Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

FRANÇOIS GRAMAIN

# Fonctions entières arithmétiques

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 19, nº 1 (1977-1978), exp. nº 8, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1977-1978__19_1_A6_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
19e année, 1977/78, n° 8, 14 p.



14 novembre 1977

# FONCTIONS ENTIÈRES ARITHMÉTIQUES

par François GRAMAIN

Résumé. - On décrit la méthode d'interpolation permettant d'obtenir le théorème de Pólya. Une fonction entière de type exponentiel $\alpha < \log 2$ et vérifiant $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ est un polynôme. La méthode de C. PISOT utilisant la transformation de Laplace-Borel pour montrer que $f$ est de la forme $\sum P_\gamma(z)\gamma^z$ si $\alpha < 0,843...$ est étudiée de manière plus détaillée. On donne des généralisations de ces résultats concernant les fonctions entières d'une ou plusieurs variables complexes qui envoient $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^m$ dans l'anneau des entiers d'un corps de nombres.

## 1. Le théorème de Pólya.

Une fonction $f$ entière sur $\mathbb{C}$ est dite arithmétique si $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$. Par exemple, un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ ou la fonction $f(z) = 2^z$, sont des fonctions entières arithmétiques. Le théorème de Pólya montre que ces deux exemples sont fondamentaux, en ce sens qu'il n'y a pas de fonction entière arithmétique de croissance intermédiaire. Plus précisément, on dit qu'une fonction entière $f$ est de type exponentiel $\alpha$ si

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log |f|_r}{r} = \alpha \ , \quad \text{où} \quad |f|_r = \max_{|z|=r} |f(z)| \ .$$

On a alors le résultat suivant.

THÉORÈME (G. PÓLYA [17] en 1915, G. H. HARDY [12] en 1917). - *Si $f$ est une fonction entière arithmétique de type exponentiel $\alpha < \log 2$, alors $f$ est un polynôme à coefficients rationnels.*

Remarque. - Les coefficients de $f$ ne sont pas nécessairement entiers, comme le montrent les polynômes binômiaux, par exemple $\frac{1}{2}z(z+1)$.

## 2. Première méthode d'étude : Série d'interpolation.

Pour démontrer un tel théorème, la méthode la plus naturelle consiste à construire la série d'interpolation de Lagrange de $f$, et à constater que c'est un polynôme.

Soit $P_n(z) = \prod_{j=0}^n (z - j)$, alors la série d'interpolation $F$ de $f$ est

$$F(z) = a + \sum_{n\geq 0} a_n P_n(z) \quad \text{où} \quad a = f(0)$$

et

$$a_n = \sum_{p=0}^{n} f(p) \Big/ \Big( \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq p}}^{n} (p-j) \Big) = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} f(p) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=\eta n} \frac{f(z)}{P_n(z)}\, dz$$

avec $\eta > 1$. Alors $a_n$ est un rationnel dont $n!$ est un dénominateur. Donc, si

$a_n \neq 0$ , on a $|a_n| \geqslant 1/n!$ . Mais la croissance de $f$ permet de majorer $|a_n|$ à l'aide de son expression intégrale. En choisissant au mieux la valeur de $\eta$ , on voit que si $\alpha < \log 2$ , alors $a_n = 0$ pour tout $n$ assez grand, et $F$ est un polynôme de $\mathbb{Q}[x]$ .

D'autre part, la formule de Jensen montre que, si $g$ est une fonction entière de type exponentiel $< 1$ , et si $g(\mathbb{N}) = \{0\}$ , alors $g$ est identiquement nulle. Cela montre que $f = F$ , et achève donc la preuve du théorème de Pólya.

## 3. Deuxième méthode : Transformation de Laplace-Borel.

La méthode précédente ne peut aboutir qu'à la conclusion que $f$ est un polynôme. Nous allons en décrire une autre qui permet d'étudier des fonctions $f$ de type exponentiel $\geqslant \log 2$ , et ainsi d'atteindre les fonctions entières arithmétiques du type $P(z) + 2^z Q(z)$ , où $P$ et $Q$ sont des polynômes convenables.

(a) Transformée de Laplace-Borel (J. DUFRESNOY et C. PISOT [5]).

Soit $f(z) = \sum_{n\geqslant 0}(a_n/n!)z^n$ une fonction entière de type exponentiel $\alpha$ . Sa transformée de Laplace-Borel, $F(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^{-n-1}$ est une fonction holomorphe hors du disque fermé $\{|z| \leqslant \alpha\}$ , nulle à l'infini. Soit $g(z) = \sum_{n\geqslant 0} f(n) z^{-n-1}$ . C'est une fonction holomorphe hors de $S = \exp\{|z| \leqslant \alpha\}$ et nulle à l'infini. Si $\Gamma$ est un chemin fermé simple entourant le disque fermé $\{|z| \leqslant \alpha\}$ , on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma e^{zw} F(w)\, dw \quad \text{et} \quad g(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{F(w)}{z - e^w}\, dw \ .$$

Si, de plus, $\alpha < \pi$ et $\Gamma$ est tracé dans la couronne $\{\alpha < |z| < \pi\}$ , on a

(1) $$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\exp\Gamma} w^z g(w)\, dw \ .$$

La donnée des $f(n)$ définit complètement $g$ , donc $f$ , d'après la formule (1). En particulier, si $f$ est une fonction entière de type exponentiel $< \pi$ , et si $f(\mathbb{N}) = \{0\}$ , alors $f$ est identiquement nulle. Ce résultat, plus fort que celui obtenu par la formule de Jensen, est le meilleur possible ( $f(z) = \sin \pi z$ est de type exponentiel $\pi$ ).

D'autre part, si $g$ est une fraction rationnelle de pôles $\gamma_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ , sa décomposition en éléments simples et la formule (1) montrent que $f$ est de la forme $\sum_{i=1}^n P_{\gamma_i}(z)\, \gamma_i^z$ , où les $P_{\gamma_i}$ sont des polynômes. Inversement, si $f(z) = \sum_{i=1}^n P_{\gamma_i}(z)\, \gamma_i^z$ , alors $g$ est une fraction rationnelle.

(b) Critère de Kronecker ([13] , [20]).

