Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

PIERRE LIARDET

Répartition et ergodicité

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 19, nº 1 (1977-1978), exp. nº 10, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1977-1978__19_1_A8_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU (Théorie des nombres) 19e année, 1977/78, n° 10, 12 p.

28 novembre 1977

RÉPARTITION ET ERGODICITÉ

par Pierre LIARDET

Résumé. - Soit T_f le produit croisé $(x, g) \longmapsto (Tx, g.f(x))$ sur $X \times G$, X espace de probabilités et G groupe métrique compact. On étudie l'ergodicité et le mixage de T_f ; les théorèmes classiques de H. FURSTENBERG et J. P. CONZE ([1], [3]) sont précisés par quelques améliorations appliquées à l'équirépartition. Au passage, on verra que le théorème de W. A. VEECH sur les suites génératrices de suites équiréparties (théorème 2 [13]) est inexact dans un cas (et seulement ce cas).

1. Introduction et notations.

Soit $n \longmapsto x_n$ une suite x d'éléments du tore $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}$ et, soit I un arc de $\underset{\sim}{T}$, de fonction caractéristique χ_I, de longueur $\ell(I)$. La suite x est équirépartie dans le tore si, pour tout I, la suite s des moyennes

$$n \longmapsto \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n} \chi_I(x_h)$$

converge vers $\ell(I)$. De nombreuses études ont eu pour objet de préciser le comportement asymptotique de ces moyennes. A ce sujet, l'attention se porte naturellement sur la suite σ_I définie par $\sigma_I(n) = s(n) - n\ell(I)$. Si $I = [0, a[$, W. M. SCHMIDT [11] a montré que σ_I n'est bornée que pour au plus un ensemble dénombrable de a. Nous verrons, comme conséquence d'un théorème ergotique, le résultat suivant.

(1.1) Supposons $0 < \ell(I) < 1$. Alors, pour presque toutes suites x, la suite σ_I est équirépartie dans $\underset{\sim}{Z}$.

On peut préciser. Rappelons que la suite x est dite complètement équirépartie (dans le tore $\underset{\sim}{T}$) si, pour toute suite finie $I_1, \ldots, I_k$ d'arcs de $\underset{\sim}{T}$, la suite des moyennes $N \longmapsto (1/N) \sum_{n=1}^{N} \chi_{I_1}(x_n) \ldots (\chi_{I_k}(x_{n+k-1})$ converge vers $\ell(I_1) \ldots \ell(I_k)$. D'autre part, une suite $n \longmapsto z_n$ dans un groupe abélien localement compact $\mathcal{Z}$ est dite équirépartie au sens de Hartman [5], si, pour tout caractère π de $\mathcal{Z}$, on a :

$$\lim_{N:\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \pi(z_n) = 0 .$$

Alors, nous avons le résultat suivant.

(1.2) Pour toute suite x complètement équirépartie dans $\underset{\sim}{T}$, et tout arc I de longueur non nulle et distinct de $\underset{\sim}{T}$, la suite

$$n \longmapsto (n, \sum_{h=1}^{n} \chi_I(x_h))$$

est équirépartie dans $\underset{\sim}{Z}^2$ au sens de Hartman.

Dans un autre ordre d'idée, soit θ un nombre 2-normal, de développement dyadique suivant :

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_n ,$$

et soit $k \longmapsto n_k$ la suite des entiers successifs tels que $a_{n_k} = 0$.

(1.3) La suite $k \longmapsto (n_k , k)$ est équirépartie dans $\underset{\sim}{Z}^2$ au sens de Hartman.

Ce résultat s'obtient comme cas particulier des propriétés des suites génératrices de suites équiréparties de Veech. Posons $r_k = n_{k+1} - n_k$, pour $k \geqslant 1$, alors pour toute suite $n \longmapsto z_n$ à valeurs dans un groupe compact métrisable G qui engendre un sous-groupe dense dans G , la suite w définie par $w_k = z_{r_1} \dots z_{r_k}$ est équirépartie selon la mesure de Haar dans G [13]. De plus, nous verrons en particulier le résultat suivant .

(1.4) Si $\{z_n ; n \geqslant 1\}$ est dense dans G , le spectre de w se réduit à $\{0\}$.

La notion de spectre que nous adoptons est celle donnée dans [7], très proche de celle de M. MENDÈS-FRANCE [6]. Soit $F : \underset{\sim}{N} \longrightarrow \underset{\sim}{C}$. Le spectre de F est l'ensemble des α de $\underset{\sim}{T}$ tels que

$$\limsup_{N:\infty} \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} F(n) \exp(- 2i\pi n\alpha)\right| > 0 .$$

Le spectre d'une suite u à valeurs dans un espace compact X est alors la réunion $Sp(u)$ des spectres des applications $f \circ u$, où f est élément de l'espace $\mathcal{C}(X)$ des applications continues sur X à valeurs complexes.

