Daniel Bertrand

Fonctions modulaires, courbes de Tate et indépendance algébrique

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 19, n° 2 (1977-1978), exp. n° 36, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1977-1978__19_2_A10_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
19e année, 1977/78, n° 36, 11 p.

3 avril 1978

FONCTIONS MODULAIRES, COURBES DE TATE ET INDÉPENDANCE ALGÉBRIQUE

par Daniel BERTRAND

Résumé. - Dans la première partie de cet exposé (§ 2 et § 3), nous rappelons, à l'occasion d'un résultat d'indépendance algébrique récemment obtenu par G. CHOODNOVSKY [9], certaines propriétés arithmétiques des dérivées de la fonction modulaire $j(\tau)$, et leur lien avec les constantes de la théorie des fonctions elliptiques. Dans la seconde partie (§ 4 à § 6), nous établissons une version p-adique du résultat de CHOODNOVSKY, et nous proposons quelques conjectures.

1. Introduction.

Soit

$$J(q) = (1 + 240 \ \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}(n^3 q^n/(1 - q^n)))^3/(q(\sum_{n=1}^{+\infty}(1 - q^n))^{24})$$

le développement de Fourier à l'infini de la fonction invariant modulaire $j(\tau)$. L'expression $J(q)$ définit, tant dans le domaine complexe que dans un domaine ultramétrique $\underset{\sim}{C}_p$, une fonction analytique sur le disque unité "ouvert" privé de l'origine. Cette fonction vérifie une équation différentielle algébrique du troisième ordre par l'opérateur de dérivation

$$\theta = q\, d/dq .$$

Nous nous proposons ici d'étudier certaines propriétés arithmétiques des valeurs de ses deux premières dérivées. Nous obtiendrons en particulier le résultat suivant.

THÉORÈME 1 (resp. 1(p)). - *Si q désigne un nombre complexe (resp. un élément de $\underset{\sim}{C}_p$), où J est définie et prend une valeur algébrique différente de 0 ou de 1728 (resp. une valeur algébrique), les nombres $\theta J(q)$ et $\theta^2 J(q)$ sont algébriquement indépendants sur $\underset{\sim}{Q}$.*

Dans le cas complexe, l'assertion est un corollaire immédiat de récents travaux de G. CHOODNOVSKY [9] sur les périodes et les pseudo-périodes de fonctions elliptiques de Weierstrass. Ce lien tient à quelques formules classiques, que nous rappelons au § 2. La situation peut être précisée dans le cas de multiplication complexe (§ 3), où l'on dispose de plus d'une relation d'algébricité. Cette relation, de nature modulaire, a été généralisée par SHIMURA [19] ; elle équivaut à un énoncé de nature elliptique obtenu par MASSER [14], et BROWNAWELL-KUBOTA [7].

La démarche du § 2 ne peut être suivie dans le cas ultramétrique. Reprenant l'idée de [4], nous résolvons le problème en développant la méthode de CHOODNOVSKY dans le cadre de la théorie de Jacobi-Tate (§ 4). Parallèlement à [9], nous déduisons le théorème 1(p) d'un énoncé plus général (§ 5), où apparait une fonction ξ analogue à la fonction ζ de Weierstrass.

Nous concluons, au § 6, par quelques conjectures faisant intervenir la nature arithmétique des nombres q et τ.

2. Le cas complexe.

Soient $\wp$ une fonction elliptique de Weierstrass, $\{\omega_1 , \omega_2\}$ un couple de périodes fondamentales de $\wp$ tel que $\tau = \omega_1/\omega_2$ ait une partie imaginaire > 0, $g_2 = g_2(\omega_1 , \omega_2)$ et $g_3 = g_3(\omega_1 , \omega_2)$ les invariants de la fonction $\wp$, ζ sa primitive impaire, et pour $i = 1 , 2$, $\eta_i = \eta_i(\omega_1 , \omega_2) = 2\zeta(\omega_i/2)$.

Le résultat suivant a été annoncé par G. CHOODNOVSKY (pour la démonstration, voir, par exemple, WALDSCHMIDT [21]). Nous montrons ci-desous comment il entraîne le théorème 1.

THÉORÈME 2 [9]. - *Soit u un nombre complexe, où $\wp$ est définie et prend une valeur algébrique. Si g_2 et g_3 sont algébriques, et si u est $\mathbb{Q}$-linéairement indépendant de ω_2, les nombres η_2/ω_2 et $\zeta(u) - (\eta_2/\omega_2)u$ sont algébriquement indépendants.*

En vertu de la relation de Legendre :

$$\eta_2 \tau - \eta_1 = 2i\pi/\omega_2 ,$$

le théorème 2 entraîne, pour $u = \omega_1/2$, le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1 [9]. - *Si g_2 et g_3 sont algébriques, les nombres η_2/ω_2 et π/ω_2 sont algébriquement indépendants.*

Soit $j(\tau) = 1728/(1 - 27\, g_3^2/g_2^3)$ l'invariant modulaire de la fonction $\wp$. L'application $\tau \longrightarrow j(\tau)$ définit une fonction analytique sur le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} , \ \mathrm{Im}\, z > 0\}$. On a, en désignant d'une apostrophe l'opérateur de dérivation $d/d\tau$,