La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^n$ est le développement à l'origine d'une fraction rationnelle si, et seulement si, les $u_n$ satisfont à une relation de récurrence linéaire. Cela peut se traduire par une condition sur les déterminants de Hankel

$$A_n^{(k)} = \begin{vmatrix} u_n & u_{n+1} & \cdots & u_{n+k} \\ u_{n+1} & u_{n+2} & \cdots & u_{n+k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n+k} & u_{n+k+1} & \cdots & u_{n+2k} \end{vmatrix}$$

Le développement précédent est celui d'une fraction rationnelle si, et seulement si, $A_0^{(n)} = 0$ pour tout $n \geq n_0$. Dans ce cas, le degré du dénominateur est majoré par $n_0$.

(c) Diamètre transfini (M. FEKETE [7]).

Soit $S \subset \mathbb{C}$ un compact. Pour $n \geq 2$, on pose

$$M_n(S) = \sup_{x_i \in S} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|^2 .$$

Alors $M_n(S)^{1/n(n-1)}$ est une suite décroissante, donc convergente. On appelle sa limite $\tau(S)$ le diamètre transfini de $S$. Par exemple, le diamètre transfini d'un disque est son rayon. Il existe un autre mode de calcul de $\tau(S)$. Soit $T_n$ le polynôme de Čebyšev de degré $n$ de $S$. C'est le polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire, de degré $n$, pour lequel $\max_{z \in S} |P(z)|$ est minimum et égal à $m_n$. Alors $\lim_{n \to +\infty} m_n^{1/n} = \tau(S)$.

(d) Diamètre transfini et singularité (G. PÓLYA [18]).

Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} u_n z^{-n-1}$ le développement à l'infini d'une fonction holomorphe sur l'ouvert connexe $\complement S$, où $S$ est un compact de $\mathbb{C}$. Alors

$$\limsup_{k \to +\infty} |A_0^{(k)}|^{1/k(k-1)} \leq \tau(S) .$$

L'idée de la démonstration est la suivante. Si $\Gamma$ est un chemin fermé convenable entourant $S$, alors

$$u_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma f(z) z^n \, dz ,$$

d'après la formule de Cauchy. Dans le déterminant $A_0^{(k)}$, des combinaisons linéaires de colonnes permettent de remplacer $z^n$ par $T_n$ dans l'expression de $u_n$, ce qui fait apparaitre $\tau(S)$ dans les majorations.

(e) Lemme de Fatou [6].

LEMME. - Soit $P$ et $Q \in \mathbb{Z}[X]$, premiers entre eux dans $\mathbb{Q}[X]$, tels que $P/Q$ admette à l'origine un deceloppement en série entière à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Alors il existe $P^*$ et $Q^* \in \mathbb{Z}[X]$ premiers entre eux dans $\mathbb{Q}[X]$ vérifiant $Q^*(0) = 1$ et $PQ^* - P^*Q = 0$.

(f) Entiers algébriques et diamètre transfini (M. FEKETE [7]).

LEMME. - L'ensemble des entiers algébriques situés ainsi que tous leurs conjugués dans un compact $S \subset \mathbb{C}$ de diamètre transfini $< 1$ est fini.

La démonstration est facile. Soient $x_1, \dots, x_n \in S$ les racines d'un polynôme unitaire irréductible à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Le discriminant $D = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i - x_j)^2$ est un entier rationnel non nul. Mais, d'après (c), on a $|D| \leq M_n(S)$ et, si $n$ est grand, $M_n(S) < 1$. Par suite, $n$ est borné. Or, il n'y a qu'un nombre fini d'entiers algébriques de degré borné et situés, ainsi que leurs conjugués, dans un compact donné.

A l'aide de ce qui précède, on obtient le résultat suivant.

THÉORÈME (C. PISOT [15]). - Soit $\alpha > 0$ et $S = \exp\{|z| \leq \alpha\}$. Si $\tau(S) < 1$, l'ensemble $\Gamma = \{\gamma \in \mathbb{C}$ ; $\gamma$ entier algébrique, $\gamma$ et ses conjugués $\in S\}$ est fini. Et si $f$ est une fonction entière arithmétique de type exponentiel $\leq \alpha$, alors $f$ est de la forme

$$f(z) = \sum_{\gamma\in\Gamma} P_\gamma(z)\gamma^z \text{ , où } P_\gamma \in \mathbb{Q}[\Gamma][X] .$$

Dans sa note [15], C. PISOT calcule une borne de $\alpha$ pour que $\tau(S) < 1$. (Voir le tableau récapitulatif des résultats à la fin de l'exposé.)

## 4. Cas où $f(\mathbb{N}) \subset \mathcal{O}_K$.

Soient $K$ un corps de nombres, $d = [K : \mathbb{Q}]$ son degré, et $\mathcal{O}_K$ l'anneau de ses entiers. Pour obtenir des résultats dans ce cadre, on remplace, comme d'habitude, le raisonnement : "Si $a \in \mathbb{Z}$ et $a \neq 0$, alors $|a| \geq 1$" par le suivant : "Si $a \in \mathcal{O}_K$ et $|\overline{a}|$ = maximum des modules des conjugués de $a$, si $a \neq 0$ on a $\log|a| \geq -(\delta - 1)\log|\overline{a}|$ (Inégalité de la taille), où $\delta = d$ si $K \subset \mathbb{R}$ et $\delta = d/2$ si $K \not\subset \mathbb{R}$". Cette inégalité est obtenue en considérant la norme de $a$ qui est un entier rationnel, non nul si $a \neq 0$. D'autre part, si on a une conclusion analogue à celle du théorème de C. PISOT, la fonction $g(z) = \sum_{n\geq 0} f(n)z^{-n-1}$ est une fraction rationnelle. Alors, si $\sigma$ est un plongement de $K$ dans $\mathbb{C}$, la fonction $\sum_{n\geq 0} f(n)^\sigma z^{-n-1}$ est aussi une fraction rationnelle. Donc chacune de ces séries converge au voisinage de l'infini ce qui se traduit par l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

(2) $$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log|\overline{f(n)}|}{n} \leq C .$$

Une hypothèse de ce genre est bien nécessaire. En effet, soit

$$g(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z - 1)^{-n-1} .$$

Si la suite des $a_n$ est lacunaire, $g$ n'est pas une fraction rationnelle, car les $a_n$ ne sont pas liés par une relation de récurrence. Si $\delta \neq 1$, l'anneau $\mathcal{O}_K$ admet $0$ comme point d'accumulation, et on peut choisir les $a_n \in \mathcal{O}_K$ assez petits pour que $g$ soit holomorphe sur le complémentaire d'un disque de centre $1$ et de rayon arbitrairement petit. Alors $g$ est associée comme dans le § 3 (a) à une fonction entière $f$ telle que $f(\mathbb{N}) \subset \mathcal{O}_K$ et de type exponentiel arbitrairement petit, mais cette fonction $f$ n'est pas de la forme $\sum P_\gamma(z)\gamma^z$.

