma_n)$ la suite des zéros de la fonction zêta de Riemann (suite ordonnée $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_n \dots$). RADEMACHER a démontré ([3], p. 454-455), en utilisant la conjecture de Riemann, que, pour tout entier positif z , la suite $(1/2\pi)\gamma_n \log z$ est équirépartie modulo 1 (le cas $z = q^k$ ($k \in \mathbb{Z}$, q premier) est particulièrement intéressant).

La démonstration de RADEMACHER s'appuie sur le résultat de LANDAU [2] : Pour tout réel $x > 1$, $x = q^k$ (q premier),

$$(1) \quad \sum^* x^{\rho_n} = -\frac{T}{2\pi} \log q + o(\log T),$$

et, quand x n'est pas une puissance d'un nombre premier,

$$(2) \quad \sum^* x^{\rho_n} = o(\log T), \text{ où } \sum^* = \sum_{0 < \gamma_n \leq T}$$

(L'estimation du 0 ne dépend que de x). Quand $0 < x < 1$ ou quand $x = q^{-k}$ ($k \geq 1$, q premier), on doit multiplier le premier membre de (1) et (2) par x pour obtenir un résultat analogue.

On va montrer maintenant que le résultat de RADEMACHER est encore vrai sans utiliser l'hypothèse de Riemann. Pour cela on utilise un résultat de SELBERG ([4], théorème 9.24) $\sum^* |\beta_n - (1/2)| = o(T)$, et l'estimation de $N(T)$ [4] :

$$N(T) = \sum_{0 < \gamma_n \leq T} 1 = \frac{T \log T}{2\pi} + o(T).$$

Alors, il suit de (1) et (2) :

$$\frac{1}{N(T)} \sum^* x^{\rho_n} = o\left(\frac{1}{\log T}\right).$$

D'autre part, nous avons $|\beta_n| < 1$ et

$$(3) \quad |x^{1/2} - x^\beta| \leq x^\beta \log x \left| \beta - \frac{1}{2} \right| \leq x \log x \left| \beta - \frac{1}{2} \right|, \text{ pour } |\beta| < 1.$$

Donc

$$|\sum^*(x^{(1/2)+i\gamma_n} - x^{\beta_n+i\gamma_n})| \leq \sum^* |x^{1/2} - x^{\beta_n}| \leq x \log x \sum^* \left| \beta_n - \frac{1}{2} \right| = o(T),$$

ce qui entraîne

$$\frac{1}{N(T)} \sum^* x^{(1/2)+i\gamma_n} = o\left(\frac{1}{\log T}\right) \text{ et } \frac{1}{N(T)} \sum^* x^{i\gamma_n} = o\left(\frac{1}{\log T}\right).$$

Soit maintenant z réel (> 1). On pose $x = z^h$ ($h \geq 1$), alors il s'ensuit, d'après ci-dessus et le critère de Weyl ($e(\alpha) = \exp 2i\pi\alpha$), que, pour la suite

$\xi(z) = (\xi_n(z)) = ((1/2\pi)\gamma_n \log z)$, on a :

$$\frac{1}{N(T)} \sum^* e(h\xi_n) = O\left(\frac{1}{\log T}\right), \text{ avec } 0 < \gamma_n \leq T,$$

d'où la suite $\xi(z)$ est équirépartie modulo 1.

En dimension s ($s \geq 2$), nous avons

$$\xi(z) = (\xi_n^1, \dots, \xi_n^s), \quad \xi_n^j = \frac{1}{2\pi} \gamma_n \log z_j, \quad z = (z_1, \dots, z_s),$$

avec z_1, \dots, z_s multiplicativement indépendants.

