

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

JEAN-PIERRE BOREL

## Nombres premiers généralisés et équirépartition modulo 1

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 19, n° 1 (1977-1978),  
exp. n° 7, p. 1-7

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1977-1978\\_\\_19\\_1\\_A5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1977-1978__19_1_A5_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

NOMBRES PREMIERS GÉNÉRALISÉS ET ÉQUIRÉPARTITION MODULO 1

par Jean-Pierre BOREL

Résumé. - Le but de cet exposé est de présenter les résultats obtenus dans ma thèse de 3e cycle. Les démonstrations seront donc simplement esquissées, et le lecteur trouvera les démonstrations complètes dans [4].

1. Introduction.

Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble de nombres premiers généralisés de Beurling, c'est-à-dire un ensemble dénombrable  $\mathcal{P} = \{p_i\}_{i \geq 1}$  muni d'une application norme  $\mathcal{P} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}_+$  telle que

$$1 < \|p_1\| \leq \dots \leq \|p_i\| \leq \dots \text{ et } \lim_{i \rightarrow \infty} \|p_i\| = +\infty,$$

et soit  $\mathcal{N}$  le semi-groupe multiplicatif libre engendré par  $\mathcal{P}$ , auquel on prolonge  $\|\cdot\|$  de manière totalement multiplicative.  $\mathcal{N}$  peut alors être ordonné, éventuellement de plusieurs façons,  $\mathcal{N} = \{b_n\}_{n \geq 0}$  avec

$$1 = \|b_0\| \leq \|b_1\| \leq \dots \leq \|b_n\| \dots \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \|b_n\| = +\infty.$$

On note  $b$  et  $p$  l'élément générique de  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{P}$  respectivement. Dans toute la suite, nous ferons l'hypothèse classique

$$(1.1) \quad \exists A > 0, \quad B(x) = \sum_{\|b\| \leq x} 1 = Ax + R(x) \text{ avec } R(x) = o(x).$$

Beurling a montré que, si (1.1) est vérifiée avec  $R(x) = o(x \log^{-\gamma} x)$  et  $\gamma > 3/2$ , on obtient le théorème des nombres premiers

$$\pi(x) = \sum_{\|p\| \leq x} 1 = \frac{x}{\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

et que ce résultat est faux si  $\gamma < 3/2$  (cf. [3]).

Soit  $\underline{\mathbb{U}}$  le cercle complexe unité, et  $a_n = \exp 2\pi i \theta_n$  des éléments de  $\underline{\mathbb{U}}$ . Nous dirons que la suite  $\{a_n\}$  est équirépartie sur  $\underline{\mathbb{U}}$  si la suite  $\{\theta_n\}$  est équirépartie modulo 1. Le critère de Weyl s'écrit alors (cf. [9])

$$(1.2) \quad \{a_n\} \text{ équirépartie sur } \underline{\mathbb{U}} \iff \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n \leq N} a_n^k = o(N).$$

Le but de cet exposé est de répondre, du moins en partie, au problème suivant. Si  $f$  est une application de  $\mathcal{N}$  dans  $\underline{\mathbb{U}}$ , y a-t-il des liens entre les propriétés suivantes ?

La suite  $\{f(p_i)\}$  est équirépartie sur  $\underline{\mathbb{U}}$ , notée  $f \in E_q$ .

La suite  $\{f(b_n)\}$  est équirépartie sur  $\underline{\mathbb{U}}$ , notée  $f \in E$ .

Nous supposerons que  $f$  est multiplicative, et ce cas se ramène au cas de  $f$  totalement multiplicative, que nous allons traiter d'abord. Nous appellerons caractères de  $\mathcal{N}$ , et noterons  $X$ , les applications totalement multiplicatives de  $\mathcal{N}$

dans  $\underline{U}$ .

Nous ne donnerons ici que des indications sur les démonstrations, que l'on trouvera dans leur totalité dans [4].

## 2. Critères d'équirépartition sur $\underline{U}$ .

Comme sur  $\underline{N}^*$ , on sait définir sur  $\mathcal{K}$  une fonction  $\Lambda$  de Von Mangolt

$$\Lambda(b) = \begin{cases} \log \|p\| & \text{si } b = p^\alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Nous poserons alors, si  $f$  est une application de  $\mathcal{K}$  dans  $\underline{C}$ ,

$$B(x, f) = \sum_{\|b\| \leq x} f(b), \quad \pi(x, f) = \sum_{\|p\| \leq x} f(p), \quad \psi(x, f) = \sum_{\|b\| \leq x} \Lambda(b) f(b).$$

Nous supposerons que (1.1) est vérifiée, avec  $R(x) = O(x \log^{-\gamma_0} x)$ . Alors nous aurons le théorème suivant.