Sous l'hypothèse (2), la méthode d'interpolation s'applique sans difficulté, et donne les résultats qu'on trouvera dans le tableau final.

Pour utiliser la deuxième méthode, les difficultés viennent de ce que, en général $\mathcal{O}_K$ n'est pas discret, et que, par suite, dans un compact de diamètre transfini même très petit il peut y avoir une infinité d'éléments de $\mathcal{O}_K$.

On est donc amené à montrer que les entiers $\gamma$ qui interviennent vérifient $|\overline{\gamma}| \leqslant e^c$. Les différents pas de la démonstration se généralisent bien. Par exemple, nous allons montrer ce qui correspond au § 3 (f).

LEMME. - <u>Soient</u> $K$ <u>un corps de nombres</u>, $d = [K : \mathbb{Q}]$ <u>son degré, et</u> $\mathcal{O}_K$ <u>l'anneau des ses entiers. Soit</u> $\delta = d$ <u>si</u> $K \subset \mathbb{R}$ <u>et</u> $\delta = d/2$ <u>dans le cas contraire. Soit</u> $S \subset \mathbb{C}$ <u>un compact de diamètre transfini</u> $\tau$ <u>vérifiant</u> $\log \tau < -c(\delta - 1)$. <u>Alors l'ensemble des entiers algébriques</u> $\gamma$ <u>de maison</u> $|\overline{\gamma}| \leqslant e^c$, <u>et situés, ainsi que tous leurs conjugués sur</u> $K$, <u>dans</u> $S$, <u>est fini</u>.

<u>Démonstration</u>. - Comme $|\overline{\gamma}|$ est borné, il suffit de montrer que le degré de $\gamma$ sur $K$ est borné. Soit $P(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$ le polynôme minimal de $\gamma$ sur $K$. Le discriminant $D = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i - x_j)^2$ appartient à $\mathcal{O}_K$, car c'est un polynôme symétrique en les $x_j$ à coefficients entiers. Par hypothèse, $x_i \in S$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, donc on a $|D| \leqslant M_n(S)$ d'après 3 (c).

Soit $U$ le disque fermé de centre $0$ et de rayon $e^c$. On a $|\overline{x_i}| \leqslant e^c$ donc $|\overline{D}| \leqslant M_n(U)$. L'inégalité de la taille appliquée à $D \neq 0$ fournit

$$\frac{1}{n(n-1)} \log M_n(S) \geqslant - \frac{\delta - 1}{n(n-1)} \log M_n(U) .$$

Si le degré $n$ de $P$ n'était pas borné, on aurait, par définition du diamètre transfini, $\log \tau \geqslant -c(\delta - 1)$, et le lemme est prouvé.

Les remarques précédentes expliquent l'énoncé inhabituel du théorème de Pisot contenu dans le suivant.

THÉORÈME. - <u>Soient</u> $K$ <u>un corps de nombres</u>, $d = [K : \mathbb{Q}]$ <u>son degré, et</u> $\mathcal{O}_K$ <u>l'anneau de ses entiers. Soit</u> $\delta = d$ <u>si</u> $K \subset \mathbb{R}$, <u>et</u> $\delta = d/2$ <u>dans le cas contraire. Soit</u> $c > 0$ <u>et</u> $\alpha > 0$. <u>On note</u> $\tau$ <u>le diamètre transfini de</u> $S = \exp\{|z| \leqslant \alpha\}$. <u>Sous la condition</u> $\log \tau < -c(\delta - 1)$ <u>l'ensemble</u> $\Gamma = \{\gamma \in \mathbb{C}$ ; $\gamma$ <u>entier algébrique</u>, $|\overline{\gamma}| \leqslant e^c$, $\gamma$ <u>et tous ses conjugués sur</u> $K$ <u>appartiennent à</u> $S\}$ <u>est fini. Et si</u> $f$ <u>est une fonction entière de type exponentiel</u> $\leqslant \alpha$ <u>vérifiant</u> $f(\mathbb{N}) \subset \mathcal{O}_K$ <u>et</u>

$$\limsup_{n\to+\infty}((\log |\overline{f(n)}|)/n) \leqslant c ,$$

alors $f$ est de la forme

$$f(z) = \sum_{\gamma\in\Gamma} P_\gamma(z)\gamma^z \quad \text{où} \quad P_\gamma \in K[\Gamma][X] .$$

On peut aussi calculer une valeur limite de $\alpha$ pour que le seul élément de $\Gamma$ soit $1$, ce qui permet d'affirmer que $f$ est un polynôme. On remarque que la méthode d'interpolation fournit la même valeur. À priori, cette valeur n'est pas la meilleure possible, mais la meilleure que peuvent fournir les deux méthodes. En fait, elle est la meilleure possible dans certains cas, par exemple pour $K = \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ à cause de la fonction $2^z$, et pour $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ou $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

