

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

JEAN-LOUIS NICOLAS

Répartition des nombres largement composés

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 19, n° 2 (1977-1978),
exp. n° 41, p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1977-1978__19_2_A15_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RÉPARTITION DES NOMBRES LARGEMENT COMPOSÉS

par Jean-Louis NICOLAS

Summary. - An integer n is called largely composite if $m \leq n \implies d(m) \leq d(n)$, where $d(n)$ is the number of divisors of n . It is proved that the quantity $Q_\ell(X)$ of largely composite numbers less than X , is, for X large, between $\exp(\log X)^a$ and $\exp(\log X)^b$, with $0.2 < a < b < 0.5$.

Désignons par $d(n)$ le nombre de diviseurs de n . RAMANUJAN [9] a appelé hautement composé un entier n vérifiant

$$m < n \implies d(m) < d(n) .$$

Nous dirons que n est largement composé s'il vérifie

$$m \leq n \implies d(m) \leq d(n) .$$

Désignons par $Q_h(X)$ (resp. $Q_\ell(X)$) le nombre de nombres hautement (resp. largement) composés $\leq X$. On sait qu'il existe (cf. [2] et [7]) deux nombres réels c et c' vérifiant $1,125 \leq c < c'$ tels que, pour X assez grand, on ait :

$$(\log X)^c \leq Q_h(X) \leq (\log X)^{c'} ,$$

et on conjecture que

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\log Q_h(X)}{\log \log X} = \frac{\log 30}{\log 16} = 1,227 .$$

Nous allons démontrer que $Q_\ell(X)$ est beaucoup plus grand que $Q_h(X)$.

THÉOREME. - Il existe deux nombres réels a et b vérifiant $0,2 < a < b < 0,5$ tels que, pour X assez grand, on ait

$$\exp(\log X)^a \leq Q_\ell(X) \leq \exp(\log X)^b .$$

On peut conjecturer que

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\log \log Q_\ell(X)}{\log \log X} = 1 - \frac{\log 30}{2 \log 16} = 0,387 .$$

La démonstration de ce théorème repose sur les propriétés des nombres hautement composés supérieurs que nous rappelons au § 1, sur un théorème de Selberg (concernant les nombres premiers dans l'intervalle $x, x + x^\tau$) que nous redémontrons au § 2. La minoration de $Q_\ell(X)$ fait l'objet du § 3. La majoration de $Q_\ell(X)$, donnée au § 4, utilise les méthodes de la majoration de $Q_h(X)$ dans [7].

1. Nombres hautement composés supérieurs.

On dit que N est hautement composé supérieur, s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout entier M , on ait

$$\frac{d(M)}{M^\varepsilon} < \frac{d(N)}{N^\varepsilon} .$$

Un tel nombre est hautement composé :

$$M < N \implies d(M) \leq \left(\frac{M}{N}\right)^\varepsilon d(N) < d(N) .$$

Propriétés (cf. [9], § 32-34, [6], [7]): Etant donné ε , $0 < \varepsilon < 1$, il existe un nombre hautement composé supérieur associé à ε dont la décomposition en facteurs premiers $N_\varepsilon = \prod_\lambda \lambda^{a_\lambda}$ est donnée par

$$(1) \quad a_\lambda = 1/(\lambda^\varepsilon - 1) = \text{partie entière de } 1/(\lambda^\varepsilon - 1)$$

(En effet, pour maximiser le produit $\prod_\lambda ((a_\lambda + 1)/\lambda^{\varepsilon a_\lambda})$, on maximise chacun des facteurs).

On attache à N les nombres

$$(2) \quad x = 2^{1/\varepsilon} \quad \text{et} \quad x_k = x^{\log(1+1/k)/\log 2} = (1 + 1/k)^{1/\varepsilon} .$$

On a alors :

$$(3) \quad (x_{k+1} < \lambda < x_k) \implies (a_\lambda = k) \implies (x_{k+1} \leq \lambda \leq x_k) ,$$

$$(4) \quad \log N \sim x .$$

Soit p_1 le plus grand nombre premier divisant N , et P_1 le nombre premier suivant p_1 . On a $p_1 \leq x \leq P_1$, et le nombre hautement composé supérieur suivant N est inférieur ou égal à NP_1 .