Dans toute la suite, Ω désignera un espace compact métrisable, $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des mesures de probabilité, boréliennes sur Ω , μ une telle mesure, G un groupe compact métrisable de mesure de Haar normalisée $\mathfrak{m}$. $\mathcal{P}(\Omega)$ sera muni de la topologie faible. Etant données les applications $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ et $\varphi : \Omega \longrightarrow G$, on définit T_φ sur $\Omega \times G$ par $T_\varphi(x , g) = (Tx , g\varphi(x))$, la loi de G étant notée multiplicativement. Nous adoptons la terminologie de H. FURSTENBERG [2]. Le triplet (Ω , T , μ) est appelé PROCESSUS, si T est μ-mesurable et μ invariante par T . Rappelons qu'un tel processus est ergodique si les seules solutions de l'équation

$$f \circ T = \alpha f \quad (\alpha \in \underset{\sim}{C} , \ f \ \mu\text{-mesurable}) , \tag{1.5}$$

avec $\alpha = 1$, sont les fonctions constantes μ-presque-partout. Il est faiblement mélangeant si (1.5) n'a que les solutions $\alpha = 1$, f constante μ-presque-partout ou α quelconque dans $\underset{\sim}{C}$ et f nulle μ-presque-partout [4].

Une application f définie sur Ω et à valeurs dans un espace topologique sera dite μ-continue, si l'ensemble D de ses points de discontinuité est μ-négligeable. f sera dite T-quasicontinue si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g : \Omega \longrightarrow [0 , 1]$, continue, telle que $g \geqslant \chi_D$ (fonction caractéristique de D) et

$$\sup_{x\in\Omega} \limsup_{N:\infty}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(T^n x)\right) \leqslant \varepsilon . \tag{1.6}$$

Cette notion a été introduite par G. RAUZY [8].

Rappelons qu'un point ω de Ω est dit (T , μ)-générique si, pour toute f

dans $\mathcal{C}(\Omega)$, on a :

$$\lim_{N:\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(T^n \omega) = \int_\Omega f \, d\mu . \tag{1.7}$$

Enfin $\Lambda(G)$ désignera un ensemble complet de représentations unitaires non triviales, irréductibles et non équivalentes entre elles, de G et H_π l'espace de Hilbert de la représentation π dans Λ . H_π est de dimension finie sur $\mathbb{C}$, de norme notée $\| \|_\pi$.

Je suis reconnaissant aux professeurs J. P. CONZE et G. RAUZY qui m'ont aidé dans ce travail par leurs remarques riches d'enseignements.

2. Ergodicité et équations fonctionnelles.

Soient (Ω , T , μ) un processus, $\varphi : \Omega \longrightarrow G$ une application μ-mesurable et envisageons les trois propositions suivantes :

(i) Si ω , élément de Ω , est (T , μ)-générique, alors (ω , g) est $(T\varphi , \mu \otimes m)$-générique pour tout g de G .

(ii) Le processus $(\Omega \times G , T\varphi , \mu \otimes m)$ est ergodique.

(iii) Pour toute π de $\Lambda(G)$, l'équation

$$X(\omega) = \pi(\varphi(\omega)).X(T\omega) , \quad \mu\text{-presque-partout} \tag{*}$$

n'a pas de solution μ-mesurable $X : \Omega \longrightarrow \mathrm{End}(H_\pi)$ autre que la solution nulle (μ-presque-partout).

Le théorème suivant est classique dans le cas continu [2] et son corollaire généralise le lemme 3 de J. P. CONZE [1].

(2.1) THÉORÈME. - Les propostions (ii) et (iii) sont équivalentes lorsque (Ω , T , μ) est ergodique. Si T et φ sont μ-continues alors (iii) implique (i). Si de plus le processus (Ω , T , μ) est ergodique, (i) implique (ii), et $\mu \otimes m$ est la seule mesure de $\mathcal{P}(\Omega \times G)$ invariante par T_φ dont la projection sur le premier facteur soit μ .

Envisageons maintenant les propositions :

(j) Il existe une mesure $\nu \in \mathcal{P}(\Omega \times G)$ telle que tout (ω , g) de $\Omega \times G$ soit (T_φ , ν)-générique.

(jj) T_φ est uniquement ergodique (l'unique mesure de $\mathcal{P}(\Omega \times G)$ invariante par T_φ étant $\mu \otimes m$).

On peut déduire du théorème précédent le theorème suivant.

(2.2) COROLLAIRE. - Si T et φ sont μ-continues, pour que T_φ soit uniquement ergodique, il faut et il suffit que T soit uniquement ergodique et $(\Omega \times G , T_\varphi , \mu \otimes m)$ ergodique. Supposons en outre que T soit T-quasicontinue, alors si T est uniquement ergodique, les propositions (j), (jj), (ii) et (iii) sont équivalentes.