## 5. Cas où $f(\mathbb{Z}) \subset \mathfrak{O}_K$.

Dans une note aux Comptes Rendus [16], C. PISOT introduit le procédé suivant. Si $f$ est une fonction entière de type exponentiel $\alpha < \pi$, telle que $f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, ses parties paire et impaire $f_i(z)$ $(i = 1, 2)$ vérifient $2f_i(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, et ont un type exponentiel majoré par $\alpha$. On peut donc supposer $f$ paire ou impaire.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$(3) \qquad h(n) = f(n) + \dots + [\binom{n-1}{p} \pm \binom{n-1}{p-1}] f(n-2p) + \dots \pm f(-n),$$

la notation $\pm$ signifiant, $+$ si $f$ est paire, $-$ si $f$ est impaire. Si $k(z) = \sum_{n\geq 0} h(n) z^{-n-1}$, on a, si $f$ est paire,

$$k(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Lambda \frac{F(w)}{z - e^w - e^{-w}} \, dw ,$$

où $\Lambda$ est un chemin fermé convenable. Alors $k(z)$ est une fraction rationnelle si le diamètre transfini $\tau'$ du compact $T$, transformé de $\{|z| \leq \alpha\}$ par l'application $z \longmapsto e^z + e^{-z}$, est $< 1$. Par suite, $h(n) = \sum P_\gamma(n)\gamma^n$, où $\gamma$ est un entier algébrique situé, ainsi que tous ses conjugués, dans le compact $T$. D'autre part, les $h(n)$ $(n \in \mathbb{N})$ déterminent les $f(n)$ qu'on obtient en résolvant le système triangulaire (3), donc déterminent $f(z)$. Il s'agit donc de calculer $f$ en fonction de $h(n)$.

Considérons d'abord deux cas particuliers.

(a) <u>Cas où</u> $f$ <u>est paire</u>. - Si $f(n) = n^k \beta^n + (-n)^k \beta^{-n}$, définissons $\varphi_k$ par

$$h(n) = 2 \sum_{p=0}^n (n-2p)^k \binom{n}{p} \beta^{n-2p} = 2\varphi_k(\beta) .$$

On a

$$\varphi_0(x) = (x + (1/x))^n , \quad \varphi_1(x) = n(x + (1/x))^{n-1} (1 - (1/x)) \quad \text{et} \quad \varphi_{k+1}(x) = x\varphi_k'(x) .$$

On montre par récurrence que

$$\varphi_{2k}(x) = \sum_{p=0}^k P_{p,2k}(n)(x + (1/x))^{n-2p} (x - (1/x))^{2p}$$

et

$$\varphi_{2k+1}(x) = \sum_{p=0}^k P_{p,2k+1}(n)(x + (1/x))^{n-2p-1} (x - (1/x))^{2p+1} ,$$

où les $P_{p,\ell}$ sont des polynomes à coefficients entiers liés par les relations de récurrence :

$$P_{p,2k+1}(n) = (n - 2p) P_{p,2k}(n) + 2(p + 1) P_{p+1,2k}(n) ,$$

$$P_{p,2k+2}(n) = (2p + 1) P_{p,2k+1}(n) + (n - 2p + 1) P_{p-1,2k+1}(n) .$$

En particulier $P_{k,2k}(n)$ est de degré $2k$ en $n$, $P_{k,2k+1}$ est de degré $2k+1$ et le degré de $P_{p,\ell}$ est $< \ell$ si $p < [\ell/2]$. D'autre part, $\varphi_{2k+1}(1) = 0$ et $\varphi_{2k}(1) = 2^n P_{0,2k}(n)$, où $P_{0,2k}$ est de degré $k$ (on montre par récurrence que le coefficient de $n^k$ dans $P_{0,2k}$ est impair, donc non nul). Par suite,

si $\beta \neq 1$, on a $h(n) = (\beta + (1/\beta))^n P(n)$, où $P$ est un polynôme (dépendant de $\beta$) de degré $k$,

si $\beta = 1$, on a $h(n) = 0$ si $k$ est impair, et $h(n) = 2^n P(n)$ si $k$ est pair, où $P$ est un polynôme de degré $k/2$.

(b) Cas où $f$ est impaire. - Si $f(n) = n^k \beta^n - (-n)^k \beta^{-n}$, on pose $h(n) = 2\psi_k(\beta)$ et on vérifie aisément que $\psi_k(x) = \frac{1}{n} \varphi_{k-1}(x)$, ce qui donne des conclusions analogues aux précédentes.

Donc à partir de $h(n) = \sum P_\gamma(n)\gamma^n$, on obtient $f$ sous la forme

$$f(z) = \sum P_\beta(z)\beta^z + Q_\beta(z)\beta^{-z} \quad \text{où } \beta \text{ vérifie } \beta + (1/\beta) = \gamma .$$

Les $\beta$ sont donc des unités algébriques, situées ainsi que leurs conjugués dans le compact $S = \exp\{|z| \leq \alpha\}$. Comme $\tau' < 1$, l'ensemble des $\beta$ est encore fini.

Si on suppose $f(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{O}_K$ et $\limsup_{n\in\mathbb{Z},|n|\to+\infty}((\log |\overline{f(n)}|)/|n|) \leq c$, on peut encore utiliser ce procédé. Sous réserve d'une condition sur $\tau'$, on obtient des unités $\beta$ situées ainsi que leurs conjugués sur $K$ dans le compact $S$. La condition sur $|\overline{f(n)}|$ permet de montrer que $|\overline{\beta}| \leq e^c$ (ce n'est pas immédiat) et on obtient le résultat suivant.

THÉORÈME. - Soient $K$ un corps de nombres, $d = [K : \mathbb{Q}]$ son degré, et $\mathcal{O}_K$ l'anneau de ses entiers. Soit $\delta = d$ si $K \subset \mathbb{R}$, et $\delta = d/2$ dans le cas contraire. Soit $c > 0$ et $\alpha > 0$. On note $\tau'$ le diamètre transfini du transformé de $\{|z| < \alpha\}$ par l'application $z \longmapsto e^z + e^{-z}$ et $S = \exp\{|z| \leq \alpha\}$. Alors, sous la condition

$$\log \tau' < -(\delta - 1) \log(e^c + e^{-c})$$

l'ensemble $B = \{\beta \in \mathbb{C} ;\ \beta$ unité algébrique, $|\overline{\beta}| \leq e^c$, $\beta$ et tous ses conjugués sur $K$ appartiennent à $S\}$ est fini. Et si $f$ est une fonction entière de type exponentiel $\leq \alpha$ vérifiant $f(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{O}_K$ et

$$\limsup_{|n|\to+\infty} \frac{\log |\overline{f(n)}|}{|n|} \leq c ,$$

alors $f$ est de la forme

$$f(z) = \sum_{\beta\in B} P_\beta(z)\beta^z \quad \text{où } P_\beta \in K[B][X] .$$

Là aussi, la méthode d'interpolation s'applique évidemment, et donne la même valeur limite de $\alpha$ pour que $f$ soit un polynôme. Dans le même ordre d'idées, on peut étudier les fonctions vérifiant par exemple $f(\mathbb{Z}[i]) \subset \mathbb{Z}[i]$, par la méthode d'interpolation ([9] et [10]), mais il semble impossible de le faire par la méthode de la transformation de Laplace en utilisant un procédé du genre du précédent.