On pose, pour tout $(h_1, \dots, h_s) \neq (0, \dots, 0)$, $x = z_1^{h_1} \cdot z_2^{h_2} \cdot \dots \cdot z_s^{h_s}$.
On a $x \neq 1$, d'après l'indépendance multiplicative de z_1, \dots, z_s . On ne nuit pas à la généralité en supposant de plus $x > 1$, d'après ci-dessus, nous obtenons alors :

$$\frac{1}{N(T)} \sum^* e(\langle h, \xi \rangle) = O\left(\frac{1}{\log T}\right) \quad (\langle h, \xi \rangle = \sum_{j=1}^s h_j \xi_j),$$

d'où l'équirépartition de la suite $\xi(z)$. Le cas intéressant est celui où les z_j sont des puissances de nombres premiers distincts.

Nous voulons maintenant évaluer la discrédance D_T de la suite $\xi(z)$. Nous montrerons qu'avec l'hypothèse de Riemann nous avons :

$$(4) \quad D_T(\xi) = O\left(\frac{\log z}{\log T}\right) \quad (C \text{ constante universelle}),$$

et, sans cette hypothèse,

$$(4') \quad D_T(\xi) = O\left(\frac{\log z}{\log \log T}\right),$$

ceci en dimension 1. Nous obtiendrons un résultat analogue en dimension s ($s \geq 2$).

Démonstration des égalités (1) et (2) de LANDAU. - LANDAU part des formules suivantes :

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n/n^s)$ ($\sigma = 2$, rayon d'absolue convergence), alors on a, pour toute fonction f ,

$$(5) \quad \left| \int_{2+\gamma i}^{2+Ti} x^s f(s) ds - 2i\pi h(x, T) \right| \leq P(x),$$

où $h(x, T) = 0$ quand $x > 0$ n'est pas entier, et $h(x, T) = (1/2\pi)(T - \gamma)a_x$ quand $x > 0$ est entier, et où :

$$(6) \quad P(x) = 2x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^2 |\log(x/n)|}, \text{ somme étendue aux } n \neq x.$$

(γ est un réel compris entre 0 et 2, strictement inférieur à $\inf \gamma_n$, ($\gamma_n > 0$)).

Nous appliquons maintenant (5) à la fonction

$$f(s) = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{p,m} \frac{\log p}{p^{ms}}.$$

On a donc à évaluer :

$$(6') \quad P_1(x) = 2x^2 P_2(x)$$

avec

$$(7) \quad P_2(x) = \sum_{\substack{p^m \neq x \\ p^m < 2x}} p^{-2m} \left| \log \frac{x}{p^m} \right|^{-1} \log p .$$

On suppose maintenant x entier, et on décompose P_2 en quatre sommes

$$(8) \quad P_2 = \sum_1 + \sum_2 + \sum_3 + \sum_4 ,$$

$$\text{où } \sum_1 = \sum_{p^m \geq 2x} , \quad \sum_2 = \sum_{x < p^m < 2x} , \quad \sum_3 = \sum_{x/2 < p^m < x} , \quad \sum_4 = \sum_{p^m \leq x/2} . \text{ On a :}$$

$$\sum_1 = \sum_{p^m \geq 2x} \leq C_1 \sum_{p^m \geq 2x} p^{-2m} \log p \leq C_1 \sum_{n \geq 2x} \frac{\log n}{n^2} \leq \frac{C_2}{x} \log x , \text{ avec } C_1 = \frac{1}{\log 2} .$$

Ensuite

$$\sum_4 = \sum_{p^m \leq x/2} \leq C_1 \sum_{p^m \leq x/2} p^{-2m} \log p \leq C_1 \sum_{n \leq x/2} \frac{\log n}{n^2} \leq C_3 .$$

$$\text{Soit } \sum_2 = \sum_{x < p^m < 2x} . \text{ Nous posons } p^m/x = 1 + \alpha , \text{ alors } 0 < \alpha < 1 .$$

