Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Anna Helversen-Pasotto

L’identité de Barnes pour les corps finis

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 19, nº 1 (1977-1978), exp. nº 22, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1977-1978__19_1_A18_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
19e année, 1977/78, n° 22, 12 p.
23 janvier 1978

L'IDENTITÉ DE BARNES POUR LES CORPS FINIS

par Anna HELVERSEN-PASOTTO

Résumé. - On obtient cinq identités nouvelles entre sommes de Gauss, attachées à un corps fini, chacune d'elles exprime un produit de sommes de Gauss comme somme de tels produits. L'une d'entre elles est un analogue formel du lemme de Barnes bien connu dans la théorie des fonctions hypergéométriques ; les autres en sont des formes tordues au sens de la théorie de Galois. Deux des identités peuvent s'obtenir par l'étude des représentations du groupe $GL(2, \underset{\sim}{F}_q)$. Nous donnons une démonstration unifiée des cinq identités, basée sur l'étude de certaines algèbres commutatives de degré 4 du corps fini $\underset{\sim}{F}_q$.

1. Introduction.

L'étude de la décomposition de la représentation de Gel'fand-Graev du groupe $GL(2, \underset{\sim}{F}_q)$ amène à deux identités de sommes de Gauss (cf. [2]). Il s'agit des identités (i) et (iv) du théorème 1 ci-dessous.

L'identité (i) correspond à la série principale de représentations de $GL(2, \underset{\sim}{F}_q)$; cette identité s'interprète facilement comme analogue fini du lemme classique de Barnes concernant la fonction gamma :

$$(2\pi i)^{-1} \int_{-\infty i}^{\infty i} \Gamma(a_1 + s)\Gamma(a_2 - s)\Gamma(a_3 + s)\Gamma(a_4 - s)$$
$$= \frac{\Gamma(a_1 + a_2)\Gamma(a_2 + a_3)\Gamma(a_3 + a_4)\Gamma(a_4 + a_1)}{\Gamma(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)} \quad \text{(cf. [4]).}$$

Ce lemme de Barnes a d'ailleurs été utilisé par H. JACQUET [3] dans l'étude des formes automorphes sur $GL(2)$, et certains de ses calculs sur les facteurs ε des représentations sont proches des nôtres.

L'identité (iv) correspond à la série discrète de représentations de $GL(2, \underset{\sim}{F}_q)$.

Dans le présent exposé, on obtient une identité générale qui englobe les identités (i) et (iv) et qui donne lieu à trois nouvelles identités (ii), (iii) et (v).

L'idée d'étendre le cadre des identités initiales est due à P. DELIGNE ; la formulation de la situation générale (ainsi d'ailleurs que l'idée initiale d'exprimer le lien entre sommes de Gauss et représentations de $GL(n, \underset{\sim}{F}_q)$ sous forme d'identités) est due à P. CARTIER.

2. Enoncé des identités.

Soit $\underset{\sim}{F}_q$ le corps fini à q éléments. On note $\underset{\sim}{F}_q^+$ (resp. $\underset{\sim}{F}_q^\times$) le groupe additif (resp. multiplicatif) de $\underset{\sim}{F}_q$, et on se fixe une fois pour toutes un caractère non trivial e du groupe additif $\underset{\sim}{F}_q^+$. Pour un caractère α du groupe multiplicatif $\underset{\sim}{F}_q^\times$, on pose

$$\delta(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \alpha = 1 , \\ 0 & \text{si} \quad \alpha \neq 1 , \end{cases}$$

et

$$g(\alpha) = \sum_a \alpha(a) e(a) \quad \text{(somme de Gauss de } \alpha \text{)} ,$$

où l'on somme sur tous les a dans $\mathbb{F}_q^\times$. On note $\mathrm{Tr}_{m/n}$ la trace de $\mathbb{F}_{q^m}$ sur $\mathbb{F}_{q^n}$, et l'on note n (resp. $\mathfrak{N}$) la norme de $\mathbb{F}_{q^2}$ sur $\mathbb{F}_q$ (resp. de $\mathbb{F}_{q^4}$ sur $\mathbb{F}_{q^2}$). Pour un caractère Λ de $\mathbb{F}_{q^2}^\times$, on note $G(\Lambda)$ la somme de Gauss suivante

$$G(\Lambda) = \sum_x \Lambda(x) \ e(\mathrm{Tr}_{2/1}(x)) ,$$

où l'on somme sur tous les x dans $\mathbb{F}_{q^2}^\times$. De manière analogue, pour un caractère Ψ de $\mathbb{F}_{q^4}^\times$, on pose

$$\mathfrak{G}(\Psi) = \sum_z \Psi(z) \ e(\mathrm{Tr}_{4/1}(z)) ,$$

où l'on somme sur tous les z dans $\mathbb{F}_{q^4}^\times$.