On a également

$$\lambda \leq x_k \iff \varepsilon \leq \frac{\log(1 + 1/k)}{\log \lambda} .$$

Il est commode de poser, pour $k \geq 1$

$$F_k = \left\{ \frac{\log(1 + 1/k)}{\log \lambda}, \lambda \text{ premier} \right\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{F}_k = \bigcup_{j \geq k} F_j .$$

On définit

$$(5) \quad \varepsilon_k^+ = \inf_{\alpha \geq \varepsilon, \alpha \in \mathfrak{F}_k} \alpha \quad \text{et} \quad \varepsilon_k^- = \sup_{\alpha \leq \varepsilon, \alpha \in \mathfrak{F}_k} \alpha .$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, et N_ε un nombre maximisant $d(N)/N^\varepsilon$. On définit, pour M entier, le bénéfice de M (bén M) par rapport à N et ε par

$$(6) \quad \text{bén } M = \log \frac{d(N)}{N^\varepsilon} - \log \frac{d(M)}{M^\varepsilon} = \log \frac{d(N)}{d(M)} - \varepsilon \log \frac{N}{M} .$$

D'après la définition des nombres hautement composés supérieurs, on a toujours $\text{bén } M \geq 0$ et, si $M = \prod_\lambda \lambda^{b_\lambda}$, on a

$$(7) \quad \text{bén } M = \sum_{\lambda \text{ premier}} \text{bén}_\lambda M$$

avec

$$\text{bén}_\lambda(M) = \log \frac{a_\lambda + 1}{b_\lambda + 1} - \varepsilon(a_\lambda - b_\lambda) \log \lambda .$$

On a, pour tout λ premier, $\text{bén}_\lambda M \geq 0$, d'après (i).

Compte tenu de ce que, pour $b_\lambda \geq a_\lambda$,

$$\frac{b_\lambda + 1}{a_\lambda + 1} \leq \left(\frac{a_\lambda + 2}{a_\lambda + 1} \right)^{b_\lambda - a_\lambda},$$

on a

$$(8) \quad \text{bén}_\lambda M \geq (b_\lambda - a_\lambda) \left(\varepsilon \log \lambda - \log \left(1 + \frac{1}{a_\lambda + 1} \right) \right) \\ \geq (b_\lambda - a_\lambda) \log \lambda (\varepsilon - \varepsilon_{a_\lambda + 1}^-).$$

On a de même, pour $b_\lambda \leq a_\lambda$,

$$(9) \quad \text{bén}_\lambda M \geq (a_\lambda - b_\lambda) \log \lambda (\varepsilon_{a_\lambda}^+ - \varepsilon).$$

LEMME 1. - Soit $\eta > 0$ fixé. Pour tout $x \in [\xi, 2\xi]$, excepté pour un ensemble de mesure $O(\xi^{1-\eta})$, le nombre hautement composé supérieur N , associé par (1) à $\varepsilon = (\log 2 / \log x)$, vérifie la relation, où n' désigne le nombre hautement composé suivant N ,

$$(10) \quad \frac{n'}{N} \geq 1 + \frac{1}{(\log N)^{\theta+2\eta}}, \quad \text{avec } \theta = \frac{\log 3/2}{\log 2} = 0,585.$$

Démonstration. - Ce lemme généralise le théorème 8 de [6] (p. 174). Pour $\xi \leq x \leq 2\xi$, on a $(\log 2 / \log \xi) \geq \varepsilon \geq (\log 2 / \log 2\xi)$. Considérons les éléments $\alpha \in \mathbb{F}_k$, $\alpha \geq (\log 2 / \log 2\xi)$. On a

$$\alpha = \frac{\log(1 + 1/k)}{\log \lambda} \geq \frac{\log 2}{\log 2\xi} \iff \lambda \leq (2\xi)^{\log(1+1/k)/\log 2}.$$