Nous avons $1 + \alpha \geq \exp(\alpha/2)$, donc

$$\log \frac{p^m}{x} = \log(1 + \alpha) \geq \frac{\alpha}{2} ,$$

ce qui entraîne que

$$\sum_2 = \sum_{x < p^m < 2x} \leq 2 \sum_{x < p^m < 2x} \frac{\log p}{p^{2m}} \times \frac{1}{((p^m/x) - 1)} = 2x \sum_{x < p^m < 2x} (p^m - x)^{-1} \frac{\log p}{p^{2m}} .$$

x est un entier, on a donc $p^m - x \geq 1$, et alors :

$$\sum_2 \leq 2x \sum_{x < p^m < 2x} \frac{\log p}{p^{2m}} = 2x \left[\sum_{x < p < 2x} \frac{\log p}{p^2} + \sum_{x < p^2 < 2x} \frac{\log p}{p^4} + \dots + \sum_{x < p^n < 2x} \frac{\log p}{p^{2n}} + \dots \right]$$

$$\implies \sum_2 \leq 2x \left[(\pi(2x) - \pi(x)) \frac{\log x}{x^2} + (\pi(\sqrt{2x}) - \pi(\sqrt{x})) \frac{\log x}{2x^2} + \dots \right]$$

$$\implies \sum_2 \leq 2x \left[\frac{\log x}{x^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(\frac{n\sqrt{2x}}{x}) - \pi(\frac{n\sqrt{x}}{x})}{x} \right) \right]$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(x^{1/n})}{n} = \frac{\log x}{x} \right) .$$

D'où $\sum_2 \leq C_4$.

De même, pour \sum_3 ,

$$\sum_3 = \sum_{x/2 < p^m < x} < 2x \sum_{x/2 < p^m < x} \frac{\log p}{p^{2m}} \cdot (x - p^m)^{-1} \leq 2x \sum_{x/2 < p^m < x} \frac{\log p}{p^{2m}} \leq C_4 .$$

Nous avons finalement $P_2(x) \leq C_5$ et

$$(9) \quad P_1(x) \leq 2 C_5 x^2 .$$

L'inégalité (5) devient maintenant :

$$\int_{2+\gamma i}^{2+Ti} x^s \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds = 2i\pi h(x, T) + O(x^2) \quad (\text{le } 0 \text{ ne dépend pas de } x),$$

où $h(x, T) = -(1/2\pi)(T - \gamma)\log q$ si $x = q^k$ (q premier), ou $h(x, T) = 0$ dans le cas contraire.

Maintenant, nous allons appliquer la formule intégrale de Cauchy à $\int x^s \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds$ le long du rectangle de sommets : $2 + \gamma i$, $2 + Ti$, $\alpha + Ti$, $\alpha + \gamma i$ ($\alpha < 0$). Pour $T \geq 2$, $\gamma < \inf \gamma_n$, il vient, de la formule des résidus,

$$\mathfrak{J} = \int_{2+\gamma i}^{2+Ti} = \int_{2+\gamma i}^{\alpha+\gamma i} + \int_{\alpha+\gamma i}^{\alpha+Ti} + \int_{\alpha+Ti}^{2+Ti} + 2i\pi \sum^* x^{\rho_n}.$$

On fait tendre α vers $-\infty$, ce qui implique

$$\mathfrak{J} = - \int_{-\infty+\gamma i}^{2+\gamma i} + \int_{-\infty+Ti}^{2+Ti} + 2i\pi \sum^* x^{\rho_n},$$

et

$$\sum^* x^{\rho_n} = h(x, T) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+Ti}^{2+Ti} x^s \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds + O(x^2).$$

Nous avons

$$\int_{-\infty+Ti}^{2+Ti} = \int_{-\infty+Ti}^{-1+Ti} + \int_{-1+Ti}^{2+Ti}, \quad \left| \int_{-\infty+Ti}^{-1+Ti} x^s \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \right| \leq C_8 \frac{\log T}{x}$$

et

$$\int_{-1+Ti}^{2+Ti} x^s \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \sum_{|\gamma_n - T| < 1} \frac{1}{s - \rho_n} \right) ds = O(x^2 \log T).$$