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{j'(\tau)}{2i\pi\, j(\tau)} = 18\left(\dfrac{\omega_2}{2i\pi}\right)^2 \dfrac{g_3(\omega_1 , \omega_2)}{g_2(\omega_1 , \omega_2)} \\[2ex] \dfrac{j''(\tau)}{2i\pi\, j'(\tau)} = -\, 2\, \dfrac{\omega_2}{2i\pi}\, \dfrac{\eta_2}{2i\pi} + W(j(\tau))\left(\dfrac{\omega_2}{2i\pi}\right)^2 \dfrac{g_3(\omega_1 , \omega_2)}{g_2(\omega_1 , \omega_2)}\, j(\tau) \end{cases} ,$$

où $W(j(\tau)) = (12/j(\tau)) + (9/(j(\tau) - 1728))$.

Nous rappelons plus bas la démonstration de ces formules classiques.

En dehors des zéros de la fonction j', le corollaire 1 est donc équivalent à l'assertion suivante.

COROLLAIRE 2. - *Soit τ un élément de $\mathcal{H}$ non-zéro de j'. Si $j(\tau)$ est algébrique, les nombres $j'(\tau)/2i\pi$ et $j''(\tau)/(2i\pi)^2$ sont algébriquement indépendants.*

Comme il est bien connu, les seuls zéros de j' sont les images des racines quatrièmes (resp. sixièmes) de l'unité par l'action du groupe modulaire $SL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathcal{H}$. En ces points, la fonction $j(\tau) - 1728$ (resp. $j(\tau)$) a un zéro d'ordre 2 resp. 3). De plus, on a, pour $q = \exp 2i\pi\tau$, $j(\tau) = J(q)$, et l'opérateur $(1/2i\pi)d/d\tau$ est transformé, par ce changement de variable, en θ. Le théorème 1 équivaut donc au corollaire 2, et est démontré.

Démonstration des formules (1). - Soient P, Q et R les séries d'Eisenstein normalisées de poids 2, 4 et 6. On a, en reprenant les notations précédentes,

$$Q(q) = 12\ g_2(2i\pi\tau\ ,\ 2i\pi) = 12(\omega_2/2i\pi)^4\ g_2(\omega_1\ ,\ \omega_2)$$

$$R(q) = -\ 216\ g_3(2i\pi\tau\ ,\ 2i\pi) = -\ 216(\omega_2/2i\pi)^6\ g_3(\omega_1\ ,\ \omega_2)\ ,$$

et (voir, par exemple, [10], I, chap. 4, § 9, formule 9)

$$P(q) = -\ 12\ \eta_2(2i\pi\tau\ ,\ 2i\pi)/2i\pi = -\ 12(\omega_2/2i\pi)(\eta_2(\omega_1\ ,\ \omega_2)/2i\pi)\ .$$

La stabilité de l'algèbre $\mathbb{Q}[P\ ,\ Q\ ,\ R]$, par l'opérateur θ (voir, par exemple, SWINNERTON-DYER [1], lemme 3) :

$$12\ \theta P = P^2 - Q\ ;\quad 3\ \theta Q = PQ - R\ ;\quad 2\ \theta R = PR - Q^2\ ,$$

entraîne, par dérivation logarithmique de la relation $J = 1728 \times Q^3/(Q^3 - R^2)$,

$$\theta J/J = -\ R/Q\ ,$$

$$\theta^2\ J/\theta J = P/6 + 2\ \theta J/(3J) - Q^2/(2R)\ ,$$

soit

$$j'(\tau)/(2i\pi\ j(\tau)) = 18(\omega_2/2i\pi)^2\ g_3/g_2\ ,$$

$$j''(\tau)/(2i\pi\ j'(\tau)) = (-\ 2\ \eta_2\ \omega_2/(2i\pi)^2) + (\omega_2/2i\pi)^2\ (g_3/g_2)\ w(g_2\ ,\ g_3)\ ,$$

avec :

$$w(g_2\ ,\ g_3) = 12 + (g_2^3/3g_3^2) = 12 + (9j/(j - 1728)) = j\ W(j)\ .$$

Remarque 1. - Une troisième dérivation fournit l'équation différentielle algébrique satisfaite par la fonction $J(q)$:

$$12\ \theta\left(\frac{6\ \theta^2\ J}{\theta J} - (\theta J)\left(\frac{4}{J} + \frac{3}{J - 1728}\right)\right) = \left(\frac{6\ \theta^2\ J}{\theta J} - (\theta J)\left(\frac{4}{J} + \frac{3}{J - 1728}\right)\right)^2 - \frac{(\theta J)^2}{J(J - 1728)}\ .$$

3. Le cas de multiplication complexe.

Il s'agit, dans la situation décrite au § 2, du cas où τ est quadratique sur $\mathbb{Q}$. Nous notons $N\tau = \tau\bar{\tau} = \tau(\tau - 2i\ \mathrm{Im}\ \tau)$ sa norme sur $\mathbb{Q}$.