Démonstration. - L'équivalence entre (ii) et (iii) est facile. Elle se montre comme dans [1]. Supposons T et φ μ-continues et la proposition (i) fausse. Soit alors ω un point (T , μ)-générique et (ω , g) non $(T\varphi , \mu \otimes m)$-générique. Le théorème de Peter-Weyl permet d'établir l'existence d'une représentation π dans $\Lambda(G)$ et d'une application continue $f : \Omega \longrightarrow H_\pi$ telle que

$$\lim \sup_{N:\infty} \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \pi.f(T^n(\omega , g)) \right\|_\pi > 0 ,$$

(où $\pi.f$ est défini par $\pi.f(x , z) = \pi(z).f(x)$). Notons que l'égalité (1.7) reste satisfaite pour toutes les applications bornées de Ω dans H_π qui sont μ-continues. Le lemme ergotique de W. VEECH [13] assure alors l'existence d'une solution non triviale $X : \Omega \longrightarrow H_\pi$ de l'équation (*) et par suite (iii) est fausse.

Dans le cas où (Ω , T , μ) est ergodique, μ-presque tout élément ω de Ω est (T , μ)-générique, et si on suppose (i), on en déduit (ii) par application du théorème ergodique individuel de Birkhoff. Désignons par A l'ensemble des mesures ν dans $\mathcal{P}(\Omega \times G)$, invariantes par T_φ et dont la projection sur le premier facteur est μ . Si λ est faiblement adhérente à A , sa projection sur le premier facteur est μ . Il en résulte que T_φ est λ-continue et un raisonnement type "intégrale de Riemann" montre que λ est invariante par T_φ . A est alors un convexe faiblement fermé (et par suite faiblement compact). On observe alors, comme dans [9], que les points extrêmaux de A le sont aussi dans l'ensemble des mesures dans $\mathcal{P}(\Omega \times G)$ invariantes par T_φ ; ils sont donc ergodiques relativement à T_φ . Supposons (i), alors ces points se réduisent au seul point $\mu \otimes m$ et par le théorème de Krein-Milman, $A = \{\mu \otimes m\}$.

La première partie du corollaire est une conséquence directe du théorème, la seconde partie s'obtient par application du lemme général suivant.

(2.3) LEMME. - Pour que T , supposée T-quasicontinue, soit uniquement ergodique, il faut et il suffit qu'il existe $\nu \in \mathcal{P}(\Omega)$ telle que tout élément de Ω soit (T , ν)-générique.

La condition du lemme pour avoir l'unique ergodicité est évidemment suffisante. Par ailleurs, pour tout ω de Ω , les valeurs d'adhérence (pour la topologie faible) de la suite des moyennes de Dirac $N \longrightarrow (1/N) \sum_{n=1}^{N} \delta_{T^n \omega}$ sont invariantes par T [8], d'où la nécessité.

Remarques.

1° Si φ est supposée continue hors d'un ensemble fermé de μ-mesure nulle comme dans [1], alors T_φ est T_φ-quasicontinue lorsque T est uniquement ergodique et T-quasicontinue.

2° On peut introduire une notion d'uniforme quasi-continuité en remplaçant la condition (1.6) par :

$$\lim \sup_{N:\infty} \sup_{x\in\Omega} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} g(T^n x)\right) \leqslant \varepsilon .$$

Si T et φ sont uniformément quasicontinues, il en est de même de T_φ et de plus la condition (j) peut être remplacée par la suivante :

(j') Pour toute $f : \Omega \times G \longrightarrow \underset{\sim}{C}$ continue, on a

$$\lim_{N:\infty} \sup_{x \in \Omega \times G} \left|\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(T_{\varphi}^{n}(x)) - \mu \otimes m(f)\right| = 0 .$$

Cela tient de l'équivalence entre (j') et (jj) qui est classique lorsque T_φ est continue. Dans le cas présent, faute de référence, nous la démontrons en annexe.

3° La démonstration de l'équivalence entre (ii) et (iii) dans (2.1) peut se généraliser aux cas des mixages et donne le résultat suivant.

(2.3) Le processus $(\Omega \times G , T_\varphi , \mu \otimes m)$ est faiblement mélangeant si, et seulement si, pour tout π de $\hat{G}(G)$ et tout nombre complexe α , l'équation

(**) $$X(\omega) = \alpha\, \pi(\varphi(\omega))\, X(T\omega) \quad \mu\text{-presque-partout.}$$

n'a pas de solution μ-mesurable $X : \Omega \longrightarrow \mathrm{End}(H_\pi)$ autre que la solution nulle μ-presque-partout.

3. Processus disjoints.

Soit Ω^* un espace compact métrisable. Pour toute mesure λ dans $\mathcal{P}(\Omega \times \Omega^*)$, notons $\lambda_{|1}$ et $\lambda_{|2}$ les mesures boréliennes images de λ par la première projection $\Omega \times \Omega^* \longrightarrow \Omega$ et deuxième projection $\Omega \times \Omega^* \longrightarrow \Omega^*$, respectivement. Disons avec H. FURSTENBERG [2] que les processus (Ω , T , μ) et (Ω^* , T^* , μ^*) sont disjoints si, pour tout processus $(\Omega \times \Omega^* , T \times T^* , \lambda)$, on a

$$(\lambda_{|1} = \mu \ \text{ et } \ \lambda_{|2} = \mu^*) \Longrightarrow (\lambda = \mu \otimes \mu^*) .$$

Le résultat suivant est classique dans le cas continu.