**THEOREME 1.** - Soit  $f$  une application de  $\mathcal{K}$  dans  $\underline{U}$ . Alors

$$f \in E \iff \forall n \in \underline{N}^*, \quad B(x, f^n) = o(x),$$

$$f \in E_q \iff \forall n \in \underline{N}^*, \quad \psi(x, f^n) = o(x),$$

dès que l'une des conditions suivantes est vérifiée

$$\gamma_0 > 3/2,$$

$$\gamma_0 > 1 \text{ et, } \forall i \in \underline{N}^*, \quad \|p_i\| < \|p_{i+1}\|.$$

Ce théorème utilise essentiellement le critère de Weyl (1.2) et des évaluations de  $B(x)$  et  $\pi(x)$ , en remarquant qu'avec les hypothèses faites le nombre des entiers, tels que  $\|b\| = x$ , est asymptotiquement négligeable, ainsi que le nombre des premiers tels que  $\|p\| = x$ .

L'évaluation de  $\pi(x)$  est celle de Beurling dans le premier cas, et l'inégalité de Čebyšev dans le second

$$\exists C > 0, \quad \exists D > 0, \quad C \frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq D \frac{x}{\log x},$$

inégalité vraie dès que (1.1) est vraie avec  $\gamma_0 > 1$  (voir [6]).

Enfin, on passe des fonctions  $\pi$  aux fonctions  $\psi$  en utilisant le résultat suivant

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} \psi(x, f) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{\log x}\right)^{-1} \pi(x, f),$$

vrai sous les hypothèses du théorème, et donc la démonstration est analogue au cas classique de  $\underline{N}^*$ .

## 3. Fonctions $B$ et $\psi$ , et séries $L$ .

Si  $f$  est une application de  $\mathcal{K}$  dans  $\underline{U}$ , on sait définir la fonction  $L(x, f) = \sum f(b) \|b\|^{-s}$ , série de Dirichlet holomorphe pour  $\text{Re}(s) > 1$ , si l'on

suppose (1.1). Si, de plus,

$$(3.1) \quad \exists A(f), \quad B(x, f) = A(f)x + R(x, f) \quad \text{avec} \quad R(x, f) = o(x),$$

on obtient par intégration par parties

$$(3.2) \quad L(s, f) = \int_1^\infty x^{-s} dB(x, f) = \frac{A(f)}{s-1} + A(f) + s \int_1^\infty x^{-s} \frac{R(x, f)}{x} dx.$$

Mais si de plus  $f = X$  est un caractère,  $L(s, X)$  a une écriture en produit eulérien pour  $\operatorname{Re}(s) > 1$ ,  $L(s, X) = \prod (1 - X(p) \|p\|^{-s})^{-1}$ , d'où l'on déduit

$$(3.3) \quad -\frac{L'}{L}(s, X) = \sum X(b) \Lambda(b) \|b\|^{-s} = \int_1^\infty x^{-s} d\psi(x, X)$$

ce qui permet, selon une méthode classique, d'obtenir  $\psi(x, X)$  à l'aide de la connaissance de  $L'/L$ .

C'est cette méthode qui a permis à MÜLLER d'obtenir, si (3.1) est vérifiée avec  $R(x, X) = o(x^\theta)$ ,  $\theta < 1$ , l'estimation (cf. [10])

$$(3.4) \quad \psi(x, X) = B(X)x + o(x),$$

où  $B(X)$  est l'ordre du pôle  $s = 1$  de  $L(s, X)$ , et vaut 1, 0 ou -1. Cette méthode nécessite cependant que  $L(s, X)$  ait un prolongement non nul (sauf en  $s = 1$ ), et méromorphe sur une partie  $\operatorname{Re}(s) > \theta$ ,  $\theta < 1$ .

Ce résultat a été obtenu de manière tout à fait différente par AMITSUR ([1] et [2]), qui suppose (3.1) vrai avec  $R(x, X) = O(x \log^{-\gamma} x)$ , et qui obtient encore (3.4),  $B(X)$  correspondant à l'ordre du "pôle"  $s = 1$  d'une fonction holomorphe seulement pour  $\operatorname{Re}(s) > 1$ , et dès que  $\gamma > 2$  (resp. 3) si  $B(X) = 1$  ou 0 (resp. -1). Mais pour obtenir ce résultat, AMITSUR suppose, et c'est essentiel dans la démonstration, que  $X$  est d'ordre fini, ce qui entraîne immédiatement  $X \notin E$ . La fin de cet exposé consiste à supprimer cette dernière restriction, en permettant des restes  $R(x, X)$  analogues à ceux d'AMITSUR.