Il y en a au plus $(2\xi)^{\log(1+1/k)/\log 2}$, et, pour $k \geq (\log 2\xi)/(\log 2)^2$, il n'y en a pas. Posons

$$A_\xi = \left\{ \alpha \in \mathbb{F}_2 ; \frac{\log 2}{\log \xi} \geq \alpha \geq \frac{\log 2}{\log 2\xi} \right\}.$$

On a

$$\text{Card } A_\xi \leq \sum_{k=2}^{(\log 2\xi)/(\log 2)^2} (2\xi)^{\log(1+1/k)/\log 2} = O(\xi^\theta).$$

Autour de chacun de ces $\alpha \in A_\xi$, on met une zone interdite $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$, avec $\delta = \xi^{-\theta-2\eta}$. La mesure de la réunion

$$Z_{\xi, \delta} = \bigcup_{\alpha \in A_\xi} (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$$

est donc $O(\xi^{-2\eta})$.

L'image de $Z_{\xi, \delta}$ dans l'intervalle $[\xi, 2\xi]$ par l'application $\alpha \mapsto 2^{1/\alpha}$ aura une mesure $O(\xi^{1-2\eta} \log^2 \xi) = O(\xi^{1-\eta})$. Choisissons x en dehors de cette image. On aura alors $\varepsilon = (\log 2 / \log x) \notin Z_{\xi, \delta}$, ce qui implique, d'après [5],

$$\varepsilon_2^+ - \varepsilon \geq \delta \quad \text{et} \quad \varepsilon - \varepsilon_2^- \geq \delta.$$

Posons maintenant $n' = (r/s)N$ avec $(r, s) = 1$, et considérons le bénéfice de n' par rapport à N et ε . On a l'une des trois éventualités :

1° r a un diviseur premier λ vérifiant $a_\lambda \geq 1$: on aura, d'après [9]

$$\text{bén } n' \geq (\log \lambda) (\varepsilon - \varepsilon_2^-) \geq \delta \log 2;$$

2° s a un diviseur premier μ vérifiant $a_\mu \geq 2$: on aura, d'après [10],

$$\text{bén } n' \geq (\log \mu)(\epsilon_2^+ - \epsilon) \geq \lambda \log 2 ;$$

3° n' s'écrit

$$n' = \frac{P_1 P_2 \dots P_k}{P_1 P_2 \dots P_j} N ,$$

où P_1, P_2, \dots, P_k ne divisent pas N , et p_1, p_2, \dots, p_j divisent N avec l'exposant 1. Cela donne

$$\log \frac{d(n')}{d(N)} = (k - j) \log 2 \geq \log 2 , \text{ puisque } d(n') > d(N) .$$

Dans les trois cas, on aura, par (6),

$$\epsilon \log \frac{n'}{N} = \log \frac{d(n')}{d(N)} + \text{bén } n' \geq \lambda \log 2 .$$

C'est-à-dire

$$\frac{n'}{N} - 1 \geq \log \frac{n'}{N} \geq \lambda \log x = \frac{\log x}{\xi^{\theta+2\eta}} > \frac{\log x}{x^{\theta+2\eta}} .$$

Et, comme, par (4), $x \sim \log N$, cela achève la démonstration.

Remarque. - En utilisant le résultat de Fel'dmann [3], il existe deux constantes c et μ telles que l'on ait

$$|v\theta - u| \geq \frac{c}{v^\mu} , \text{ pour } u, v \in \mathbb{Z} .$$

On peut remplacer dans (10) θ par $\mu\theta/(\mu+2)$. Il suffit pour cela de remplacer dans la définition de A_ξ , \mathfrak{F}_2 par \mathfrak{F}_3 et dans les deux premières éventualités de considérer $a_\lambda \geq 2$, puis $a_\mu \geq 3$. M. WALDSCHMIDT m'a communiqué pour μ la valeur 2^{60} .