(3.1) Soient (Ω , T , μ) et (Ω^* , T^* , μ^*) deux processus disjoints. Supposons T et T^* respectivement μ-continue et μ^*-continue. Si ω est (T , μ)-générique et ω^* , (T^* , μ^*)-générique, alors (ω , ω^*) est $(T \times T^* , \mu \otimes \mu^*)$-générique.

En effet, si λ est une valeur d'adhérence de la suite

(*) $$N \longmapsto \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \delta_{(T^n_\omega, T^{*n}_{\omega^*})}$$

alors $\lambda_{|1} = \mu$ et $\lambda_{|2} = \mu^*$, et la régularité de λ montre que $T \times T^*$ est λ-continue. Un raisonnement standard style "intégrale de Riemann" donne l'invariance de λ par $T \times T^*$ et par suite $\lambda = \mu \otimes \mu^*$. Utilisant la séparabilité de $\mathcal{C}(\Omega \times \Omega^*)$,on en déduit la convergence de la suite (*) vers $\mu \otimes \mu^*$.

Prenons maintenant pour Ω^* un groupe compact , μ^* sa mesure de Haar et T^* la translation à droite (ou à gauche) par un élément τ de Ω^* qui engendre un sous-groupe dense dans Ω^* . Alors (Ω^* , T^* , μ^*) est appelé un processus de Kronecker ; il est ergodique, de plus on a la caractérisation suivante.

(3.2) THÉORÈME. - Pour que le processus (Ω , T , μ) soit disjoint du processus de Kronecker (Ω^*, T^*, μ^*) , il faut et il suffit que le processus produit $(\Omega \times \Omega^*, T \times T^*, \mu \otimes \mu^*)$ soit ergodique.

La démonstration de ce théorème est essentiellement la même que celle faite dans [2] avec (Ω, T, μ) faiblement mélangeant.

Dans toute la suite, $\mathfrak{h}$ désignera la mesure de Haar (normalisée) du tore $\underset{\sim}{T}$, $\mathfrak{h}_a$ celle du sous-groupe fermé $\underset{\sim}{U}_a$ engendré par a dans $\underset{\sim}{T}$, τ_a la translation de a . Le théorème suivant est classique.

(3.3) THÉORÈME. - Pour qu'un processus ergodique soit faiblement mélangeant, il faut et il suffit qu'il soit disjoint de tous les processus de Kronecker $(\tau_a, \mathfrak{h}_a, \underset{\sim}{U}_a)$, $a \in \underset{\sim}{T}$.

4. Ergodicité et suites complètement équiréparties.

Soit $f : \Omega \longrightarrow G$, μ-mesurable, d'image au plus dénombrable. On pose

$$\mathfrak{I}(f) = \{g \in G \; ; \; \mu(f^{-1}(g)) > 0\} .$$

La proposition (1.2) de l'introduction est un cas particulier de la suivante.

(4.1) Soit $f : \underset{\sim}{T} \longrightarrow \underset{\sim}{Z}$ $\mathfrak{h}$-continue telle que $\mathfrak{I}(f)$ engendre $\underset{\sim}{Z}$, et $0 \in \mathfrak{I}(f)$. Alors, pour toute suite x complètement équirépartie dans $\underset{\sim}{T}$, la suite

$$n \longrightarrow (n, \textstyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k))$$

est équirépartie dans $\underset{\sim}{Z}^2$ au sens de Hartman.

Cette proposition est une conséquence directe d'un théorème plus général. Introduisons la notion de spectre d'une partie A de G comme étant l'ensemble Sp(A) des $a \in \underset{\sim}{T}$ tels que le sous-groupe fermé engendré par $A \times \{a\}$ ne soit pas égal à $G \times \underset{\sim}{U}_a$.

(4.2) THÉORÈME. - Soit $\Omega_\infty = \Omega^{\underset{\sim}{N}}$ muni de la mesure produit μ_∞ induite par μ , $(\Omega_\infty, T, \mu_\infty)$ le shift sur Ω_∞ , et soit $f : \Omega \longrightarrow G$, μ-mesurable telle que $f(\Omega)$ soit au plus dénombrable. Notons S la transformation sur $\Omega_\infty \times G$ donnée par :

$$(\omega, g) \longmapsto (T\omega, gf(p(\omega))) ,$$

où p désigne la projection sur le premier facteur de Ω_∞ . Alors, le processus $(\Omega_\infty \times G, S, \mu_\infty \otimes \mathfrak{m})$ est

(i) ergodique si $\mathfrak{I}(f)$ engendre un sous-groupe dense dans G ;

(ii) faiblement mélangeant si, et seulement si, $Sp(\mathfrak{I}(f)) = \emptyset$.

Démonstration. - Soit $a \in \underset{\sim}{T}$ et S_a la transformation définie sur $(\Omega_\infty \times G \times \underset{\sim}{U}_a)$ par $(\omega, g, z) \longmapsto (T\omega, g.f(p\omega), z + a)$. La mesure $\lambda = \mu_\infty \otimes \mathfrak{m} \otimes \mathfrak{h}_a$ est invariante par S_a . Nous allons montrer le résultat suivant.