THÉORÈME 1. - On a les cinq identités suivantes :

(i) Etant donnés quatre caractères α_1, α_2, α_3, α_4 de $\mathbb{F}_q^\times$, on a

$$(q-1)^{-1} \sum_\alpha g(\alpha_1 \alpha)\, g(\alpha_2 \alpha^{-1})\, g(\alpha_3 \alpha)\, g(\alpha_4 \alpha^{-1})$$
$$= \frac{g(\alpha_1 \alpha_2)\, g(\alpha_2 \alpha_3)\, g(\alpha_3 \alpha_4)\, g(\alpha_4 \alpha_1)}{g(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)} + q(q-1)\, \delta(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)(\alpha_1 \alpha_3)(-1) ,$$

où l'on somme sur tous les caractères α de $\mathbb{F}_q^\times$.

(ii) Etant donné un caractère Ψ de $\mathbb{F}_{q^4}^\times$, on note ψ la restriction de Ψ à $\mathbb{F}_q^\times$. On a

$$-(q+1)^{-1} \sum_\Lambda \mathfrak{G}(\Psi(\Lambda \circ \mathfrak{N})) = \frac{\mathfrak{G}(\Psi^{q+1})}{g(\psi)} + q(q-1)\delta(\psi)\Psi(\varepsilon_0) ,$$

où l'on somme sur les caractères Λ de $\mathbb{F}_{q^2}^\times$ dont la restriction à $\mathbb{F}_q^\times$ soit triviale, et où $\varepsilon_0 \in \mathbb{F}_{q^2}$ est tel que $\varepsilon_0^{q-1} = -1$.

(iii) Soient Λ_1 et Λ_2 deux caractères de $\mathbb{F}_{q^2}^\times$, et soit λ_1 (resp. λ_2) la restriction de Λ_1 (resp. Λ_2) à $\mathbb{F}_q^\times$; on a

$$(q-1)^{-1} \sum_\alpha G(\Lambda_1(\alpha \circ n))G(\Lambda_2(\alpha \circ n)^{-1})$$
$$= \frac{G(\Lambda_1 \Lambda_2)G(\Lambda_1 \Lambda_2^q)}{g(\lambda_1 \lambda_2)} + q(q-1)\delta(\lambda_1 \lambda_2)\lambda_1(-1) ,$$

où l'on somme sur tous les caractères α de $\mathbb{F}_q^\times$.

(iv) Soient α_1 et α_2 deux caractères de $\mathbb{F}_q^\times$, et soit Λ un caractère de $\mathbb{F}_{q^2}^\times$; on note λ la restriction de Λ à $\mathbb{F}_q^\times$. On a

$$-(q-1)^{-1}\sum_{\alpha} g(\alpha_1\,\alpha)\, g(\alpha_2\,\alpha)\, G(\Lambda(\alpha\circ n)^{-1})$$
$$= \frac{G(\Lambda(\alpha_1\circ n))\; G(\Lambda(\alpha_2\circ n))}{g(\alpha_1\,\alpha_2\,\lambda)} + q(q-1)\,\delta(\alpha_1\,\alpha_2\,\lambda)\,\lambda(-1)\ ,$$

où l'on somme sur tous les caractères α *de* $\underset{\sim}{F}_q^{\times}$.

(v) *Pour* $i = 1\ ,\ 2$, *soit* Λ_i *un caractère de* $\underset{\sim}{F}_{q^2}^{\times}$, *et* λ_i *sa restriction à* $\underset{\sim}{F}_q^{\times}$. *On a*

$$(q+1)^{-1}\sum_{\Lambda} G(\Lambda_1\,\Lambda)\; G(\Lambda_2\,\Lambda)$$
$$= \frac{g(\lambda_1)\; g(\lambda_2)\; G(\Lambda_1\,\Lambda_2)}{g(\lambda_1\,\lambda_2)} + q(q-1)\,\delta(\lambda_1\,\lambda_2)\,\lambda_1(-1)(\Lambda_1\,\Lambda_2)(\varepsilon_0)\ ,$$

où l'on somme sur les caractères Λ *de* $\underset{\sim}{F}_{q^2}^{\times}$ *dont la restriction à* $\underset{\sim}{F}_q^{\times}$ *soit triviale, et où* ε_0 *désigne un élément de* $\underset{\sim}{F}_{q^2}^{\times}$ *tel que* $\varepsilon_0^{q-1} = -1$.