#### 4. Résultat principal.

Nous dirons que  $f \in \mathfrak{F}_\gamma$  si  $f$  vérifie (3.1) avec  $\exists \varepsilon > 0$ ,  $R(x, f) = o(x \log^{-(\gamma+\varepsilon)} x)$ , et nous définissons  $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 \cup \mathfrak{K}_2 \cup \mathfrak{K}_3$  par

$$\mathfrak{K}_1 = \{X \in \mathfrak{F}_2, A(X) \neq 0\}, \quad \text{on pose alors } B(X) = 1,$$

$$\mathfrak{K}_2 = \{X \in \mathfrak{F}_2, A(X) = 0 \text{ et } L_0(X) \neq 0\}, \quad \text{on pose alors } B(X) = 0,$$

$$\mathfrak{K}_3 = \{X \in \mathfrak{F}_3, A(X) = L_0(X) = 0\}, \quad \text{on pose alors } B(X) = -1,$$

où, si  $f \in \mathfrak{F}_\gamma$ ,  $L_j(f)$  est défini, pour  $0 \leq j \leq \gamma - 1$ , par

$$L_j(f) = \int_1^\infty \frac{R(x, f)}{x^2} \log^j x dx.$$

On note  $\langle X \rangle$  le groupe engendré par  $X$ . Alors nous avons le théorème suivant.

**THÉORÈME 2.** - Si  $X$  est un caractère de  $\mathfrak{N}$  tel que  $\langle X \rangle \subset \mathfrak{K}$ , on a

$$X \in E \iff X \in \text{Eq} .$$

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème 1 et de l'évaluation.

**THÉORÈME 3.** - Si  $1 \in \mathbb{K}$ ,  $X \in \mathbb{K}$ , et  $X^2 \in \mathfrak{S}_1$ ,

$$\psi(x, X) = B(X)x + o(x) .$$

Car, si  $X \in \mathbb{K}_3$ , on peut montrer que  $X^2 \in \mathbb{K}_1$ , d'où, si  $\langle X \rangle \subset \mathbb{K}$ ,

$$\begin{aligned} X \in E &\iff \forall n \in \mathbb{N}^*, X^n \in \mathbb{K}_2 \cup \mathbb{K}_3 \iff \forall n \in \mathbb{N}^*, X^n \in \mathbb{K}_2 \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}^*, B(X^n) = 0 \iff X \in \text{Eq} . \end{aligned}$$

La démonstration du théorème 3 est basée sur un résultat contenu dans un théorème de IKEHARA [8].

**THÉORÈME 4.** - Soit  $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$  croissante, et telle que l'intégrale  
 $F(s) = \int_1^\infty x^{-s} df(x)$  converge absolument pour  $\text{Re}(s) > 1$ . S'il existe  $A > 0$  tel  
que  $F(s) - (A/(s-1))$  soit continue sur le demi-plan fermé  $\text{Re}(s) \geq 1$ , alors

$$f(x) = Ax + o(x) .$$

Ce qui, avec (3.2), nous amène à chercher à quelle condition

$$((L'/L)(s, X) + (B(X)/(s-1)))$$

est continue sur le demi-plan fermé  $\text{Re}(s) \geq 1$ .

D'après la définition de  $\mathbb{K}$  (les conditions  $\mathfrak{S}_1$ ,  $\mathfrak{S}_2$  et  $\mathfrak{S}_3$  sont exactement choisies pour ce résultat) et de  $B(X)$ , il existe un voisinage de  $s = 1$  dans le demi-plan  $\text{Re}(s) \geq 1$  tel que  $((L'/L)(s, X) + (B(X)/(s-1)))$  soit continue sur ce voisinage.

D'autre part, si  $X \in \mathfrak{S}_1$ ,  $L(s, X)$  a un prolongement continu sur le demi-plan  $\text{Re}(s) \geq 1$ , et  $L'(s, X)$  de même, dès que  $X \in \mathfrak{S}_2$ , d'après l'expression (3.2).

Pour montrer que  $(L'/L)(s, X)$  a un prolongement continu sur un voisinage de  $1 + it$ ,  $t \neq 0$ , dans le demi-plan  $\text{Re}(s) \geq 1$ , il suffit donc de montrer que  $L(1 + it, X) \neq 0$ . Cela se fait par la méthode classique de Hadamard, qui consiste à montrer que si  $L(1 + it, X)$  est nul, avec  $t \neq 0$ ,  $L(s, X^2)$  a une singularité en  $s = 1 + 2it$ . Cette méthode ne nécessite que les hypothèses  $X \in \mathfrak{S}_2$  et  $X^2 \in \mathfrak{S}_1$ .