(4.3) λ est ergodique selon $S_a \Longleftrightarrow a \notin Sp(\mathfrak{I}(f))$.

Envisageons $X : \Omega_\infty \longrightarrow H_\pi$, solution mesurable de l'équation

$$(*) \qquad X(\omega) = \pi(f(p\omega)\ ,\ a)\ X(T\omega) \quad \mu_\infty\text{-presque-partout}$$

avec $x \in \Lambda(G \times \underset{\sim}{U}_a)$. L'ergodicité de μ_∞ relativement à T montre que $\|X\|_\pi$ est μ_∞-presque-partout égale à une constante que nous pouvons supposer être 0 ou 1 . Choisissons 1 . Prenons l'espérance conditionnelle $E(X \parallel p\ ,\ \dots\ ,\ pT^{n-1})$. La norme (dans H_π) de cette espérance converge μ_∞-presque-partout vers 1 quand n devient infini, mais par $(*)$ cette espérance vaut :

$$\pi(f(p\omega)\ \dots\ f(pT^{n-1}\ \omega)\ ,\ na)\ E(XT^n \parallel p\ ,\ \dots\ ,\ pT^{n-1})\ ,$$

ce qui donne par passage à la limite, $(\Omega_\infty\ ,\ T\ ,\ \mu_\infty)$ étant de Bernoulli,

$$\left\|\int_{\Omega_\infty} X(\omega)\ d\mu_\infty(\omega)\right\|_\pi = 1\ .$$

Il en résulte, par convexité, que X est constante presque partout. Alors, pour tout $g \in \mathfrak{I}(f)$, on a $\pi(g\ ,\ a)X = X$. Si $a \notin Sp(\mathfrak{I}(f))$, on obtient $\pi(u)X = X$, pour tout u dans $G \times \underset{\sim}{U}_a$. L'irréductibilité de π assure alors $X = 0$, contradiction. λ est donc ergodique suivant S_a . Réciproquement, si λ est ergodique, d'après le théorème (2.1), pour tout ω $(T\ ,\ \mu_\infty)$-générique, le point $(\omega\ ,\ 0\ ,\ 0)$ est $(S_a\ ,\ \lambda)$-générique. En particulier, on observe que la suite de point $z_n = (f(p\omega)\ \dots\ f(pT^{n-1}\ \omega)\ ,\ na)$ est dense dans $G \times \underset{\sim}{U}_a$. Mais, pour presque tout ω , les z_n sont dans le sous-groupe engendré par $\mathfrak{I}(f) \times \{a\}$, donc $a \notin Sp(\mathfrak{I}(f))$. La partie (ii) du théorème se déduit soit de (2.3), soit de (3.2) et (3.3). La partie (i) s'obtient en faisant $a = 0$ dans (4.3).

Utilisons maintenant la notion de processus d'entropie totalement positive ([10], [2]). D'après un théorème de R. K. THOMAS [12], on déduit le résultat suivant.

(4.4) <u>Supposons</u> $\Omega = \underset{\sim}{T}$ <u>et le processus</u> $\mathcal{S} = (\Omega_\infty \times G\ ,\ S\ ,\ \mu_\infty \otimes m)$ <u>faiblement mélangeant. Alors</u> $\mathcal{S}$ <u>est d'entropie totalement positive</u>.

Du point de vue de la disjonction, sous les hypothèses de (4.4), $\mathcal{S}$ est alors disjoint de tout processus déterministe [2]. Illustrons cet aspect en choisissant un résultat d'expression simple obtenu en utilisant l'aspect générique en (3.1), et qui généralise (1.2).

(4.5) <u>Soit</u> $n \longmapsto x_n$ <u>une suite à termes dans</u> $\underset{\sim}{T}$, <u>complètement équirépartie modulo</u> 1 , <u>et soit</u> I <u>un arc de</u> $\underset{\sim}{T}$ <u>de longueur</u> ℓ <u>telle que</u> $0 < \ell < 1$. <u>Alors, pour tout polynôme</u> P <u>à coefficients réels et tout nombre irrationnel</u> θ , <u>la suite</u> $n \longmapsto P(n) + \theta \sum_{k=1}^{n} \chi_I(x_k)$ <u>est équirépartie modulo</u> 1 .

5. Générateurs de suites équiréparties.

Une suite d'entiers $n \longmapsto q_n$ est dite s-générateur de suites équiréparties (s entier > 0) au sens de W. Veech, si, pour tout groupe compact G et toute suite $n \longmapsto z_n$ dans G telle que la famille $\{z_n\ ;\ n \geq s\}$ engendre un sous-groupe dense dans G , la suite

$$n \longmapsto z_{q_1} \dots z_{q_n}$$

est équirépartie dans G selon $\mathbf{m}$. Dans [13], W. VEECH donne des exemples de suites s-générateurs de suites équiréparties.