Maintenant, il nous faut regarder les $\mathfrak{J}_n = \int_{-1+Ti}^{2+Ti} \frac{x^s}{s - \rho_n} ds$. On évalue les \mathfrak{J}_n en intégrant le long du chemin $\{-1 + Ti, 2 + Ti\}$, sauf si $T - 1 < \gamma_n < T$ ou $T < \gamma_n < T + 1$. Dans ces deux derniers cas, on remplacera le chemin par des demi-cercles supérieur ou inférieur.

On a alors $\mathfrak{J}_n = O(x^2)$, pour tout n .

On obtient finalement :

$$(10) \quad \sum^* x^{\rho_n} = -T \psi(x) + O(x^2 \log T),$$

où $\psi(x) = (1/2\pi)\log q$, quand $x = q^k$, et $\psi(x) = 0$, quand $x \neq q^k$ (k entier, q premier).

TURAN a démontré qu'on pouvait améliorer (10) en remplaçant x^2 par $x \log^2 x$ dans le 0.

Nous utilisons maintenant (3), et le résultat de SELBERG pour obtenir

$$\sum^* x^{(1/2)+i\gamma_n} = -T \psi(x) + O(x^2 T), \quad \text{et} \quad \sum^* x^{i\gamma_n} = -T \frac{\psi(x)}{x^{1/2}} + O(x^{3/2} T).$$

Calcul de la discrédance. - Nous avons

$$D_T(\mathfrak{J}) = \sup_{\mathfrak{J}} \left| \frac{1}{N(T)} \sum^* i_{\mathfrak{J}}(\xi_n) - \lambda(\mathfrak{J}) \right|,$$

où \mathfrak{J} est un intervalle de $I = [0, 1[$ ou un pavé de I^S , $i_{\mathfrak{J}}$ la fonction caractéristique de \mathfrak{J} et $\lambda(\mathfrak{J})$ la longueur de \mathfrak{J} ou le volume.

On se servira de la formule de ERDÖS-TURAN-KOKSMA :

$$(11) \quad D_T(\xi) \leq C_s \left(\frac{1}{M} + \sum_{\|h\| \leq M} R^{-1}(h) |\Sigma^{\wedge}(h)| \right), \text{ où } \Sigma^{\wedge}(h) = \frac{1}{N(T)} \sum^* e(\langle h, \xi_n \rangle),$$

h appartenant au réseau \underline{Z}^s ($s \geq 1$), $\|h\| = \max |h_j|$, et $R(h) = \prod_{j=1}^s \max(|h_j|, 1)$.

Nous posons maintenant $x = z^h$ (h entier non nul), nous obtenons :

$$(12) \quad \Sigma^{\wedge}(h) = -T \frac{\psi(z^h)}{N(T) z^{h/2}} + O\left(\frac{z^{3h/2}}{T}\right),$$

avec l'hypothèse de Riemann, et sans supposer celle-ci, nous avons

$$(12') \quad \Sigma^{\wedge}(h) = -T \frac{\psi(z^h)}{N(T) z^{h/2}} + O\left(\frac{z^{3h/2}}{\log T}\right).$$

Avec $s = 1$ dans (11), il vient, avec (12'),

$$D_T(\xi) \leq C_1 \left(\frac{1}{M} + O\left(\sum_{h=1}^M \frac{z^{3h/2}}{h \log T}\right) \right).$$

On a $\sum_{h=1}^M z^{3h/2}/h = O(z^{3M/2}/M)$. Donc

$$D_T(\xi) = O\left(\frac{1}{M} + \frac{z^{3M/2}}{M \log T}\right).$$

Posons $M = [(2/3) \times (\log \log T / \log z)] + 1$, on obtient :

$$(13) \quad D_T(\xi) = O\left(\frac{\log z}{\log \log T}\right).$$

Avec l'hypothèse de Riemann, nous prendrons $M = [(2/3) \times (\log T / \log z)] + 1$, si $z \neq q^k$ (q premier), et nous obtenons :

$$(13') \quad D_T(\xi) = O\left(\frac{\log z}{\log T}\right).$$

Si $z = q^k$ (q premier), $T\psi(z^h)/N(T) z^{h/2} = O(1/\log T)$, on obtient alors le même résultat que (13).