L'énoncé suivant a été établi par MASSER (voir [14], chap. III, et appendice 1), et, de façon moins précise, par BROWNAWELL et KUBOTA [7].

PROPOSITION 1 [14]. - *Si $\wp$ admet une multiplication complexe, il existe un élément $\varkappa = \varkappa(\omega_1\ ,\ \omega_2)$ du corps $\mathbb{Q}(\tau\ ,\ g_2\ ,\ g_3)$ tel que :*

$$\tau\eta_1 - (N\tau)\eta_2 = \varkappa\omega_1\ .$$

De plus, le nombre $\psi(\tau)$, défini par

$$\varkappa(\omega_1 , \omega_2) = 2i \ \mathrm{Im}\ \tau \frac{g_3(\omega_1 , \omega_2)}{g_2(\omega_1 , \omega_2)} \psi(\tau) ,$$

appartient au corps $\underset{\sim}{Q}(j(\tau))$.

La proposition 1, jointe à la relation de Legendre, entraîne

$$(\tau^2 - N\tau)\eta_2 = (2i\pi\tau/\omega_2) + \varkappa(\omega_1 , \omega_2)\tau\omega_2 ,$$

soit

$$2i(\mathrm{Im}\ \tau)\eta_2 \ \omega_2/(2i\pi)^2 = (1/2i\pi) + \varkappa(\omega_2/2i\pi)^2 .$$

En vertu des formules (1), cette relation s'écrit, pour $j'(\tau) \neq 0$,

$$- \frac{j''(\tau)}{2i\pi\ j'(\tau)} = \frac{1}{2i\pi(i\ \mathrm{Im}\ \tau)} - \frac{j'(\tau)}{2i\pi\ j(\tau)} \lambda(\tau)\ j(\tau) ,$$

où $j(\tau)\ \lambda(\tau) = (-\ 1/18)(2\ \psi(\tau) - j(\tau)\ W(\tau))$,

soit

(2)
$$\frac{2}{3}\frac{\psi(\tau)}{j(\tau)} + 6\ \lambda(\tau) = \frac{4}{j(\tau)} + \frac{3}{j(\tau) - 1728} .$$

En dehors des zéros de j' , la proposition 1 est ainsi équivalente à l'assertion suivante, dont la première partie est classique (voir, par exemple, la dernière remarque de l'article de SIEGEL [20]).

PROPOSITION 2. - Soit τ un élément de $\mathcal{H}$ quadratique sur $\underset{\sim}{Q}$. Alors, les nombres $j'(\tau)$, $j'(\tau)^2$ et $j''(\tau)$ sont linéairement dépendants sur le corps $\underset{\sim}{Q}(\tau , j(\tau))$. De plus, si τ n'est pas zéro de j' , le nombre $\lambda(\tau)$, défini par

$$j''(\tau) - (i\ j'(\tau)/\ \mathrm{Im}\ \tau) = \lambda(\tau)(j'(\tau))^2 ,$$

appartient au corps $\underset{\sim}{Q}(j(\tau))$.

La proposition 2, jointe au corollaire 2 du théorème 1, fournit un nouvel énoncé d'indépendance algébrique. Bien entendu, celui-ci est également une conséquence du résultat antérieur de CHOODNOVSKY sur le degré de transcendance du corps $\underset{\sim}{Q}(\omega_1 , \omega_2 , \eta_1 , \eta_2)$ (voir [5], (7)).

COROLLAIRE 3. - Si τ désigne un élément de $\mathcal{H}$, quadratique sur $\underset{\sim}{Q}$, où j' ne s'annule pas, les nombres π et $j'(\tau)$ sont algébriquement indépendants.

Les propositions 1 et 2 appellent quelques remarques.

Remarque 2. - La proposition 2 montre, en particulier, que le nombre $\lambda(\tau)$, défini pour $j'(\tau) \neq 0$, appartient au corps $\underset{\sim}{Q}(\tau)_{ab}$, où K_{ab} désigne l'extension abélienne maximale du corps de nombres K . Ce fait a été généralisé par SHIMURA dans [19]. Voici un cas particulier de son résultat : soient r et e deux entiers $\geqslant 0$, et, pour tout entier $m > 0$, $\mathfrak{A}_m$ l'ensemble des fonctions modulaires (pour le groupe $SL_2(\underset{\sim}{Z})$) qui s'écrivent comme quotient de deux formes modulaires, de poids respectifs $m + 2n$ et $2n$ (pour un entier $n \geqslant 0$), dont les developpements de Fourier à l'infini ont des coefficients cyclotomiques (i. e. appartenant à

$\underset{\sim}{Q}_{ab}$). Soient $f \in \mathfrak{A}_r$, $g \in \mathfrak{A}_{r+2e}$, et posons :

$$h(z) = \frac{1}{(2i\pi)^e}\left[\left(\frac{r+2(e-1)}{2i \text{ Im } z} + \frac{d}{dz}\right)\ldots\left(\frac{r+2}{2i \text{ Im } z} + \frac{d}{dz}\right)\left(\frac{r}{2i \text{ Im } z} + \frac{d}{dz}\right)\right]f \ .$$

Dans ces conditions, si τ désigne un élément de $\mathcal{H}$, quadratique sur $\underset{\sim}{Q}$, où f , g et g^{-1} sont holomorphes, le nombre $h(\tau)/g(\tau)$ appartient à $\underset{\sim}{Q}(\tau)_{ab}$.