Quelques définitions et notations seront utiles. Pour m entier $\geqslant 2$, notons S_m la transformation de $\underset{\sim}{T}$ donnée par

$$x \longmapsto mx \pmod 1 .$$

Fixons Ω, partie de $\underset{\sim}{T}$, de frontière négligeable, de mesure $\mathfrak{h}(\Omega) > 0$. Soit $q = q_\Omega$ l'application de $\underset{\sim}{T}$ dans $\underset{\sim}{N}^* \cup \{\infty\}$ définie par :

$$q(x) = \inf\{n \in \underset{\sim}{N}^* \ ; \ S_m^n(x) \in \Omega\} .$$

Une transformation $T_\Omega : \Omega \longrightarrow \Omega$ est dite induite par S_m sur Ω si, pour $\mathfrak{h}$-presque tout x dans Ω, on a $T_\Omega(x) = S_m^{q(x)}(x)$. On note μ la mesure de probabilité induite par $\mathfrak{h}$ sur Ω. On sait que $(\Omega , T_\Omega , \mu)$ est un processus ergodique.

(5.1) THÉORÈME (W. VEECH). - Soit Ω une partie de $\underset{\sim}{T}$ d'intérieur non vide, de frontière F telle que

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\log \mathfrak{h}(F_\varepsilon)}{\log \varepsilon} > 0 ,$$

(où F_ε est le voisinage de F à ε-près pour la distance usuelle sur $\underset{\sim}{T}$ identifié à $[0 , 1[$). Si Ω satisfait à l'une des conditions

(C_1) $\Omega = [a , b]$, intervalle tel que $a \neq 0$, $b \neq 1$, et dans le cas où $m = 2$, $a \neq 1/6$ et $b \neq 5/6$;

(C_2) $\Omega \subset [1/m , 1[$ ou bien $\Omega \subset [0 , 1 - (1/m)]$;

alors pour toute suite z dans G, la transformation W définie sur $\Omega \times G$ par

$$(\omega , g) \longmapsto (T_\Omega\, \omega , g . z(q(\omega))) ,$$

détermine le processus $(\Omega \times G , W , \mu \otimes \mathbf{m})$ qui est :

(i) ergodique si, et seulement si, $0 \notin Sp(\mathfrak{I}(z \circ q))$,

(ii) faiblement mélangeant si, et seulement si, $Sp(\mathfrak{I}(z \circ q)) = \emptyset$.

Remarque 1. - Sous l'hypothèse C_1 ou C_2 du théorème, il existe un entier s tel que

$$n \geqslant s \Longrightarrow n \in Sp(\mathfrak{I}(q)) .$$

Il en résulte que, pour tout ω m-normal, la suite d'entiers $n \longmapsto q(T_\Omega^n\, \omega))$ est s-générateur de suites équiréparties. On retrouve ainsi la formulation du théorème 2 de W. VEECH [13] à l'exception du seul cas où $a = 1/6$, $b = 5/6$ et $m = 2$. En fait, la démonstration de W. VEECH est insuffisante dans le cas que précise la proposition suivante.

(5.2) Soit $\Omega = [1/6 , 5/6]$, $m = 2$ et D l'ensemble des rationnels p/q de dénominateur q égal à une puissance de 2.

1° Pour tout x de $[0, 1[\setminus D$ ($\underset{\sim}{T}$ identifié à $[0, 1[$) et tout s entier > 0, la suite $n \longmapsto q_\Omega(T_\Omega^n x)$ est une suite d'entiers non s-générateur de suites équiréparties.

2° Pour tout x normal en base deux et toute suite $n \longmapsto z_n$ dans G telle que z_1 commute avec tous les z_n et $\{z_n ; n \in \underset{\sim}{N}^*\}$ engendre un sous-groupe dense dans G, la suite $n \longmapsto z_{q_1} \ldots z_{q_n}$ est répartie dans G.

Démonstration. - Le 2° est implicitement démontré dans [13]. Le 1° est obtenu par le contre-exemple suivant. Choisissons pour G le groupe produit croisé $\{1, -1\} \times^* \underset{\sim}{T}$ dont la loi est donné par :

$$(u, x).(u', x') = uu', x + ux') .$$

Soit a dans $\underset{\sim}{T}$ n'appartenant pas au sous-groupe de torsion et prenons la suite $n \longmapsto z_n$ définie par

$$z_{2n+1} = (-1, 0), \quad z_{2n} = (1, a), \text{ pour tout } n \geqslant 1 .$$

On vérifie aisément que le sous-groupe de G engendré par $\{z_1, z_2\}$ est dense dans G (muni de la topologie produit). En distinguant les cas où $x = 1/6$, $1/3$, $2/3$, $5/6$, $x \in]1/2, 2/3[$ et $x \in]1/6, 1/3[\cup]2/3, 5/6[$, on montre que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$z_{q_1} \ldots z_{q_n} \in \{(1, 0), z_1, z_2, z_1.z_2, z_2.z_1\}$$

la suite $n \longmapsto z_{q_1} \ldots z_{q_n}$ ($(q_n = q(T^n x)$, $x \in \underset{\sim}{T} \setminus D)$ n'est donc pas répartie dans G selon $\mathfrak{m}$.

Remarque 2. - Sous les hypothèses du théorème (5.1), on obtient en particulier que le processus (T_Ω, Ω, μ) est faiblement mélangeant. De plus si $\Omega = [0, 1/2[$ et $m = 2$, on a mieux.