Il reste à trouver des fonctions croissantes pour utiliser le théorème 4. On prend

$$f_1(x) = 2\psi(x) - \text{Re}(\psi(x, X)), \text{ d'où } F_1(s) = -2\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{2}\left(\frac{L'(s, X)}{L(s, X)} + \overline{\frac{L'(\bar{s}, X)}{L(\bar{s}, X)}}\right),$$

$$f_2(x) = \psi(x) = \text{Im}(\psi(x, X)), \text{ d'où } F_2(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{i}{2}\left(\frac{L'(s, X)}{L(s, X)} - \overline{\frac{L'(\bar{s}, X)}{L(\bar{s}, X)}}\right),$$

$$f_3(x) = \psi(x), \text{ d'où } F_3(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)},$$

où  $\psi(x) = \psi(x, 1)$  et  $\zeta(s) = L(s, 1)$ . Les hypothèses  $1 \in \mathfrak{F}_2$ ,  $X \in \mathfrak{F}_2$  et  $X^2 \in \mathfrak{F}_1$  permettent d'appliquer le théorème 4, d'où

$$2\psi(x) - \operatorname{Re}(\psi(x, X)) = (2 - B(X))x + o(x),$$

$$\psi(x) - \operatorname{Im}(\psi(x, X)) = x + o(x),$$

$$\psi(x) = x + o(x),$$

et les théorèmes 3 et 2.

##### 5. Problème de l'équirépartition d'un produit de caractères.

Le problème de l'évaluation d'une somme  $B(x, XX')$ , connaissant  $B(x, X)$  et  $B(x, X')$ , ou plus généralement des renseignements sur  $X$  et  $X'$  mais pas sur leur produit, est important. Si on savait le résoudre, l'hypothèse  $\langle X \rangle \subset \mathcal{K}$  du théorème 2, qui porte sur toutes les puissances  $X^n$ , pourrait être remplacée par des hypothèses sur  $X$  uniquement. On ne sait malheureusement rien dire en général, mais, dans certains cas particuliers, nous obtenons des résultats.

Soit  $L_\theta$  le caractère de  $\mathcal{N}$ ,  $L_\theta(b) = \|b\|^{i\theta} = \exp(i\theta \log \|b\|)$ . Alors nous avons le théorème suivant.

##### THÉORÈME 5.

$$f \in E \implies \forall \theta \in \underline{\mathbb{R}}, \quad fL_\theta \in E,$$

$$f \in E_q \implies \forall \theta \in \underline{\mathbb{R}}, \quad fL_\theta \in E_q.$$

Ce théorème est intéressant car, en le combinant avec le théorème 2, on obtient

$$\exists \theta \in \underline{\mathbb{R}}, \quad \langle XL_\theta \rangle \subset \mathcal{K} \implies \{X \in E \iff X \in E_q\}.$$

La démonstration du théorème 5 est très simple, et repose sur la formule de sommation de Abel. Si  $g$  est une application de  $\mathcal{N}$  dans  $\underline{\mathbb{C}}$ :

$$B(x, gL_\theta) = B(\beta, gL_\theta), \quad \text{où } \beta \text{ est le plus grand entier de } \mathcal{N} \text{ tel que } \|\beta\| \leq x \\ = B(\beta, g) \|\beta\|^{i\theta} - \int_1^{\|\beta\|} B(t, g) d(t^{i\theta}),$$

et l'on obtient

$$B(x, g) = o(x) \implies B(x, gL_\theta) = o(\|\beta\|) = o(x),$$

et l'équivalence entre les deux, car  $g = (gL_\theta)L_{-\theta}$ . Il suffit alors d'utiliser le théorème 1, en remarquant que  $L_\theta^n = L_{n\theta}$  et  $\psi(x, f) = B(x, Af)$ .