Appliquant ce résultat aux fonctions $f = j'/2i\pi$, qui appartient à $\mathfrak{A}_2$ (elle s'écrit : $1728\ RQ^2/(Q^3 - R^2)$), et $g = f^2$, on obtient la relation de la proposition 2 :

$$(j''(\tau)/(2i\pi)^2) + (j'(\tau)/((2i\pi)^2\ i \text{ Im } \tau)) = \lambda(\tau)(j'(\tau)/2i\pi)^2 \ ,$$

avec $\lambda(\tau) \in \underset{\sim}{Q}(\tau)_{ab}$. Le théorème III de [19] permet de plus de préciser la nature arithmétique de $\lambda(\tau)$.

<u>Remarque</u> 3. – Posons, avec les notations de la proposition 1,

$$S = S(\omega_1 \ , \ \omega_2) = (6i/\text{Im } \tau)\ \varkappa(\omega_1 \ , \ \omega_2) = -\ 12(g_3/g_2)\ \psi(\tau) \ ,$$

de sorte que

$$\frac{-\ S}{12} = \frac{\varkappa}{2i \text{ Im } \tau} = \frac{\eta_2}{\omega_2} - \frac{2i\pi\bar{\omega}_2}{\omega_2(\omega_1\ \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1\ \omega_2)} \ .$$

D'après les travaux de HECKE (voir, par exemple, [11] (1), remarque 1.3.11), l'expression ci-dessus n'est autre que la fonction

$$-\ \frac{1}{12}\ S(\omega_1 \ , \ \omega_2) = \lim_{s\to 0} \sum_{(n_1,n_2)\neq(0,0)} \frac{1}{(n_1\ \omega_1 + n_2\ \omega_2)^2 |n_1\ \omega_1 + n_2\ \omega_2|^{2s}} \ .$$

Vue en ces termes, la proposition 1 semble bien connue. Une formule classique (voir par exemple [16], (7)) montre que $(g_2/g_3)\ S(\omega_1 \ , \ \omega_2)$ appartient au corps de classes de Hilbert $\underset{\sim}{Q}(\tau \ , \ j(\tau))$ de $\underset{\sim}{Q}(\tau)$. Ainsi que me l'a fait remarquer G. ROBERT, on peut alors se ramener, par l'automorphisme d'Artin, au cas où $j(\tau)$ est réel ; elle entraîne dans ce cas que $(g_2/g_3)S$ est réel, donc appartient à $\underset{\sim}{Q}(j(\tau))$.

<u>Remarque</u> 4. – La proposition 1 montre l'existence d'un élément

$$\alpha = -\ \varkappa/(2i \text{ Im } \tau) = S/12$$

du corps $\underset{\sim}{Q}(g_2 \ , \ g_3 \ , \ \tau)$ tel que

$$\omega_1 = \tau\omega_2 \ , \quad \eta_1 + \alpha\omega_1 = \bar{\tau}(\eta_2 + \alpha\omega_2) \ .$$

La cohomologie de De Rham sur la courbe elliptique associée à $\mathfrak{p}$ (voir KATZ [1], appendice 1, et [11], lemme 1.3.1) fournit une interprétation naturelle de ces formules. Précisons qu'en vertu du lemme 3.2 de MASSER [14], le nombre α ne s'annule que si $g_2\ g_3 = 0$, i. e. si τ est zéro de j' .

(1) Dans [11], c'est ω_2/ω_1 que l'on choisit de partie imaginaire > 0 ; mais le signe des pseudo-périodes est inversé (formule 1.2.4). D'autre part, le calcul de l'aire du réseau est, à la formule 1.3.2, incorrectement reproduit.

4. Quelques fonctions liées aux courbes de Tate.

Dans ce qui suit, p désigne un nombre premier, et $\underset{\sim}{C}_p$ le complété de la clôture algébrique du corps des nombres p-adiques. On note $|\ |$ la valeur absolue de $\underset{\sim}{C}_p$, et q un élément de $\underset{\sim}{C}_p$ tel que $0 < |q| < 1$. D'après la théorie de Tate, le nombre $J(q)$, défini au § 1, est l'invariant modulaire d'une courbe elliptique (E_q) isomorphe à $\underset{\sim}{C}_p^\times/\langle q\rangle$, où $\langle q\rangle$ désigne le sous-groupe du groupe multiplicatif $\underset{\sim}{C}_p^\times$ engendré par q. Comme $J(q)$ (ainsi, d'ailleurs, que $\theta J(q)$) a une valeur absolue > 1, la courbe (E_q) n'admet pas de multiplication complexe.