Les cinq identités ci-dessus sont des cas particuliers d'une identité plus générale qu'on énoncera dans la suite.

3. Enoncé de l'identité générale.

On note $\underset{\sim}{F}$ la cloture algébrique de $\underset{\sim}{F}_q$. On désigne par I l'ensemble $\{1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\}$ que l'on considère comme l'ensemble des entiers modulo 4 . On pose

$$A = \{(x_i)_{i\in I}\ ;\ \ x_i \in \underset{\sim}{F}\ \text{ pour }\ i \in I\} = \underset{\sim}{F}^4\ .$$

Le corps $\underset{\sim}{F}$ se plonge dans A par $a \longmapsto (a\ ,\ a\ ,\ a\ ,\ a)$, pour $a \in \underset{\sim}{F}$, et A est une algèbre sur $\underset{\sim}{F}$. On note $\mathfrak{S}_4$ le groupe symétrique formé par les permutations de l'ensemble I . En posant, pour $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ et $x = (x_i)_{i\in I} \in A$,

$$(x^{\sigma})_j = x_{\sigma(j)}\ \text{ pour }\ j \in I\ ,$$

on définit une action à droite de $\mathfrak{S}_4$ sur A . On définit l'homomorphisme de Frobenius de l'algèbre A par $x \longmapsto x^q$, où l'on a donc

$$(x^q)_j = x_j^q\ ,\ \text{pour }\ j \in I\ \text{ et }\ x = (x_i)_{i\in I} \in A\ .$$

Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_4$, on pose

$$A_{\sigma} = \{x \in A\ ;\ \ x^{\sigma} = x^q\}\ .$$

On a $A_{\sigma} \cap \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{F}_q$, et A_{σ} est une algèbre de degré 4 sur $\underset{\sim}{F}_q$.

On définit $r : I \longrightarrow I$ (resp. $s : I \longrightarrow I$) par

$$r(i) = i + 1\ \ (\text{resp. } s(i) = -\,i\ )\ (\text{calcul modulo } 4\ )\ .$$

On a les relations

$$r^4 = 1\ ,\ \ s^2 = 1\ \text{ et }\ (rs)^2 = 1\ .$$

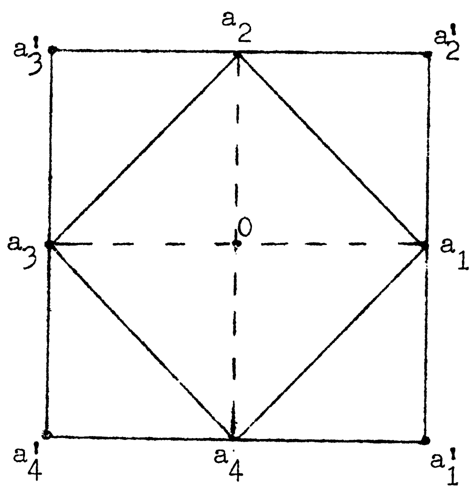
Le sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$, engendré par r et s , s'identifie au groupe diédral $\mathfrak{D}_4$, et est formé par les éléments r^j et $r^j s$ avec $1 \leqslant j \leqslant 4$; on a explicitement pour i , $j \in I$,

$$\left.\begin{aligned} r^j(i) &= i + j \\ (r^j s)(i) &= -i + j \end{aligned}\right. \quad \text{(calcul modulo 4) .}$$

En posant $s' = rs$, on a $(s')^2 = 1$ et $(rs')^2 = 1$; il s'ensuit qu'on définit un automorphisme de $\mathfrak{D}_4$ par $\sigma \longmapsto \sigma'$, où

$$\sigma' = \begin{cases} r^j & \text{si } \sigma = r^j \\ r^j s' & \text{si } \sigma = r^j s \end{cases} \quad \text{(pour } j \in I \text{).}$$