## 6. Cas des fonctions entières de plusieurs variables.

Si $\underset{\sim}{z} = (z_1 , \ldots , z_m) \in \underset{\sim}{C}^m$ , on note $|\underset{\sim}{z}| = |z_1| + \ldots + |z_m|$ et $\underset{\sim}{\gamma}^{\underset{\sim}{z}} = \gamma_1^{z_1} \ldots \gamma_m^{z_m}$ . Si f est une fonction entière sur $\underset{\sim}{C}^m$ , on note

$$|f|_r = \max_{|\underset{\sim}{z}| \leq r} |f(\underset{\sim}{z})| ,$$

et f est dite de type exponentiel $\alpha$ si $\limsup_{r\to+\infty}((\log |f|_r)/r) = \alpha$ .

On cherche à obtenir des résultats du même genre que les précédents sous l'hypothèse que $f(\underset{\sim}{N}^m) \subset \mathcal{O}_K$ , et des conditions sur $\alpha$ et $|\overline{f(\underset{\sim}{n})}|$ .

La méthode d'interpolation s'applique bien à ce cas, mais les calculs sont compliqués. C'est ainsi que A. BAKER [2] a montré l'analogue du théorème de Pólya. Si f est une fonction entière sur $\underset{\sim}{C}^m$ de type exponentiel $< \log 2$ , et si $f(\underset{\sim}{N}^m) \subset \underset{\sim}{Z}$ , alors f est un polynôme.

La théorie de la transformée de Laplace-Borel et son lien avec la fonction $g(\underset{\sim}{z}) = \sum_{\underset{\sim}{n}\in \underset{\sim}{N}^m} f(\underset{\sim}{n})\underset{\sim}{z}^{-\underset{\sim}{n}-\underset{\sim}{1}}$ ont été étudiés par V. AVANISSIAN et R. GAY [1]. Pour que $f(\underset{\sim}{z})$ soit de la forme $\sum P_{\underset{\sim}{\gamma}}(\underset{\sim}{z})\underset{\sim}{\gamma}^{\underset{\sim}{z}}$ , il est nécessaire et suffisant que $g(\underset{\sim}{z})$ soit une fraction rationnelle de la forme $P(z_1 , \ldots , z_m)/Q_1(z_1)\ldots Q_m(z_m)$ , c'est-à-dire une fraction "reconnaissable". (cf. [8]).

D'autre part, J.-L. CHABERT [4] a montré que les anneaux intègres A , qui vérifient le lemme de Fatou (§ 3 (e) avec A au lieu de $\underset{\sim}{Z}$ , et le corps des fractions K de A au lieu de $\underset{\sim}{Q}$ ), sont les anneaux complètement intégralement clos. Cela permet d'utiliser le lemme de Fatou dans le cas de $\mathcal{O}_K$ au paragraphe 4. Ce résultat se généralise au cas de plusieurs variables de la façon suivante.

LEMME. - Un anneau A intègre est complètement intégralement clos si, et seulement si, pour tout entier $m \geq 1$ , il a la propriété suivante.
Si $P \in A[X_1 , \ldots , X_m]$ et $Q_i \in A[X_i]$ $(1 \leq i \leq m)$ sont tels que P et $Q_i$ n'ont pas de facteur commun de degré $\geq 1$ dans $K[X_i]$ , et si $P/(Q_1\ldots Q_m)$ admet à l'origine un développement en série entière à coefficients dans A , alors il existe des polynômes $P^* \in A[X_1 , \ldots , X_m]$ et $Q_i^* \in A[X_i]$ $(1 \leq i \leq m)$ tels que $P^*$ et $Q_i^*$ n'ont pas de facteur commun de degré $\geq 1$ dans $K[X_i]$ , $Q_i^*(0) = 1$ $(1 \leq i \leq m)$ et $PQ_1^* \ldots Q_m^* = P^* Q_1 \ldots Q_m$ .

Démonstration. - Le cas $m = 1$ montre que la condition est suffisante. Pour montrer sa nécessité, on se ramène d'abord au cas où les $Q_i$ sont irréductibles dans $K[X_i]$ . Alors il suffit de prouver qu'il existe $(a_1 , \ldots , a_{m-1}) \in A^{m-1}$ tels que $P(a_1 , \ldots , a_{m-1} , Z)$ et $Q_m(Z)$ soient premiers entre eux dans $K(Z)$ , car le lemme de Fatou permet de conclure. La division euclidienne de $P(X_1 , \ldots , X_{m-1}, Z)$ par $Q_m(Z)$ dans $K[X_1 , \ldots , X_{m-1}] [Z]$ fournit

$$P(X_1 , \ldots , X_{m-1} , Z) = Q_m(Z)\, S(X_1 , \ldots , X_{m-1} , Z) + R(X_1 , \ldots , X_{m-1} , Z)$$

avec $R = 0$ ou $\deg_Z R < \deg Q_m$ . Si, pour tout point de $A^{m-1}$ , les polynômes $P(a_1 , \ldots , a_{m-1} , Z)$ et $Q_m(Z)$ ne sont pas premiers entre eux, comme $Q_m$ est irréductible, $Q_m$ divise $P(a_1, \ldots, a_{m-1}, Z)$, donc $R(a_1, \ldots, a_{m-1}, Z) = 0$ pour tout $(a_1, \ldots, a_{m-1}) \in A^{m-1}$. Si $A$ est infini, on en déduit que $R = 0$, ce qui est exclu par les hypothèses sauf si $Q_m$ est constant, auquel cas il n'y a rien à démontrer. Si $A$ est fini, c'est un corps et il n'y a rien à démontrer non plus.