Le théorème 1(p) a été démontré dans [6]. Nous le déduirons ici d'un énoncé plus général (théorème 2(p), § 5) qui fait pendant au théorème 2, et pour lequel nous construisons tout d'abord un analogue de la fonction $\zeta(Z) - (\eta_2/\omega_2)Z$. Cette construction est rendue possible par le fait que les fonctions $\wp(Z)$ et $\zeta(Z)-(\eta_2/\omega_2)Z$ ont une période commune. Signalons à ce propos que la démarche exposée plus bas est universelle, en ce sens qu'on peut également la suivre pour traiter le cas complexe.

Afin de paramétrer un modèle de (E_q) défini sur le corps $\underset{\sim}{Q}(J(q))$ (voir formule (3) ci-dessous), nous introduisons le représentant $(\theta J(q)/J(q))^{-1}$ de l'invariant de Hasse de E_q (voir [17], p. 71), et nous posons, avec les notations du § 2,

$$\gamma = \gamma(q) = (Q(q)/R(q))^{1/2} = (-\ \theta J(q)/J(q))^{-1/2}$$

$$\varepsilon = \varepsilon(q) = \gamma^2(q)\ P(q)/12 = Q(q)\ P(q)/(12\ R(q)) .$$

Soit $\Theta = \Theta_q$ la fonction analytique sur $\underset{\sim}{C}_p^\times$, définie par

$$\Theta(z) = \gamma^{-1}(1 - z^{-1}) \prod_{n\geqslant 1}[1 - q^n\ z)(1 - q^n\ z^{-1})/(1 - q^n)^2] .$$

[A un facteur près, la fonction Θ_q correspond, dans le cas complexe, à

$$\exp(-(1/2)(\eta_2/\omega_2)Z^2 - i\pi Z/\omega_2)\ \sigma(Z) ,$$

où σ désigne la fonction σ de Weierstrass associée au couple $\{\omega_1 , \omega_2\}$, et où l'on a posé $z = \exp 2i\pi(Z/\omega_2)$, $q = \exp 2i\pi(\omega_1/\omega_2)$.]

Nous définissons (2) alors les fonctions $\xi = \xi_q$ et $\varphi = \varphi_q$ par

$$\Delta\Theta/\Theta = \xi - \gamma/2$$

$$\Delta\xi = -\ \varphi + \varepsilon ,$$

où $\Delta = \Delta_q$ désigne l'opérateur de dérivation

$$\Delta = \gamma z\ d/dz .$$

[La fonction ξ/γ (resp. φ/γ^2) est la fonction $\zeta + 1/2$ (resp. $\wp + 1/12$, formule (26)) de [17].]

Les fonctions φ et $\Delta\varphi$ engendrent le corps $\mathfrak{F}_q$ des fonctions analytiques sur

(2) Dans [6], ξ désigne la dérivée logarithmique de Θ. La dernière assertion de cette note concerne la fonction ξ définie ci-dessus.

$\underset{\sim}{C}_p^\times$ admettant q pour période (multiplicative), et vérifient :

$$(3) \qquad (\Delta\varphi)^2 = 4\varphi^3 - \frac{J(q)}{12(J(q) - 1728)}\varphi + \frac{J(q)}{216(J(q) - 1728)} .$$

La fin de ce paragraphe est consacrée à certaines relations fonctionnelles qui seront utilisées dans la démonstration du théorème 2(p) (voir [21] pour leurs analogues complexes). On désigne par m un entier $\geqslant 1$, et par $\psi_m(\varphi , \Delta\varphi)$ l'élément de $\mathfrak{F}_q$ qui correspond, sur (E_q), à la fonction rationnelle ψ_m définie dans [8] (lemme 7.2). Son carré vaut :

$$\psi_m^2(\varphi) = m^2 \prod_{\substack{0\leq\lambda,\mu<m \\ (\lambda,\mu)\neq(0,0)}} (\varphi - \varphi(\zeta_m^\lambda q_m^\mu)) ,$$

où ζ_m désigne une racine primitive m-ième de l'unité, et q_m une racine m-ième de q.

La relation $\Theta(q^{-1} z) = - z\,\Theta(z)$ entraîne :

$$\Theta(q^{-m} z) = (- 1)^m q^{-m(m-1)/2} z^m \Theta(z) ,$$

et montre que la fonction $\Theta(z^m)/(z^{m(m-1)/2}\Theta(z)^{m^2})$ appartient à $\mathfrak{F}_q$. Comme elle a le même diviseur que $\psi_m(\varphi , \Delta\varphi)$, le théorème d'Abel-Jacobi ([17], proposition 1) montre qu'elle lui est proportionnelle. On calcule le facteur de proportionnalité en multipliant la relation par $(1 - z^{-1})^{m^2-1}$ et en faisant tendre z vers 1. On obtient

$$\Theta(z^m) = (- 1)^{m-1} z^{m(m-1)/2} \Theta(z)^{m^2} \psi_m(\varphi(z) , \Delta\varphi(z)) .$$

<u>Remarque</u> 5. - Cette formule fournit une interprétation élémentaire du symbole introduit par NERON dans [15].