La relation entre σ et σ' admet une <u>interprétation géométrique</u> :



Notons a (resp. a') le carré de sommets a_1 , a_2 , a_3 , a_4 (resp. a'_1 , a'_2 , a'_3 , a'_4). Un élément σ de $\mathfrak{D}_4$ correspond à une transformation isométrique D_σ du plan qui transforme chacun des carrés a et a' en lui-même, en envoyant a_i sur $a_{\sigma(i)}$ et a'_i sur $a'_{\sigma'(i)}$. Si l'on prend 0 comme origine et a_1 , a_2 comme vecteurs de base dans le plan, D_σ est un élément du groupe orthogonal $O(2 , \underset{\sim}{R})$, et l'on a $a'_i = a_i + a_{i-1}$ pour tout $i \in I$. Noter que D_r est la rotation d'angle $\pi/2$ dans le sens direct, et D_s la symétrie par rapport à la droite $a_2\,a_4$.

On définit une application $f : A \longrightarrow A$ en posant, pour $x \in A$, $f(x) = xx^r$; on remarque que f est compatible avec la structure multiplicative de l'algèbre A , et on vérifie facilement que $f(x^{\sigma'}) = f(x)^\sigma$, pour tout $\sigma \in \mathfrak{D}_4$ et $x \in A$. On en déduit que f définit un homomorphisme du groupe multiplicatif $A^\times_{\sigma'}$ de $A_{\sigma'}$ dans le groupe multiplicatif $A^\times_\sigma$ de A_σ , pour tout $\sigma \in \mathfrak{D}_4$.

On pose $\zeta = r^2$, et on remarque que ζ est dans le centre du groupe $\mathfrak{D}_4$. En posant

$$B = \{x \in A \ ; \ \ x^\zeta = x\} ,$$

on remarque que B est invariant par l'action de $\mathfrak{D}_4$ sur A . On définit la norme $N : A \longrightarrow B$ par $N(x) = xx^\zeta$, pour $x \in A$, et on remarque que N commute à l'action de $\mathfrak{D}_4$ sur A . On pose

$$B_\sigma = B \cap A_\sigma \text{ , pour tout } \sigma \in \mathfrak{D}_4 ,$$

et on obtient la norme de A_σ sur B_σ par restriction de N à A_σ . L'algèbre

B_σ est isomorphe à $\underset{\sim}{F}_q \times \underset{\sim}{F}_q$ ou à $\underset{\sim}{F}_{q^2}$; on note $\varepsilon(B_\sigma)$ le signe de cette algèbre, c'est-à-dire qu'on a

$$\varepsilon(B_\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } B_\sigma \simeq \underset{\sim}{F}_q \times \underset{\sim}{F}_q , \\ -1 & \text{si } B_\sigma \simeq \underset{\sim}{F}_{q^2} ; \end{cases}$$

on fera plus loin la liste des algèbres A_σ , $A_{\sigma'}$, B_σ et $B_{\sigma'}$ (pour $\sigma \in \mathfrak{D}_4$) (cf. la table suivant l'énoncé du théorème 2).

On définit la trace Tr de A sur $\underset{\sim}{F}$ par $\mathrm{Tr}(x) = \sum_{i\in I} x_i$; on a, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ et $x \in A_\sigma$, la relation $\mathrm{Tr}(x)^q = \sum_{i\in I} x_i^q = \sum_{i\in I} x_{\sigma(i)} = \mathrm{Tr}(x)$, d'où $\mathrm{Tr}(x) \in \underset{\sim}{F}_q$; la restriction de la trace de A à l'algèbre A_σ définit la trace de A_σ sur $\underset{\sim}{F}_q$.

Etant donné un caractère Φ de $A_\sigma^\times$, on note Φ' le caractère $\Phi \circ f$ de $A_{\sigma'}^\times$ (pour $\sigma \in \mathfrak{D}_4$). Les sommes de Gauss correspondantes sont définies par

$$G(\Phi) = \sum_x \Phi(x) \ e\,(\mathrm{Tr}(x)) ,$$

où l'on somme sur tous les x dans $A_\sigma^\times$, et

$$G(\Phi') = \sum_{x'} \Phi'(x') \ e\,(\mathrm{Tr}(x')) ,$$

où l'on somme sur tous les x' dans $A_{\sigma'}^\times$.