C. Q. F. D.

Pour obtenir un théorème du type désiré en $m$ variables, il ne manque plus qu'un critère de reconnaissabilité de $g(\underset{\sim}{z})$ faisant intervenir le diamètre transfini de $S = \exp\{|z| \leqslant \alpha\}$ puisque, si $f$ est de type exponentiel $\leqslant \alpha$, la fonction $g$ est holomorphe sur $(\complement S)^m$.

Les travaux de M. FLIESS [8] contiennent en particulier une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum_{\underset{\sim}{n} \in \underset{\sim}{N}^m} a_{\underset{\sim}{n}} z^{\underset{\sim}{-n}-\underset{\sim}{1}}$ soit reconnaissable ; c'est que sa matrice de Hankel soit de rang fini. Mais la matrice de Hankel, si $m \geqslant 2$, n'a pas toutes les symétries qui existent dans le cas d'une seule variable, ce qui empèche (jusqu'à présent ...) de se ramener à des conditions de nullité de déterminants que l'on puisse majorer à l'aide du diamètre transfini d'un ensemble contenant les singularités de la série.

D'autre part, V. P. ŠEINOV [21] a obtenu des critères de rationalité (mais non de reconnaissabilité) qui généralisent en $m$ variables le critère de Kronecker. La majoration du type de celle de Pólya (§ 3 (d)) qu'il donne [22] est insuffisante pour conclure à la rationalité de $g$, dans le cas qui nous intéresse, et il ne semble pas que cette méthode permette de prouver le théorème 4 de [22].

Le seul résultat utilisable est donc celui d'A. MARTINEAU [14].

THÉORÈME. - Soit $K_i \subset \underset{\sim}{C}$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ des compacts polynômialement convexes de diamètres transfinis $\tau(K_i) < 1$. Soit $g$ une fonction holomorphe sur $\complement K_1 \times \ldots \times \complement K_m$ de développement $\sum_{\underset{\sim}{n} \in \underset{\sim}{N}^m} a_{\underset{\sim}{n}} z^{\underset{\sim}{-n}-\underset{\sim}{1}}$ au voisinage de l'infini. Si, pour tout $\underset{\sim}{n} \in \underset{\sim}{N}^m$, $a_{\underset{\sim}{n}} \in \underset{\sim}{Z}$ alors $g$ est une fraction reconnaissable.

La démonstration repose sur le cas d'une variable. On remarque d'abord que la majoration de Pólya (§ 3 (d)), faite soigneusement, donne une borne supérieure pour le degré du dénominateur de $g(z)$, c'est-à-dire une borne du $n_0$ pour lequel $A_0^{(n)} = 0$ si $n \geqslant n_0$. Compte tenu de la finitude de l'ensemble des pôles de $g$, cela majore leur multiplicité. Alors, si $g(\underset{\sim}{z}) = \sum_{j,k \geqslant 0} a_{jk} z_1^{-j-1} z_2^{-k-1}$, on pose

$$a_j(z_2) = \sum_{k \geqslant 0} a_{jk} z_2^{-k-1} ,$$

et on montre que les $a_j(z_2)$ sont des fractions rationnelles qui ont toutes le même dénominateur $Q_2(z_2)$ et un numérateur de degré inférieur au degré de $Q_2$ puisque $a_j$ est nulle à l'infini. On est donc ramené au problème à une variable. Le résultat est encore vrai si on suppose que $a_{\underset{\sim}{n}} \in \mathcal{O}_K$, où $K$ est un corps quadratique imaginaire.

Malheureusement, si $a_{\underset{\sim}{n}} \in \mathcal{O}_K$ , où K est un corps de nombres quelconque, sous l'hypothèse naturelle que

$$\limsup_{|n| \to +\infty} \frac{\log |\overline{a_{\underset{\sim}{n}}}|}{|\underset{\sim}{n}|} \leqslant C ,$$

on ne peut pas (du moins pas encore ...) assurer l'uniformité du dénominateur des $a_j$ .

Ce résultat a permis à V. AVANISSIAN et R. GAY [1] de généraliser le théorème de Pisot au cas de plusieurs variables.

THÉORÈME.- <u>Soit</u> $\alpha > 0$ <u>et</u> $S = \exp\{|z| \leqslant \alpha\}$ . <u>Si</u> $\tau(S) < 1$ , <u>l'ensemble</u> $\Gamma = \{\gamma \in \underset{\sim}{C} ;\ \gamma$ <u>entier algébrique,</u> $\gamma$ <u>et ses conjugués</u> $\in S\}$ <u>est fini. Et si</u> f <u>est une fonction entière sur</u> $\underset{\sim}{C}^m$ <u>de type exponentiel</u> $\leqslant \alpha$ <u>et vérifiant</u> $f(\underset{\sim}{N}^m) \subset \underset{\sim}{Z}$, <u>alors</u> f <u>est de la forme</u>

$$f(z) = \sum_{\underset{\sim}{\gamma} \in \Gamma^m} P_{\underset{\sim}{\gamma}}(\underset{\sim}{z})\underset{\sim}{\gamma}^{\underset{\sim}{z}} , \text{ où } P_{\underset{\sim}{\gamma}} \in \underset{\sim}{Q}[\Gamma][X_1 , \ldots , X_m] .$$

Dans le cas d'un corps de nombres quelconques, avec l'hypothèse naturelle sur les $|\overline{f(\underset{\sim}{n})}|$ , on peut trouver une condition sur $\alpha$ pour que f soit un polynôme, c'est-à-dire que les pôles de $g(\underset{\sim}{z})$ soient $z_1 = 1 , \ldots , z_m = 1$ . Pour cela il suffit que $g$ soit un polynôme en les $Z_j = 1/(z_j - 1)$ . Le développement de $g$ en série entière de $Z$ est encore à coefficients dans $\mathcal{O}_K$ et il représente une fonction holomorphe dans le polydisque de centre 0 et de rayon $(e^{\alpha} - 1)^{-1}$ . On peut majorer la maison des coefficients, et l'inégalité de Cauchy majore leur module. L'inégalité de la taille permet de montrer qu'ils sont presque tous nuls, si $\alpha$ n'est pas trop grand, et on obtient le résultat suivant.