En dimension s ($s \geq 2$), nous avons de nouveau des entiers z_1, \dots, z_s multiplicativement indépendants. On pose

$$x(h) = z_1^{h_1} \times \dots \times z_s^{h_s}, \quad h = (h_1, \dots, h_s) \neq 0.$$

Nous avons alors :

$$(14) \quad \Sigma^{\wedge}(h) = -T \frac{\psi(x(h))}{N(T) x^{1/2}(h)} + O\left(\frac{x(h)^{3h/2}}{\log T}\right),$$

où 0 est en $1/\log T$ sans l'hypothèse de Riemann, et en $1/T$ avec celle-ci.

Un calcul rapide nous donne

$$D_T(\xi) = O\left(\frac{\log(z_1 \dots z_s)}{\log \log T}\right),$$

sans l'hypothèse de Riemann, et, avec cette hypothèse,

$$D_T(\xi) = O\left(\frac{\log(z_1 \dots z_s)}{\log T}\right).$$

Les résultats obtenus semblent mauvais, nous verrons que dans les deux cas, et

donc même avec l'hypothèse de Riemann, il n'en est rien.

Pour cela, faisons maintenant $z = q^m$, et montrons que

$$D_T(\xi(q^m)) \geq \frac{1}{2} K(T), \text{ où } K(T) = \psi(q) q^{-(m/2)} \frac{1}{\log T} - o(q^{3m/2} \frac{1}{T}).$$

Nous allons nous servir de l'égalité :

$$\exp 2i\pi x = 1 - 2i\pi \int_x^1 \exp 2i\pi t \, dt = 1 - 2i\pi \int_0^1 (\exp 2i\pi t) i_t(x) \, dt,$$

où i_t est la fonction caractéristique de l'intervalle $(0, t[$. En prenant la partie réelle, et pour $x = \xi_1, \dots, \xi_n, \dots$, on obtient :

$$\frac{1}{N(T)} \sum^* \cos 2\pi \xi_n - 1 = 2\pi \int_0^1 \sin 2\pi t \left(\frac{1}{N(T)} \sum^* i_t(\xi_n) \right) dt.$$

Posons $\vartheta(t) = (1/N(T)) \sum^* i_t(\xi_n) - t$. Il vient

$$\frac{1}{N(T)} \sum^* \cos 2\pi \xi_n = 2\pi \int_0^1 \sin 2\pi t \vartheta(t) \, dt.$$

On a :

$$\int_{1/2}^1 \sin 2\pi t \vartheta(t) \, dt = - \int_0^{1/2} \sin 2\pi t \vartheta\left(\frac{1}{2} + t\right) \, dt.$$

On obtient alors, en posant

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= \vartheta\left(\frac{1}{2} + t\right) - \vartheta(t) = \frac{1}{N(T)} \sum^* i\left(\left(t, t + \frac{1}{2}\right[, \xi_n\right) - \frac{1}{2}, \\ - \frac{1}{N(T)} \sum^* \cos 2\pi \xi_n &= 2\pi \int_0^{1/2} \sin 2\pi t \Delta(t) \, dt \\ &\implies - \frac{1}{N(T)} \sum^* \cos 2\pi \xi_n \leq 2 \sup_{0 \leq t \leq 1/2} |\Delta(t)| \, dt. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$(15) \quad \sup_{0 \leq t \leq 1/2} |\Delta(t)| \leq D_T(\xi),$$