2. Un résultat de A. SELBERG.

LEMME 2 (cf. [11]). - Soit $\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p$ la fonction de Tchebychev [Cěbyšev]. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, et pour tout $T \leq \frac{x^{5/6}}{6} e^{-(\log x)^\delta}$ (avec $2/3 < \delta < 1$), on a, pour $\mu < \delta - 2/3$,

$$\frac{1}{x} \int_x^{2x} \left| \psi\left(y + \frac{y}{T}\right) - \psi(y) - \frac{y}{T} \right|^2 dy = O\left(\frac{x^2}{T^2} e^{-(\log x)^\mu}\right) .$$

Démonstration. - Désignons par $N(\sigma, t)$ le nombre de zéros $\rho = \beta + i\gamma$ de la fonction ζ de Riemann, vérifiant $\sigma \leq \beta < 1$ et $|\gamma| < t$. La démonstration du lemme 2 repose sur les résultats suivants, où σ vérifie $0 \leq \sigma \leq 1$,

$$(11) \quad N(\sigma, t) = O(t^{(12/5)(1-\sigma)} \log^9 t) \quad (\text{cf. [5] et [6]}),$$

$$(12) \quad N(\sigma, t) = 0 \quad \text{pour } t \geq t_0 \text{ et } \sigma \geq 1 - \eta(t) ,$$

avec

$$\eta(t) = c(\log \log |t|)^{-1/3} (\log |t|)^{-2/3} \quad (\text{cf. [1], p. 423}),$$

$$(13) \quad N(0, t+1) - N(0, t) = O(\log t) \quad (\text{cf. [1], p. 163}),$$

$$(14) \quad \frac{1}{2} N(0, t) = \frac{t}{2\pi} \log \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2\pi} + O(\log t) \quad (\text{cf. [1], p. 166}),$$

et la formule explicite valable pour $t \leq x$ (cf. [8], p. 232)

$$(15) \quad \psi(x) - x = - \sum_{|\gamma| < t} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x}{t} \log^2 x\right).$$

On a alors, pour $x \leq y \leq 2x$ et $T \geq 1$,

$$\psi\left(y + \frac{y}{T}\right) - \psi(y) - \frac{y}{T} = - \sum_{|\gamma| < t} \frac{e^{\delta\rho} - 1}{\rho} y^\rho + O\left(\frac{x}{t} \log^2 x\right),$$

avec $\delta = \log(1 + (1/T)) \leq 1/T$. Compte tenu de ce que $|A + B|^2 \leq 2(|A|^2 + |B|^2)$,

et en évaluant $\int_x^{2x} y^\rho y^{\bar{\rho}'} dy$, il vient, en posant

$$I = \frac{1}{x} \int_x^{2x} \left| \psi\left(y + \frac{y}{T}\right) - \psi(y) - \frac{y}{T} \right|^2 dy,$$

$$I = O\left(\sum_{|\gamma| < t} \sum_{|\gamma'| < t} \frac{(e^{\delta\rho} - 1)(e^{\delta\bar{\rho}'} - 1)}{\rho \bar{\rho}'} \frac{2^{\rho+\bar{\rho}'+1} - 1}{1 + \rho + \bar{\rho}'} x^{\rho+\bar{\rho}'} \right) + O\left(\frac{x^2}{t^2} \log^4 x\right).$$

Comme la fonction $(e^z - 1)/z$ est bornée pour $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, on a

$$I = O\left(\sum_{|\gamma| < t} \sum_{|\gamma'| < t} \frac{1}{T^2} \frac{x^{\beta+\beta'}}{1 + |\gamma - \gamma'|} \right) + O\left(\frac{x^2}{t^2} \log^4 x\right).$$

De l'inégalité $x^{\beta+\beta'} \leq \frac{1}{2}(x^{2\beta} + x^{2\beta'})$, on déduit

$$I = O\left(\frac{1}{T^2} \sum_{|\gamma| < t} x^{2\beta} \sum_{|\gamma'| < t} \frac{1}{1 + |\gamma - \gamma'|}\right) + O\left(\frac{x^2}{t^2} \log^4 x\right).$$

On a ensuite, en utilisant (13),

$$\sum_{-t < \gamma' < t} \frac{1}{1 + |\gamma - \gamma'|} < \sum_{n=1}^{2t} \sum_{n-1 \leq |\gamma - \gamma'| \leq n} \frac{1}{n} = O\left(\sum_{n=1}^{2t} \frac{\log t}{n}\right) = O(\log^2 t).$$