THÉORÈME [11]. - <u>Soient</u> K <u>un corps de nombres,</u> d <u>son degré sur</u> $\underset{\sim}{Q}$ <u>et</u> $\mathcal{O}_K$ <u>l'anneau de ses entiers. Soit</u> f <u>une fonction entière sur</u> $\underset{\sim}{C}^m$ <u>de type exponentiel</u> $\leqslant \alpha$ . <u>On suppose que</u> $f(\underset{\sim}{N}^m) \subset \mathcal{O}_K$ <u>et qu'il existe</u> $c > 0$ <u>tel que</u>

$$\limsup_{|\underset{\sim}{n}| \to +\infty} \frac{\log |\overline{f(\underset{\sim}{n})}|}{|\underset{\sim}{n}|} \leqslant c \quad (\underset{\sim}{n} \in \underset{\sim}{N}^m) .$$

<u>Alors, sous la condition</u> $\log(e^{\alpha} - 1) < -(\delta - 1)\log(1 + e^{c})$ , <u>la fonction</u> f <u>est un polynôme à coefficients dans</u> K ( $\delta = d$ <u>si</u> $K \subset \underset{\sim}{R}$ <u>et</u> $\delta = d/2$ <u>si</u> $K \not\subset \underset{\sim}{R}$ ).

On remarque que c'est la condition obtenue au paragraphe 4, dans le cas où $m = 1$ , et que ce résultat contient donc encore le théorème de Pólya.

D'autre part, le procédé de C. PISOT, présenté au paragraphe 5, peut se généraliser au cas de m variables, et chaque résultat obtenu dans ce paragraphe en engendre un dans le cas où $f(\underset{\sim}{Z}^m)$ est contenu dans $\underset{\sim}{Z}$ ou $\mathcal{O}_K$ (cf. le tableau final).

## 7. Quelques réciproques.

En 1916, G. PÓLYA [19] donnait une réciproque fondée sur un critère de rationalité de fonctions méromorphes assez délicat à démontrer. On peut le généraliser de la manière suivante.

THÉORÈME. - Soit $g_j$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$ des fonctions entières non identiquement nulles vérifiant

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log |g|_r}{r} = 0 ,$$

et soient $c_j \in \underset{\sim}{C}$ $s$ nombres complexes non nuls distincts. Si $g(z) = \sum_{j=1}^{s} g_j(z) c_j^z$ vérifie $g(\underset{\sim}{N}) \subset \mathcal{O}_K$ et $\limsup_{n\to+\infty}((\log |\overline{g(n)}|)/n) < +\infty$, alors les $c_j$ sont des entiers algébriques et les $g_j$ des polynômes.

La méthode de la transformée de Laplace-Borel permet d'obtenir très simplement un résultat où il n'y a plus d'hypothèse sur la maison des $g(n)$, mais où les hypothèses de croissance de $g$ sont beaucoup plus strictes.

PROPOSITION. - Soit $g(z) = \sum_{j=1}^{s} P_j(z) c_j^z$ avec $P_j \in \underset{\sim}{C}[X]$ et où les $c_j \in \underset{\sim}{C}$ sont non nuls et tous distincts, et vérifient $|\log c_j| < \pi$. Si $g(\underset{\sim}{N}) \subset \mathcal{O}_K$, alors les $c_j$ sont des entiers algébriques.

Dans ces deux résultats, l'hypothèse que les $c_j$ sont tous distincts est très importante comme le montre la fonction $g(z) = e^z \sin \pi z$. En effet,

$$g(z) = 1/2i[(\exp(1 + i\pi))^z - (\exp(1 - i\pi))^z]$$

vérifie $g(\underset{\sim}{N}) = \{0\}$, mais $e$ n'est pas algébrique.

## 8. Tableau des résultats.

Les notations sont celles de l'exposé. $f$ est une fonction entière de type exponentiel $\leqslant \alpha$ ; si $f(\ldots) \subset \mathcal{O}_K$, on suppose que $\limsup_{|n|\to+\infty}((\log |f(\underset{\sim}{n})|/|\underset{\sim}{n}|) \leqslant c$. On note $\tau$ (resp. $\tau'$) le diamètre transfini de l'image par $z \longmapsto e^z$ (resp. $z \longmapsto e^z + e^{-z}$) du disque $\{|z| \leqslant \alpha\}$. Le corps $K$ est un corps de nombres de degré $d$ et $\delta = d$ si $K \subset \underset{\sim}{R}$, $\delta = d/2$ si $K \not\subset \underset{\sim}{R}$.

Les résultats (2) et (4) se déduisent des résultats (1) et (3) par le procédé de C. PISOT.

Dans le cas des fonctions de plusieurs variables, on n'utilise pas la méthode d'interpolation.

| Hypothèse | Méthode d'interpolation | Transformation de Laplace | Conclusion : $f(z) =$ |
|---|---|---|---|
| (1) $f(\underset{\sim}{N}) \subset \underset{\sim}{Z}$ | (a) $\alpha < \log 2$ (POLYA-HARDY) | (a) $\alpha < \log 2$ | $P(z)$ |
| | | (b) $\alpha < \alpha_0 = 0,843...$ (PISOT) | $\sum P_\gamma(z)\gamma^z$ $\gamma$ entier |
| (2) $f(\underset{\sim}{Z}) \subset \underset{\sim}{Z}$ | (a) $\alpha < \log(\frac{3+\sqrt{5}}{2})$ | (a) $\alpha < \log(\frac{3+\sqrt{5}}{2})$ (CARLSON [3]) | $P(z)$ |
| | | (b) $\alpha < \alpha'_0 = 0,9934...$ (PISOT) | $\sum P_\beta(z)\beta^z$ $\beta$ unité |
| (3) $f(\underset{\sim}{N}) \subset \mathcal{O}_K$ | (a) $\log(e^\alpha - 1) < -(\delta-1)\log(1+e^c)$ contient (1.a) conséquence de (3.a) en $m$ variables | (a) $\log(e^\alpha - 1) < -(\delta-1)\log(1+e^c)$ | $P(z)$ |
| | | (b) $\log \tau < -c(\delta-1)$ contient (1.b) | $\sum P_\gamma(z)\gamma^z$ $\gamma$ entier |
| (4) $f(\underset{\sim}{Z}) \subset \mathcal{O}_K$ | (a) $\log(2 \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2}) < -\frac{\delta-1}{2}\log(2+e^c+e^{-c})$ contient (2.a) | (a) $\log(2 \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2}) < -\frac{\delta-1}{2}\log(2+e^c+e^{-c})$ | $P(z)$ |
| | | (b) $\log \tau' < -(\delta-1)\log(e^c+e^{-c})$ contient (2.b) | $\sum P_\beta(z)\beta^z$ $\beta$ unité |