En dérivant les relations précédentes, on obtient :

$$\xi(q^{-m} z) = \xi(z) + m\gamma$$

$$\xi(z^m) = m\,\xi(z) + \frac{1}{m}\frac{\Delta(\psi_m(\varphi(z) , \Delta\varphi(z)))}{\psi_m(\varphi(z) , \Delta\varphi(z))} ,$$

et, bien entendu :

$$\varphi(q^{-m} z) = \varphi(z)$$

$$\varphi(z^m) = \Phi_m(\varphi(z))/\psi_m^2(\varphi(z)) ,$$

où Φ_m désigne la fonction rationnelle définie dans [8] (lemme 7.2).

Ces relations fonctionnelles, jointes à un lemme technique sur les algèbres différentielles de type fini, entraînent le résultat suivant. Rappelons que la hauteur $H(f)$ d'un polynôme f à coefficients entiers algébriques désigne le maximum des différentes valeurs absolues archimédiennes de ses coefficients.

LEMME 1. - <u>On suppose que</u> $J(q)$ <u>appartient à un corps de nombres</u> K, <u>d'anneau d'entiers</u> O_K, <u>et on note</u> u <u>un point de</u> $\underset{\sim}{C}_p^\times$, <u>où</u> φ <u>et</u> $\Delta\varphi$ <u>sont définies et</u>

prennent des valeurs dans K. Il existe un entier rationnel $C = C(q, u) > 0$, effectivement calculable en fonction de q et de u, et vérifiant la propriété suivante. Soient $L \geqslant 1$, $m \geqslant 1$ et $k \geqslant 0$ trois entiers tels que u^m n'appartienne pas à $\langle q \rangle$, et P un élément de $O_K[X_1, X_2, X_3]$, de degrés partiels $\leqslant L$, de hauteur $H(P) = H$. Alors, la fonction $F = P(\varepsilon, \varphi, \xi)$ est analytique au voisinage des points u et u^m, et vérifie :

$$C^{Lm^2+k} m^{L+k} \Delta^k F(u^m) = R_{k,m,F}(\varepsilon, \xi(u)) + \sum_{0 \leqslant s < k} r_{s,m}(u) \Delta^s F(u^m),$$

où les fonctions $r_{s,m}$ sont analytiques au voisinage de u, et $R_{k,m,F}$ désigne un élément de $O_K[X_1, X_2]$, de degrés partiels $\leqslant 2L$, tel que

$$H(R_{k,m,F}) \leqslant H\, C^{Lm^2+k} (Lm^2 + k)^k .$$

Démonstration. - En vertu des relations fonctionnelles décrites plus haut, la fonction $m^L \psi_m^{3L}(\varphi, \Delta\varphi)(z) F(z^m)$ s'écrit comme un polynôme P_m en $\varphi(z)$, $\Delta\varphi(z)$, ε et $\xi(z)$. L'analogue, sur le modèle de Tate, du lemme 3 de [3] permet d'évaluer

$$R_{k,m,F} = \Delta^k P_m(\varphi(z), \Delta\varphi(z), \varepsilon, \xi(z)) .$$

On conclut par la formule de Leibniz.

5. Le cas ultramétrique.

On reprend les notations φ_q, ξ_q, $\gamma(q)$ et $\varepsilon(q)$ introduites au § 4.

THÉORÈME 2(p). - Soit q un élément de $\mathbb{C}_p^\times$, $|q| < 1$, où J prend une valeur algébrique. Si u désigne un élément de $\mathbb{C}_p^\times$, non racine de l'unité, où φ_q est définie et prend une valeur algébrique, les nombres $\varepsilon(q)$ et $\xi_q(u)$ sont algébriquement indépendants.

La relation $\Theta(z^{-1})/\Theta(z) = (1 - z)/(1 - z^{-1})$ montre que

$$\xi(z^{-1}) + \xi(z) = 0 ,$$

d'où, par pseudo-périodicité, $\xi(q^{-1/2}) = \gamma/2$ (alors que $\xi(-1) = 0$). Pour $u = q^{-1/2}$, le théorème 2(p) entraîne donc le résultat suivant, dont une démonstration directe a été donnée dans [6].

COROLLAIRE 4. - Si $J(q)$ est algébrique, les nombres $\xi(q)$ et $\gamma(q)$ sont algébriquement indépendants.

D'après la définition de ε et de γ (§ 4) et les formules rappelées au § 2, ce corollaire équivaut au théorème 1(p).

Nous esquissons maintenant la démonstration du théorème 2(p). Nous notons K le corps de nombres $\mathbb{Q}(J(q), \varphi(u), \Delta\varphi(u))$, et nous supposons que, contrairement à sa conclusion, le corps $K(\xi(u), \varepsilon)$ a un degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ égal à 1. D'après le lemme suivant, c'est donc une extension algébrique de $K(\varepsilon)$.

LEMME 2. - Si $J(q)$ est algébrique, $\varepsilon(q)$ est transcendant.