Il vient alors, puisque $t \leq x$,

$$I = O\left(\frac{x^2 \log^2 x}{T^2} \sum_{|\gamma| < t} x^{2\beta-2}\right) + O\left(\frac{x^2}{t^2} \log^4 x\right).$$

Évaluons maintenant, en intégrant par parties l'intégrale de Stieltjes :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{|\gamma| < t} x^{2\beta-2} = - \int_0^1 x^{2\sigma-2} d_\sigma N(\sigma, t) \\ &= x^{-2} N(0, t) + \int_0^1 2(\log x) x^{2\sigma-2} N(\sigma, t) d\sigma, \end{aligned}$$

et en utilisant (14), (12) et (11), on obtient :

$$S = O\left(\frac{t \log t}{x^2}\right) + \int_0^{1-\eta(t)} 2(\log x) \log^9 t e^{(2\log x - (12/5)\log t)(\sigma-1)} d\sigma.$$

On choisit alors $t = x^{5/6} e^{-(1/2)(\log x)^\delta}$, cela donne :

$$S = O\left(\frac{\log x}{x}\right) + O\left((\log x)^{10-\delta} (e^{-\eta(t)} (6/5)(\log x)^\delta - e^{-(6/5)(\log x)^\delta})\right).$$

D'après (12),

$$\eta(t) \geq \frac{c}{(\log x)^{2/3} (\log \log x)^{1/3}},$$

on a donc, pour $\mu < \delta - (2/3)$,

$$S = O(e^{-(\log x)^\mu}).$$

Comme $T \leq x^{5/6} e^{-(\log x)^\delta}$, cela entraîne $T^2/t^2 \leq e^{-(\log x)^\delta}$, et l'on obtient,

pour tout $\mu < \delta - 2/3$,

$$I = O\left(\frac{x^2}{T^2} e^{-(\log x)^\mu}\right).$$

LEMME 3. - Posons $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$. Soit τ vérifiant $1/6 < \tau < 1$, et μ véri-
fiant $0 < \mu < 1/3$. Pour tout $x \in [\xi, \xi']$, avec $\xi' = \xi + \xi/\log \xi$, excepté
pour un ensemble de mesure $O(\xi e^{-(\log \xi)^\mu})$, on a :

$$(16) \quad \left| \pi(x + x^\tau) - \pi(x) - \frac{x^\tau}{\log x} \right| < \frac{4 x^\tau}{\log^2 x},$$

et

$$(17) \quad \left| \pi(x) - \pi(x - x^\tau) - \frac{x^\tau}{\log x} \right| < \frac{4 x^\tau}{\log^2 x}.$$

Démonstration. - Si x ne vérifie pas la relation (16), on en déduit que, pour x assez grand, on a

$$(18) \quad \left| \psi(x + x^\tau) - \psi(x) - \frac{x^\tau}{\log x} \right| \geq \frac{3 x^\tau}{\log x}.$$

D'après le lemme 2, on a, en choisissant $T = \xi^{1-\tau}$,

$$\int_{\xi}^{\xi'} \left| \psi\left(y + \frac{y}{T}\right) - \psi(y) - \frac{y}{T} \right|^2 dy = O\left(\frac{\xi^3}{T^2} e^{-(\log \xi)^\mu}\right),$$

ce qui entraîne que la relation

$$\psi(y + \xi^{\tau-1} y) - \psi(y) - \xi^{\tau-1} y < \frac{y^\tau}{\log y}$$

est vérifiée pour $y \in [\xi, \xi']$, excepté sur un ensemble E de mesure $O(\xi e^{-(\log \xi)^\mu})$, pour tout $\mu < 1/3$. Si $y \notin E$, on a, puisque ψ est une fonction croissante,

$$\begin{aligned} \psi(y + y^\tau) - \psi(y) - y^\tau &\leq \psi(y + \xi^{\tau-1} y) - \psi(y) - \xi^{\tau-1} y + (\xi^{\tau-1} y - y^\tau) \\ &\leq \frac{y^\tau}{\log y} + y^\tau \left(\frac{y}{\xi} - 1\right) \leq \frac{y^\tau}{\log y} + y^\tau \left(\frac{\xi'}{\xi} - 1\right) \leq \frac{3 y^\tau}{\log y}. \end{aligned}$$