d'où finalement

$$D_T(\xi) \geq \frac{1}{2} K(T).$$

De (15), on déduit qu'il existe un t dans $(0, 1[$ tel que

$$(16) \quad \Delta(t) \geq \frac{1}{2} K(T).$$

Pour ce t , on considère $A(t) = [t, (1/2) + t[$ et son complément $B(t) = [0, t[\cup](1/2) + t, 1[$, tous deux de longueur $1/2$. Nous avons

$$\lambda(A(t)) = \frac{1}{N(T)} \sum^* i(A(t), \xi_n),$$

$$\lambda(B(t)) = \frac{1}{N(T)} \sum^* i(B(t), \xi_n),$$

et trivialement

$$\lambda(A(t)) + \lambda(B(t)) = 1,$$

et de (16), il s'en suit

$$\lambda(A(t)) - \lambda(B(t)) \geq K(T).$$

Donc il se trouve dans $A(t)$ au moins $C(q)T$ termes de la suite ξ de plus que dans $B(t)$, ceci quand T est suffisamment grand ($C(q)$ ne dépend que de q).

On peut aussi comparer la suite $\xi(q^m)$ avec la suite $\xi(z)$ (z n'est pas un entier de la forme q^m). Posons $x_n = \xi_n(q^m)$, et $y_n = \xi_n(z)$. On a alors

$$\frac{1}{N(T)} \sum^* (\cos 2\pi x_n - \cos 2\pi y_n) = 2\pi \int_0^1 \sin 2\pi t \hat{\delta}(t) dt,$$

où $\hat{\delta}(t) = (1/N(T)) \sum^* [i_t(x_n) - i_t(y_n)]$.

Posons $\hat{\Delta}(t) = (1/N(T)) \sum^* (i(A(t), x_n) - i(A(t), y_n))$. On aboutit à

$$-\frac{1}{N(T)} \sum^* (\cos 2\pi x_n - \cos 2\pi y_n) \leq 2 \sup_{0 \leq t \leq 1/2} |\hat{\Delta}(t)|.$$

Et donc ici aussi, il existe un t tel que l'intervalle $A(t)$ de longueur $1/2$ possède $C(q, z)T$ termes de la suite $\xi(q^m)$ de plus que de termes de la suite $\xi(z)$. (C ne dépend que de q et z).

W. SCHMIDT a démontré qu'on peut de façon analogue comparer $\xi(q^m)$ et $\xi(q_1^l)$, quand

$$q^{-(m/2)} \log q > q_1^{-(l/2)} \log q_1.$$

On peut maintenant relier tout ceci aux trois remarques suivantes :

1° RADEMACHER a conjecturé que (16) est vrai pour $t = 1/4$;

2° On peut donner une estimation plus faible de (4) et (4'), quand z est un entier algébrique ;

3° Avec des séries L comme les fonctions zêta de Dedekind, on peut transcrire tous ces résultats. Les cas d'exceptions (q^m , q premier) deviennent $N(q^m)$, où q est un idéal premier d'un corps de nombres.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] HLANKA (E.). - Über die Gleichverteilung gewissen Folgen, welche mit den Nullstellen der Zetafunktion zusammenhängen, Österreich. Akad. Wiss., Math.-naturw. Kl., t. 184, 1975, p. 459-471.
- [2] LANDAU (E.). - Über die Nullstellen der Zetafunktion, Math. Annalen, t. 71, 1912, p. 548-564.
- [3] RADEMACHER (H.). - Collected papers of Hans Rademacher. Volume 2. - Cambridge, H. I. T. Press, 1974 (Mathematicians of our Time, 4).
- [4] TITCHMARSH (E. C.). - The theory of the Riemann zeta-function. 2nd edition. - Oxford, At the Clarendon Press, 1951.

(Texte reçu le 30 juin 1978)

Georges GRISO
45 rue Saint-Placide
75006 PARIS