Démonstration. - Le théorème 1 de [4] est encore valable lorsqu'on y remplace l'opérateur de dérivation $z(d/dz)$ par Δ_q. Or les fonctions φ et ξ sont algébriquement indépendantes, et d'ordre inférieur à tout nombre réel > 0. Le corps $\mathbb{Q}(J(q)\,,\ \varphi(-1)\,,\ \Delta\varphi(-1)\,,\ \varepsilon(q)\,,\ \xi(-1))$ a donc un degré de transcendance $\geqslant 1$. Mais c'est une extension algébrique de $\mathbb{Q}(J(q)\,,\ \varepsilon(q))$.

Dans ce qui suit, les lettres c_1, c_2, ... désignent des nombres réels > 0 effectivement calculables en fonction de q et de u, et n est un entier rationnel $\geqslant c_1$. Le principe des tiroirs de Dirichlet, joint au lemme 1, permet de construire un élément P de $O_K[X_1\,,\ X_2\,,\ X_3]$, de degré $\leqslant L$, où

$$L = n^2[\log n]^6\ ,$$

de hauteur $\leqslant c_2^{n^4(\log n)^5}$, tel que, si l'on pose

$$k = n^3[\log n]^{11}\ ,$$

la fonction $F = P(\varepsilon\,,\ \varphi\,,\ \xi)$ vérifie, pour tout entier m tel que $1 \leqslant m \leqslant n$ et u^m n'appartienne pas à $\langle q\rangle$, et tout entier s tel que $0 \leqslant s < k$,

$$\Delta^s\, F(u^m) = 0\ .$$

Pour tout entier $\ell \geqslant 0$, notons C_ℓ la couronne $\{z \in \mathbb{C}_p^\times\ ;\ |q|^\ell < |z| < |q|^{-\ell}\}$. D'après le lemme de [6] (§ 2), la fonction F admet au plus $c_3(L^2 + Ln)$ zéros (comptés avec leurs ordres de multiplicité) sur C_n. Il existe un entier $k_0 \leqslant K$, où $K = c_4\, n^3[\log n]^{12}$, tel que l'un au moins des points u^m considérés plus haut, soit u^{m_0}, soit zéro d'ordre k_0 de F.

La fonction $\Theta^{3L}\, F$ est analytique sur $\mathbb{C}_p^\times$. Le lemme 2 de [4] (lemme de Schwarz pour les couronnes emboitées), appliqué aux couronnes C_h et C_{2h}, avec $h = n^2[\log n]^4$, entraîne donc :

$$|\Delta^{k_0}\, F(u^{m_0})| < q^{-knh/4}\, c_5^{Lh^2+Kn}\ ,$$

$$|\Delta^{k_0}\, F(u^{m_0})| \leqslant c_6^{-n^6(\log n)^{15}}\ .$$

La norme de $\Delta^{k_0}\, F(u^{m_0})$, relativement à l'extension $K(\varepsilon\,,\ \xi(u))$ de $\mathbb{Q}(\varepsilon)$, fournit, après en avoir chassé les dénominateurs, un élément P_n de $\mathbb{Z}[X]$, tel que

$$|P_n(\varepsilon)| < c_7^{-n^6(\log n)^{15}}$$

$$d^\circ(P_n) \leqslant c_8\, L = c_8\, n^2[\log n]^6$$

$$H(P_n) \leqslant c_9^{Ln^2+K\log K} \leqslant c_{10}^{n^4(\log n)^6}$$

En vertu du lemme 10 de [2] (analogue p-adique du critère de transcendance de Gel'fond), l'existence d'une suite de polynômes $\{P_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\,,\ n \geqslant c_1\}$ vérifiant les propriétés ci-dessus entraîne que le nombre ε est algébrique sur $\mathbb{Q}$, ce qui contredit le lemme 2.

6. Questions ouvertes.

En dehors du résultat de SCHNEIDER [18] selon lequel les nombres τ et $j(\tau)$ ne peuvent être simultanément algébriques que dans le cas de multiplication complexe, on connait peu de choses sur les propriétés de transcendance de l'argument τ. La conjecture suivante concerne $\exp 2i\pi\tau$. Elle a été proposée par MANIN dans le cas ultramétrique, et par MAHLER et MANIN dans le cas complexe.

CONJECTURE 1 (resp. 1(p))([13], I, § 4 et [12]). - Soit q un nombre complexe (resp. un élément de $\mathbb{C}_p$) algébrique sur $\mathbb{Q}$, où J est définie. Alors, $J(q)$ est transcendant.

Signalons que les hypothèses de cette conjecture excluent le cas de multiplication complexe : c'est évident dans le cas ultramétrique (voir le premier alinéa du § 4); dans le cas complexe, c'est une conséquence du théorème de Gel'fond-Schneider ($q = \exp 2i\pi\tau$ est transcendant si τ est algébrique et irrationnel).

Une façon d'aborder la conjecture 1 consisterait à montrer que si le nombre $J(q)$ est algébrique, alors, les nombres q, $\theta J(q)$ et $\theta^2 J(q)$ sont algébriquement indépendants (on peut alors faire intervenir, comme "fonction auxiliaire", un polynôme en q, ε, z, $\varphi(z)$, $\xi(z)$ et $\Theta(z)$). Dans cet esprit, nous proposons la conjecture plus générale suivante.