On aura de même, en choisissant $T = \xi'^{(1-\tau)}$,

$$\psi(y + \xi'^{(\tau-1)} y) - \psi(y) - \xi'^{(\tau-1)} y > -\frac{y^\tau}{\log y},$$

excepté sur un ensemble E' de mesure $O(\xi e^{-(\log \xi)^\mu})$. Si $y \notin E'$, on a

$$\begin{aligned} \psi(y + y^\tau) - \psi(y) - y^\tau &\geq \psi(y + \xi'^{(\tau-1)} y) - \psi(y) - \xi'^{(\tau-1)} y + (\xi'^{(\tau-1)} y - y^\tau) \\ &\geq -\frac{y^\tau}{\log y} + y^\tau \left(\frac{y}{\xi'} - 1\right) \geq -\frac{3 y^\tau}{\log y}. \end{aligned}$$

Ce qui montre que la relation (18) ne peut être vérifiée que sur l'ensemble $E \cup E'$ de mesure $m_1 = O(\xi e^{-(\log \xi)^\mu})$.

Pour la relation (17), on démontre de même qu'elle est vérifiée, excepté sur un ensemble de mesure $m_2 = O(\xi e^{-(\log \xi)^\mu})$ en majorant comme au lemme 2 l'intégrale

$$\frac{1}{x} \int_x^{2x} \left| \psi(y) - \psi\left(y - \frac{y}{T}\right) - \frac{y}{T} \right|^2 dy.$$

Les relations (16) et (17) sont donc simultanément vérifiées sauf sur un ensemble

de mesure au plus $m_1 + m_2$.

3. Minoration de $Q_2(X)$.

Soit τ vérifiant $1/6 < \tau < 1$ et $\eta > 0$. Entre $(1/2)\log X$ et $(3/4)\log X$, choisissons un x vérifiant (16), (17) et (10). Appelons p_k et P_k les nombres premiers entourant x

$$\dots p_k < \dots < p_2 < p_1 \leq x < P_1 < P_2 < \dots < P_k < \dots$$

Choisissons $K = [x^\tau / (2 \log x)]$, de telle sorte que $P_K \leq x + x^\tau$ et $p_k \geq x - x^\tau$. Soit maintenant $m \leq K$, et

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq K.$$

On considère

$$n(i) = N \frac{P_{i_1} P_{i_2} \dots P_{i_m}}{P_1 P_2 \dots P_m},$$

où N est le nombre hautement composé supérieur associé à $\varepsilon = (\log 2 / \log x)$. D'après (2) et (3), p_1, p_2, \dots, p_m divisent N avec l'exposant 1 et P_1, P_2, \dots, P_K ne divisent pas N . On a donc $d(n(i)) = d(N)$, et

$$(19) \quad \log n(i) - \log N \leq m \log(x + x^\tau) - m \log(x - x^\tau) \leq \frac{3K}{x^{1-\tau}} \leq 3 x^{2\tau-1},$$

pour x assez grand. Comme $\log N \sim x$, on aura $n(i) < n'$, si l'on a, d'après (10),

$$(20) \quad 3 x^{2\tau-1} \leq \frac{1}{2} x^{-\theta-2\eta},$$

et ces nombres $n(i)$ seront largement composés. Il y en a $2^K - 1$. En choisissant $\tau = (1 - \theta - 3\eta)/2$, on obtient

$$Q_2(X) \geq 2^K - 1 = 2^{[x^\tau / 2 \log x]} - 1 \geq e^{(\log X)^a},$$

pour X assez grand et pour tout $a < (1 - \theta)/2 = 0,20752$.