(5.3) Le processus $(T_{[0,1/2[}, [0, 1/2[, \mu$ est de Bernoulli.

En effet, soit $E = (\underset{\sim}{N}^*)^{\underset{\sim}{N}}$ muni de la topologie produit usuelle, (p_n) la suite des applications coordonnées, S le shift sur E, ν_∞ la mesure produit, sur E, de la mesure ν sur $\underset{\sim}{N}$ donnée par $\nu(i) = 2^{-i}$. Envisageons l'application $f : [0, 1/2[\longrightarrow E$ définie, pour tout x, dans $[0, 1/2[$ par

$$p_i(f(x)) = q(T^i x), \quad (i \in \underset{\sim}{N} \text{ et } q = q_\Omega) .$$

f est une bijection, caractérisée par :

$$f(x) = (n_k)_{k \geqslant 0} \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}(1 - \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-(n_0 + \ldots + n_i)}) ,$$

qui réalise un isomorphisme de processus entre $(T_{[0,1/2[}, [0, 1/2[, \mu)$ et le processus de Bernoulli (E, S, ν_∞). On est ainsi ramené pour cet intervalle à la situation du théorème (4.1).

Terminons en démontrant la proposition (1.4) de l'introduction. Soit $a \in \underset{\sim}{T}$. La mesure $\mu \otimes \mathfrak{m} \otimes \mathfrak{h}_a$ est ergotique relativement à la transformation

$$(\omega , g , x) \longmapsto (T\omega , gz_{q(\omega)} , x + a)$$

sur $\Omega \times G \times \underset{\sim}{U}_a$, notée W , d'après (5.1) ($T = T_\Omega$, $\Omega = [0 , 1/2[$) . Si ω dans $[0 , 1/2[$ est normal en base deux, $(\omega , 1_G , - a)$ est $(W , \mu \otimes \mathfrak{m} \otimes \mathfrak{h}_a)$-générique. De plus

$$W^n((\omega , 1_G , - a)) = (T^n \omega , z_{r_1} \dots z_{r_{n-1}} , (n - 1)a) .$$

Ainsi, pour tout f de $\mathcal{C}(G)$, on a :

$$\lim_{N:\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(z_{r_1} \dots z_{r_n}) \exp(- 2i\pi na)$$
$$= \iint_{G\times \underset{\sim}{U}_a} f(g) \exp(- 2\pi ix) \, d\mathfrak{m} \otimes \mathfrak{h}_a(g , x) .$$

Si $a \neq 0$, cette limite est nulle. Il en est de même lorsque ω est dans $[1/2 , 1[$, il suffit en effet d'envisager le point générique $(2^{q(\omega)} \omega , z_{q(\omega)} , 0)$. Le spectre de la suite $n \overset{w}{\longmapsto} z_{r_1} \dots z_{r_n}$ se réduit donc à $\{0\}$. Il en résulte en particulier [7] que, pour toute suite strictement croissante $\sigma : \underset{\sim}{N}^* \longmapsto \underset{\sim}{N}^*$ à caractère presque périodique telle que $\limsup_{n:\infty} \sigma(n)/n < + \infty$, la suite $n \longmapsto w_n$ est répartie dans G selon la mesure de Haar, la condition de croissance stricte pouvant d'ailleurs être affaiblie [6].

ANNEXE

Ω désigne toujours un espace compact métrisable et $T : \Omega \longmapsto \Omega$ une transformation borélienne.

THÉORÈME. - <u>Supposons T uniformément T-quasicontinue. Pour que T soit uniquement ergodique, il faut et il suffit que, pour toute $f : \Omega \longrightarrow \underset{\sim}{R}$, continue, il existe λ_f dans $\underset{\sim}{R}$ tel que</u>

$$(*) \qquad \lim_{N:\infty} \sup_{x\in \Omega} \left|\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(T^n x) - \lambda_f\right| = 0 .$$

<u>Démonstration.</u>

<u>Suffisance</u>. L'égalité (*) définit une mesure $f \longmapsto \lambda_f$ appartenant à $\mathcal{P}(\Omega)$. Soit λ cette mesure. La quasicontinuité de T montre que T est λ-continue, il en résulte l'invariance de λ par T . De plus, si ν est élément de $\mathcal{P}(\Omega)$ invariante par T , l'égalité (*) assure $\nu(f) = \lambda_f$, pour toute f de $\mathcal{C}(\Omega)$. T est donc uniquement ergodique.

<u>Nécessité</u>. Procédons par étape.

1° Soit λ l'unique mesure de $\mathcal{P}(\Omega)$ invariante par T . Notons $\mathcal{R}_\lambda$ l'espace de Banach des applications réelles définies sur Ω et intégrables Riemann (i. e. bornées et λ-continues d'après la caractérisation de Lebesgue), la norme sur $\mathcal{R}_\lambda$ étant celle de la convergence uniforme. Soit E le plus petit sous-espace fermé de $\mathcal{R}_\lambda$ contenant $\{g \circ T - g \; ; \; g \in \mathcal{R}_\lambda\}$. λ définit sur $\mathcal{R}_\lambda$ une forme linéaire continue encore notée λ . Elle est nulle sur E .