Tableau des résultats pour les fonctions d'une variable

| Hypothèse | Conditions sur $\alpha$ | Conclusion : $f(\underset{\sim}{z}) =$ |
|---|---|---|
| (1) | (a) $\alpha < \log 2$ (BAKER) | $P(\underset{\sim}{z})$ |
| $f(\underset{\sim}{N}^m) \subset \underset{\sim}{Z}$ | (b) $\alpha < \alpha_0 = 0,843...$ (AVANISSIAN et GAY) | $\sum P_{\underset{\sim}{\gamma}}(\underset{\sim}{z})\underset{\sim}{\gamma}^{\underset{\sim}{z}}$ |
| (2) | (a) $\alpha < \log(\frac{3+\sqrt{5}}{2})$ | $P(\underset{\sim}{z})$ |
| $f(\underset{\sim}{Z}^m) \subset \underset{\sim}{Z}$ | (b) $\alpha < \alpha'_0 = 0,9934...$ | $\sum P_{\underset{\sim}{\beta}}(\underset{\sim}{z})\underset{\sim}{\beta}^{\underset{\sim}{z}}$ |
| (3) | (a) $\log(e^\alpha-1) < -(\delta-1)\log(1+e^c)$ | $P(\underset{\sim}{z})$ |
| $f(\underset{\sim}{N}^m) \subset \mathcal{O}_K$ | (b) ? | |
| (4) | (a) $\log(2 \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2}) < -\frac{\delta-1}{2}\log(2+e^c+e^{-c})$ | $P(\underset{\sim}{z})$ |
| $f(\underset{\sim}{Z}^m) \subset \mathcal{O}_K$ | (b) ? | |

Tableau des résultats pour les fonctions de $m$ variables.

# BIBLIOGRAPHIE

[1] AVANISSIAN (V.) et GAY (R.). - Sur une transformation des fonctionnelles analytiques et ses applications aux fonctions entières de plusieurs variables, Bull. Soc. math. France, t. 103, 1975, p. 341-384.

[2] BAKER (A.). - A note on integral integer-valued functions of several variables, Proc. Camb. phil. Soc., t. 63, 1967, p. 715-720.

[3] CARLSON (F.). - Über ganzwertige Funktionen, Math. Z., t. 11, 1921, p. 1-23.

[4] CHABERT (J.-L.). - Anneaux de Fatou, l'enseignement mathématique, 2e Série, t. 18, 1972, p. 141-144.

[5] DUFRESNOY (J.) et PISOT (C.). - Prolongement analytique de la série de Taylor, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 68, 1951, p. 105-124.

[6] FATOU (P.). - Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Math., Uppsala, t. 30, 1906, p. 335-400.

[7] FEKETE (M.). - Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, Math. Z., t. 17, 1923, p. 228-249.

[8] FLIESS (M.). - Séries formelles rationnelles et reconnaissables, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 13e année, 1971/72, n° 12, 14 p.

[9] FUKASAWA (S.). - Über ganzwertige ganze Funktionen, Tôhoku Math. J., t. 27, 1926, p. 41-52.

[10] GEL'FOND (A.). - Sur les propriétés arithmétiques des fonctions entières, Tôhoku Math. J., t. 30, 1929, p. 280-285.

[11] GRAMAIN (F.). - Sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes prenant des valeurs algébriques aux points entiers, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 284, 1977, Série A, p. 17-19.

[12] HARDY (G. H.). - On a theorem of G. Pólya, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 19, 1916-1919, p. 60-63.

[13] KRONECKER (L.). - Zur Theorie der Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen, Monatsber. Akad. Berlin, 1881, p. 535-600.

[14] MARTINEAU (A.). - Extension en n-variables d'un théorème de Pólya-Carlson concernant les séries de puissances à coefficients entiers, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 273, 1971, Série A, p. 1127-1129.

[15] PISOT (C.). - Sur les fonctions arithmétiques analytiques à croissance exponentielle, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 222, 1946, p. 988-990.

[16] PISOT (C.). - Sur les fonctions analytiques arithmétiques et presque arithmétiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 222, 1946, p. 1027-1028.

[17] PÓLYA (G.). - Über ganzwertige ganze Funktionen, Rend. Circ. math. Palermo, t. 40, 1915, p. 1-16.

[18] PÓLYA (G.). - Über gewisse notwendige Determinantenkriterien für die Forsetzbarkeit einer Potenzreihe, Math. Annalen, t. 99, 1928, p. 687-706.

[19] PÓLYA (G.). - Über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten, Math. Annalen, t. 77, 1916, p. 497-513.

[20] PÓLYA (G.) and SZEGÖ (G.). - Problems and theorems in analysis, Vol. II. - Berlin, Springer-Verlag, 1976 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 216).
[Voir en particulier, Part 7, n° 24].

[21] ŠEINOV (V. P.). - Un critère de rationalité pour les fonctions holomorphes de deux variables complexes [en russe], Uč. Zap. Mosk. Obl. Ped. Inst., t. 166, 1966, p. 223-227 ; analysé dans Math. Reviews, t. 36, 1968, n° 1695.

[22] ŠEINOV (V. P.). - Transfinite diameter and some theorems of Pólya in the case of several complex variables, Siberian math. J., t. 12, 1971, p. 999-1004.

(Texte reçu le 28 novembre 1977)

François GRAMAIN
28 avenue du Panorama, B 7
92340 BOURG-LA-REINE