4. Majoration de $Q_2(X)$.

LEMME 4. - Soit N et N' deux nombres hautement composés supérieurs consécutifs. Si ε est associé à N , on pose $x = 2^{1/\varepsilon}$. Il existe $\gamma > 0$ tel que, pour tout nombre largement composé n compris entre N et N' , on ait $\text{bén } n \leq x^{-\gamma}$. D'autre part, pour tout λ premier, les valuations λ -adiques de n et N vérifient $|v_\lambda(n) - v_\lambda(N)| \leq 1$.

La démonstration est la même que celle du théorème 1 (p. 120) et de la proposition 3 (p. 123) de [7], la distinction entre "largement" et "hautement" n'intervenant pas ici.

Soit maintenant, avec les notations du § 1, λ un nombre premier. On a, d'après (7) et (2),

$$\text{bén } \lambda N = \log \frac{a_\lambda + 1}{a_\lambda + 2} + \varepsilon \log \lambda = \varepsilon \log \frac{\lambda}{x_{a_\lambda+1}},$$

et, si $a_\mu \geq 1$,

$$\text{bén } \frac{N}{\mu} = \log \frac{a_\mu + 1}{a_\mu} - \varepsilon \log \mu = \varepsilon \log \frac{x_{a_\mu}}{\mu}.$$

Si λ divise N avec l'exposant $a_\lambda = k - 1$, et n avec l'exposant k , on a

$$\text{bén } n \geq \varepsilon \log \frac{\lambda}{x_k},$$

et d'après le lemme 4, si n est largement composé, on doit avoir

$$\varepsilon \log \frac{\lambda}{x_k} \leq x^{-\gamma},$$

soit

$$(21) \quad \lambda - x_k \leq c_1 (\log x) x_k x^{-\gamma}.$$

Si maintenant les nombres premiers $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_h$ divisent N avec l'exposant $k - 1$, et n avec l'exposant k , on a

$$\text{bén } n \geq \sum_{i=1}^h \varepsilon \log \frac{\lambda_i}{x_k} \geq \varepsilon \sum_{i=1}^h \frac{\lambda_i - x_k}{\lambda_i} \geq \frac{\varepsilon}{\lambda_h} \sum_{i=1}^h 2(i-1) = \frac{\varepsilon}{\lambda_h} (h^2 - h).$$

Si n est largement composé, on a, d'après (3) et (21), $\lambda_h \sim x_k$ et $\text{bén } n \leq x^{-\gamma}$, ce qui donne

$$h \leq c_2 \sqrt{(\log x) x_k x^{-\gamma}}.$$

Le nombre de choix possibles pour un tel système de nombres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$ est donc au plus

$$(c_1 (\log x) x_k x^{-\gamma})^{c_2 \sqrt{(\log x) x_k x^{-\gamma}}} = \exp(x^{\frac{1}{2}(\frac{\log(1+1/k)}{\log 2} - \gamma + \eta)}),$$

pour tout $\eta > 0$. On obtient la même majoration pour le nombre de choix possibles pour un système de nombres premiers $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_h$ divisant N avec l'exposant k et n avec l'exposant $k - 1$.

On définit ensuite K par

$$\frac{\log(1 + 1/(K + 1))}{\log 2} \leq \frac{1 - \gamma}{2} < \frac{\log(1 + 1/K)}{\log 2}.$$

Le nombre de façon de choisir n largement composé entre N et N' sera, d'après le lemme 4, majoré par

$$3^{\pi(x_{K+1})} \prod_{k=1}^K \exp(2 c_3 x^{\frac{1}{2}(\frac{\log(1+(1/k))}{\log 2} - \gamma + \eta)}) \leq e^{(\log N)^{((1-\gamma)/2) + 2\eta}},$$

pour tout $\eta > 0$ et N assez grand, en utilisant (4).

Comme, d'après RAMANUJAN, il y a $O((\log X)/(\log \log X))$ nombres hautement composés supérieurs $N \leq X$, il existe donc $b < 1/2$ tel qu'il y ait au plus $e^{(\log X)^b}$ nombres largement composés $\leq X$, pour X assez grand.