CONJECTURE 2 (resp. 2(p)). - Soit q un nombre complexe (resp. un élément de $\mathbb{C}_p$) algébrique sur $\mathbb{Q}$, où J est définie. Alors, les nombres $J(q)$, $\theta J(q)$ et $\theta^2 J(q)$ sont algébriquement indépendants.

Revenons, pour terminer, sur le cas de multiplication complexe. L'expression $\lambda(\tau)$ définie par la proposition 2 (ou la formule (2)) se prolonge par continuité en une fonction analytique réelle, que nous noterons encore λ, sur le demi-plan de Poincaré privé de l'ensemble des zéros de j'. Dans [11] (4.0.8), KATZ pose la question suivante : si $g_2(\omega_1, \omega_2)$, $g_3(\omega_1, \omega_2)$ et $S(\omega_1, \omega_2)$ (voir § 3, remarque 3) sont simultanément algébriques, le nombre ω_1/ω_2 est-il nécessairement quadratique sur $\mathbb{Q}$? D'après les calculs du § 3, cette question est équivalente au problème suivant, que nous proposons sous forme de conjecture.

CONJECTURE 3. - Soit τ un élément de $\mathcal{H}$, où λ est définie. Les fonctions j et λ ne peuvent prendre simultanément des valeurs algébriques au point τ que dans le cas de multiplication complexe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Modular functions of one variable, III, Proceedings international summer school [1972, Antwerpen]. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 350).

[2] ADAMS (W. W.). - Transcendantal numbers in the p-adic domain, Amer. J. Math., t. 88, 1966, p. 279-308.

[3] BAKER (A.). - On the quasi-periods of the Weierstrass ζ-function, Nach. Akad. Wiss. Göttingen, Math-phys. Kl., t. 2, 1969, p. 145-157.

[4] BERTRAND (D.). - Séries d'Eisenstein et transeendance, Bull. Soc. math. France, t. 104, 1976, p. 309-321.

[5] BERTRAND (D.). - Transcendance de valeurs de la fonction gamma, d'après G. V. Čudnovskij, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des Nombres, 17e année, 1975/76, n° G8, 5 p.

[6] BERTRAND (D.). - Modular functions and algebraic independence,"Proceedings of a Conference on p-adic analysis [1978,Nijmegen]" (à paraître).

[7] BROWNAWELL (D.) and KUBOTA (K.). - The algebraic independence of Weierstrass functions and some related members, Acta Arithm., Warszawa, t. 33, 1977, p. 111-149.

[8] CASSELS (J. W. S.). - Diophantine equations with special reference to elliptic curves, J. London math. Soc., t. 41, 1966, p. 193-291.

[9] CHOODNOVSKY (G. V.). - Transcendance arising from exponential and elliptic functions, Colloquium de Mathématiques des Universités parisiennes, 1977.

[10] FRICKE (R.). - Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen. Vol. 1 : Die Funktionentheoretischen und analytischen Grundlagen. - Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1916.

[11] KATZ (N. M.). - p-adic interpolation of real analytic Eisenstein series, Annals of Math., Series 2, t. 104, 1976, p. 459-571.

[12] MAHLER (K.). - On the coefficients of the 2^n-th transformation polynomial for $j(\omega)$, Acta Arithm., Warszawa, t. 21, 1972, p. 89-97.

[13] MANIN (Yu. I.). - Corps cyclotomiques et courbes modulaires [en russe], Uspekhi Mat. Nauk, t. 26, 1971, p. 7-71.

[14] MASSER (D.). - Elliptic functions and transcendance. - Berlin, Springer-Verlag, 1975 (Lecture Notes in Mathematics, 437).

[15] NÉRON (A.). - Hauteurs et fonctions thêta, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, t. 46, 1976, p. 111-135.

[16] ROBERT (G.). - Nombres de Hurwitz et unités elliptiques, Thèse Université Paris-Sud, Orsay, 1977.

[17] ROQUETTE (P.). - Analytic theory of elliptic functions over local fields. - - Göttingen, Vandenboeck und Ruprecht, 1970 (Hamburger mathematische Einzelschriften, Neue Folge, 1).

[18] SCHNEIDER (T.). - Arithmetische Untersuchungen elliptischer Integrale, Math. Annalen, t. 113, 1937, p. 1-13.

[19] SHIMURA (G.). - On some arithmetic properties of modular forms of one and several variables, Annals of Math. Series 2, t. 102, 1975, p. 491-515.

[20] SIEGEL (C. L.). - Bestimmung der elliptischen Modulfunktion durch eine Transformationsgleichung, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, t. 27, 1964, p. 32-38.

[21] WALDSCHMIDT (M.). - Nombres transcendants : Indépendance linéaire et algébrique de périodes et pseudo-périodes, 1978 (manuscrit).

(Texte reçu le 19 juin 1978)

Daniel BERTRAND, Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique,
91128 PALAISEAU CEDEX.