2° Soit L une forme linéaire continue sur $\mathcal{R}_\lambda$ nulle sur E . L'application $|L|$ définie pour $f \geqslant 0$ par

$$|L|(f) = \sup\{L(g) \ ; \ g \in \mathcal{R}_\lambda \ \text{ et } \ |g| \leqslant f\} \ ,$$

se prolonge par additivité en une forme linéaire positive (et donc continue) sur $\mathcal{R}_\lambda$. Elle determine ainsi une mesure de Radon ℓ sur Ω . Quitte à supposer $\|L\|_\infty = 1$, on a $\ell \in \mathcal{R}(\Omega)$, de plus l'invariance de L par T entraîne celle de $|L|$.

3° ℓ est invariante par T . - Soit D l'ensemble des points de discontinuité de T et soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse sur T , il existe une application continue $h : \Omega \longrightarrow [0 \ , \ 1]$, un entier N , tels que :

$$\forall \ x \in \Omega \ , \quad h(x) \geqslant \chi_D(x) \quad \text{et} \quad \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} h(T^n x) \leqslant \varepsilon \ .$$

Alors

$$|L|\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} h \circ T^n\right) = |L|(h) \leqslant \varepsilon\|L\|_\infty = \varepsilon \ .$$

Ainsi $\ell(h) \leqslant \varepsilon$ et, par suite, T est ℓ-continue. Il en résulte notamment :

$$\forall \ f \in \mathcal{C}(\Omega) \ , \quad \int_\Omega f(Tx) \ d\ell(x) = |L|(f \circ T) \ ,$$

d'où l'invariance de ℓ par T .

4° T étant uniquement ergodique, l'étape 3 montre que $\ell = \lambda$. La démonstration ci-dessus montre que $|L| - L$ définit une mesure de Radon positive ℓ' sur Ω , invariante par T , d'où $\ell' = a\ell$, avec $a \geqslant 0$, et, par suite, $L = (1 - a)\lambda$, avec $a = 0$ ou 2 , d'après l'hypothèse faite sur $\|L\|_\infty$.

5° L'étape 4 montre que E est le noyau de λ . Soit $f \in \mathcal{R}_\lambda$ et $\varepsilon > 0$, il existe alors g dans $\mathcal{R}_\lambda$ tel que

$$\|f - \lambda(f) - (g \circ T - g)\|_\infty \leqslant \varepsilon \ ,$$

d'où

$$\left\|\left(\sum_{n=1}^{N} f \circ T^n\right) - N\lambda(f) - (gT^{N+1} - g)\right\|_\infty \leqslant N \varepsilon \ .$$

On obtient ainsi une condition plus forte que celle demandée :

$$\forall \ f \in \mathcal{R}_\lambda \ , \quad \lim_{N : \infty} \left\|\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f \circ T^n - \lambda(f)\right\|_\infty = 0 \ .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] CONZE (J. P.). - Equirépartition et ergodicité de transformations cylindriques, Université de Rennes (préprint).

[2] FURSTENBERG (H.). - Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in diophantine approximation, Math. Systems Theory, t. 1, 1967, p. 1-49.

[3] FURSTENBERG (H.). - Strict ergodicity and transformation of the torus, Amer. J. Math., t. 83, 1961, p. 573-601.

[4] HALMOS (P. R.). - Lectures on ergodic theory. - [Tokyo], the mathematical Society of Japan, 1956 (publication of the mathematical Society of Japan, 3).

[5] HARTMAN (S.). - Remarks on equidistribution on non compact groups, Compositio Math., Gröningen, t. 16, 1964, p. 66-71.

[6] MENDÈS FRANCE (M.). - Les suites à spectre vide et la répartition modulo 1 , J. number Theory, t. 5, 1973, p. 1-15.

[7] RAUZY (G.). - Propriétés statistiques de suites arithmétiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1976.

[8] RAUZY (G.). - Répartition de suites et équations fonctionnelles associées, Monatsh. Math. (à paraître).

[9] RAUZY (G.). - Répartition modulo 1 , "Journées arithmétiques de Caen, 1976", Astérisque n° 41-42, 1977, p. 81-101.

[10] ROKHLIN (V. A.). - New progress in the theory of transformation with invariant measure, Russian math. Surveys, t. 15, fasc. 4, 1960, p. 1-22.

[11] SCHMIDT (W. M.). - Irregularities of distribution. VI, Compositio Math., Gröningen, t. 24, 1972, p. 63-74.

[12] THOMAS (R. K.). - Metric properties of transformation of G-spaces, Trans. Amer. math. Soc., t. 160, 1971, p. 103-117.

[13] VEECH (W. A.). - Some questions of uniform distribution, Annals of Math., Series 2, t. 94, 1971, p. 125-138.

(Texte reçu le 9 juin 1978)

Pierre LIARDET
Laboratoire associé au C. N. R. S. n° 225
U. E. R. de Mathématiques
Université de Provence
3 place Victor-Hugo
13331 MARSEILLE CEDEX 3