5. Conjecture.

Sous les deux hypothèses très fortes formulées à la fin de [7], la conjecture de Cramer sur le n -ième nombre premier p_n

$$p_{n+1} - p_n = o(\log^2 p_n),$$

et l'inégalité vérifiée, pour tout $\eta > 0$,

$$|u \log \frac{3}{2} + v \log \frac{5}{4} + w \log 2| > \frac{1}{K(\eta) |uv|^{1+\eta}}, \quad \forall u, v, w \in \mathbb{Z},$$

on peut choisir dans le lemme 4, pour tout $\eta > 0$,

$$\gamma = \frac{1}{4} \left(\frac{\log 3/2 + \log 5/4}{\log 2} \right) - \eta = \frac{\log 15/8}{\log 16} - \eta,$$

et dans le lemme 1, on peut, dans (10), remplacer θ par $((\log 15/8)/(\log 16)) + \eta$. A partir de ces valeurs, les mêmes calculs donnent la conjecture citée dans le théorème.

6. Un problème de P. ERDÖS.

La méthode de minoration de $Q_2(X)$ permet de répondre à une question de P. ERDÖS: Soit $h(n)$ le plus petit entier tel que $d(n + h(n)) > d(n)$. Montrer que la quantité $(1/X) \sum_{n \leq X} h(n)$ n'est pas bornée.

Dans la construction du § 3, on a, par (10), (19) et (20),

$$h(n_{(i)}) = n' - n_{(i)} \geq \frac{N}{4 x^{\theta+2\eta}}$$

en choisissant toujours $\tau = (1 - \theta - 3\eta)/2$. Il vient ensuite

$$\frac{1}{n'} \sum_{n \leq n'} h(n) \geq \frac{N}{4 n' x^{\theta+2\eta}} 2^{\lfloor x^\tau / 2 \log x \rfloor}$$

qui n'est pas borné.

Enfin, on peut se demander si, entre deux nombres hautement composés consécutifs assez grands il existe toujours un nombre largement composé.

RÉFÉRENCES

- [1] ELLISON (W. J.) et MENDES FRANCE (M.). - Les nombres premiers. - Paris, Hermann, 1975 (Act. scient. et ind., 1366 ; Publi. Inst. math. Univ. Nancago, 9).
- [2] ERDÖS (P.). - On highly composite numbers, J. London math. Soc., t. 19, 1944, p. 130-134.
- [3] FELDMANN (N. I.). - Improved estimate for a linear form of the logarithms of algebraic numbers, Math. USSR-Sbornik, t. 6, 1968, p. 393-406 ; [in Russian] Mat. Sbornik, t. 77 (119), 1968, p. 423-436.
- [4] HUXLEY (M. N.). - The distribution of prime numbers : Large sieves and zero-density theorems. - Oxford, at the Clarendon Press, 1972 (Oxford mathematical Monographs).

- [5] HUXLEY (M. N.). - On the difference between consecutive primes, *Inventiones Math.*, t. 15, 1972, p. 164-170.
- [6] NICOLAS (J.-L.). - Ordre maximal d'un élément du groupe S_n des permutations et "highly composite numbers", *Bull. Soc. math. France*, t. 97, 1969, p. 129-191.
- [7] NICOLAS (J.-L.). - Répartition des nombres hautement composés de Ramanujan, *Canad. J. of Math.*, t. 23, 1971, p. 116-130.
- [8] PRACHAR (K.). - Primzahlverteilung. - Berlin, Springer-Verlag, 1957 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 41).
- [9] RAMANUJAN (S.). - Highly composite numbers, *Proc. London math. Soc.*, Series 2, t. 14, 1914, p. 347-409 ; and *Collected papers*, p. 78-128. - Cambridge, at the University Press, 1927.
- [10] SELBERG (A.). - On the normal density of primes in small intervals and the difference between consecutive primes, *Arch. math. Naturvid.*, t. 47, 1943, fasc. 6, p. 87-105.

(Texte reçu le 5 juin 1978)

Jean-Louis NICOLAS
Département de Mathématiques
U. E. R. des Sciences
123 rue Albert Thomas
87060 LIMOGES CEDEX