Ce résultat contient un résultat de DELANGE sur  $\underline{\mathbb{N}}$  (voir [5]). Si  $f$  est une fonction simplement additive sur  $\underline{\mathbb{N}}$ , le problème de l'équirépartition modulo 1 de la suite  $\{f(n)\}$  est indépendant de l'ajout d'un terme  $\theta \log n$  à  $f$ , résultat qui se traduit, avec nos notations, par

$$\text{si } \mathcal{N} = \underline{\mathbb{N}}^*, \quad f \in E \implies \forall \theta \in \underline{\mathbb{R}}, \quad fL_\theta \in E$$

Notons  $\langle X, X' \rangle$  le groupe engendré par  $X$  et  $X'$ . Alors, à l'aide d'une ca-

ractérisation de  $E \cap \{X ; \langle X \rangle \subset \mathbb{K}\}$ , et de l'étude des groupes de caractères contenus dans  $\mathbb{K}$ , on obtient le résultat suivant, du même type que le précédent, et qui généralise le théorème 5, car  $1 \notin E \implies \forall \theta \in \underline{\mathbb{R}}, L_\theta \notin E$ .

THÉOREME 6. - Soient  $X$  et  $X'$  deux caractères de  $\mathcal{N}$  tels que  $\langle X, X' \rangle \subset \mathbb{K}$ .  
Alors

$$\left. \begin{array}{l} X' \in E \\ X \notin E \end{array} \right\} \implies \forall n \in \underline{\mathbb{Z}}, n \neq 0, XX'^n \in E.$$

En particulier, ce résultat est vrai si  $X$  est d'ordre fini, car alors, pour un  $n > 0$ ,  $B(x, X^n) = B(x, 1) \neq o(x)$  et  $X \notin E$ . Néanmoins la condition  $\langle X, X' \rangle \subset \mathbb{K}$  est là encore très contraignante.

### 6. Fonctions simplement multiplicatives de $\mathcal{N}$ dans $\underline{U}$ .

Nous noterons  $Y$  une telle application,  $X$  l'application totalement multiplicative définie,  $\forall p \in \mathcal{P}$ , par  $X(p) = Y(p)$ . Il est évident que  $Y \in E_q$  est équivalent à  $X \in E_q$ .

D'autre part, en généralisant la technique employée par HALASZ dans [7], nous montrons que, si  $B(x, X) = Cx + o(x)$ , alors  $B(x, Y) = CH(1)x + o(x)$ , où  $H$  est une certaine série de Dirichlet absolument convergente en  $s = 1$ , d'où

$$Y \in E \implies X \in E.$$

Malheureusement, on ne peut pas faire passer de  $B(x, X)$  à  $B(x, Y)$  des restes autres que  $o(x)$ , par exemple des restes  $o(x \log^{-Y} x)$ . Le théorème 2 donne donc l'équivalence  $Y \in E \implies Y \in E_q$ , mais avec des conditions portant sur  $X$ .

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMITSUR (S. A.). - Arithmetic linear transformations and abstract prime number theorems, *Canad. J. Math.*, t. 13, 1961, p. 83-109.
- [2] AMITSUR (S. A.). - Correction to "Arithmetic linear transformations", *Canad. J. Math.* t. 21, 1969, p. 1-5.
- [3] BEURLING (A.). - Analyse de la loi asymptotique de distribution des nombres premiers généralisés, I, *Acta Math.*, Uppsala, t. 68, 1937, p. 255-291.
- [4] BOREL (J.-P.). - Problèmes d'équirépartition liés aux nombres premiers généralisés de Beurling et aux systèmes d'entiers de Gauss généralisés. Thèse de 3e cycle, Université Aix-Marseille-II, 1977.
- [5] DELANGE (H.). - Quelques résultats nouveaux sur les fonctions additives, "Colloque de théorie des nombres [1969. Bordeaux]", *Bull. Soc. math. France*, Mémoire 25, 1971, p. 45-53.
- [6] DIAMOND (H. G.). - Chebyshev estimates for Beurling generalized prime numbers, *Proc. Amer. math. Soc.*, t. 39, 1973, p. 503-508.
- [7] HALASZ (G.). - Über die Mittelwerte multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen, *Acta Math. Acad. Sc. Hungar.*, t. 19, 1968, p. 365-403.

- [8] IKEHARA (S.). - An extension of Landau's theorem in the analytical theory of numbers, J. of Math. and Phys., t. 10, 1937, p. 1-12.
- [9] KUIPERS (L.) and NIEDERREITER (H.). - Uniform distribution of sequences. - New York, J. Wiley and Sons, 1974 (Pure and applied Mathematics, Wiley-Interscience Series).
- [10] MULLER (H.). - Ein Betrag zur abstrakten Primzahltheorie, J. für die reine und angew. Math., t. 259, 1973, p. 171-182.

(Texte reçu le 7 novembre 1977)

Jean-Pierre BOREL  
Mathématiques université de Limoges  
123 rue Albert Thomas  
87100 LIMOGES

---