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_4$, on note $\varepsilon(\sigma)$ le signe de la permutation σ ; c'est égal à $(-1)^{m(\sigma)}$ où $m(\sigma)$ est le nombre des orbites de σ .

THÉORÈME 2. - Soient $\sigma \in \mathfrak{D}_4$, et Φ un caractère multiplicatif de A_σ , soit φ la restriction de Φ à $\underset{\sim}{F}_q^\times$. On a l'identité suivante :

$$\varepsilon(\sigma)\frac{1}{M} \sum_{\Phi_1} G(\Phi_1) = \frac{G(\Phi')}{g(\varphi)} + q(q-1)\ \delta(\varphi)\ \Phi(\varepsilon_0) ,$$

où l'on somme sur les caractères Φ_1 de $A_\sigma^\times$ tels que $\Phi_1' = \Phi'$, où $M = (B_\sigma^\times : \underset{\sim}{F}_q^\times)$ désigne le nombre des caractères Φ_1 en question, et où ε_0 est un élément de $B_\sigma^\times$ tel que $\mathrm{Tr}_{B_\sigma/\underset{\sim}{F}_q}(\varepsilon_0) = 0$.

Le théorème 2 fournit une identité explicite pour chaque algèbre A_σ avec $\sigma \in \mathfrak{D}_4$. Cette identité ne dépend que de la classe de conjugaison de σ dans $\mathfrak{D}_4$. On a les cinq classes suivantes :

$c_{(i)} = \{1\}$,

$c_{(ii)} = \{r , r^3\}$,

$c_{(iii)} = \{r^2\}$,

$c_{(iv)} = \{s , r^2 s\}$,

$c_{(v)} = \{rs , r^3 s\}$.

Le tableau suivant donne une description des termes qui interviennent dans la formule générale du théorème 2, et permet de déduire le théorème 1 du théorème 2 (voir aussi le lemme 6 de la section 4).

	σ	A_σ	B_σ	σ'	$A_{\sigma'}$	$B_{\sigma'}$
(i)	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	$\mathbb{F}_q\times\mathbb{F}_q\times\mathbb{F}_q\times\mathbb{F}_q$ (a_1,a_2,a_3,a_4)	$\mathbb{F}_q\times\mathbb{F}_q$ (a_1,a_2,a_1,a_2)	σ	A_σ	B_σ
(ii)	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$	$\mathbb{F}_{q^4}$ (z,z^q,z^{q^2},z^{q^3})	$\mathbb{F}_{q^2}$ (x,x^q,x,x^q)	σ	A_σ	B_σ
(iii)	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$	$\mathbb{F}_{q^2}\times\mathbb{F}_{q^2}$ (x,y,x^q,y^q)	$\mathbb{F}_q\times\mathbb{F}_q$ (a_1,a_2,a_1,a_2)	σ	A_σ	B_σ
(iv)	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$	$\mathbb{F}_{q^2}\times\mathbb{F}_q\times\mathbb{F}_q$ (x,a_1,x^q,a_2)	$\mathbb{F}_q\times\mathbb{F}_q$ (a,a_1,a,a_1)	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$	$\mathbb{F}_{q^2}\times\mathbb{F}_{q^2}$ (x,y,y^q,x^q)	$\mathbb{F}_{q^2}$ (x,x^q,x,x^q)
(v)	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$	$\mathbb{F}_{q^2}\times\mathbb{F}_{q^2}$ (x,y,y^q,x^q)	$\mathbb{F}_{q^2}$ (x,x^q,x,x^q)	$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$	$\mathbb{F}_q\times\mathbb{F}_{q^2}\times\mathbb{F}_q$ (a_1,x,a_2,x^q)	$\mathbb{F}_q\times\mathbb{F}_q$ (a_1,a,a_1,a)

	$\varepsilon(\sigma)=\varepsilon(B_{\sigma'})$	$M=(B_\sigma^\times:\mathbb{F}_q^\times)$	$\Phi\in\mathrm{Car}\,A_\sigma^\times$	$\Phi'\in\mathrm{Car}\,A_{\sigma'}^\times$	φ
(i)	+	$(q-1)$	$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$	$(\alpha_4\alpha_1,\alpha_1\alpha_2,\alpha_2\alpha_3,\alpha_3\alpha_4)$	$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$
(ii)	–	$(q+1)$	Ψ	Ψ^{q+1}	ψ
(iii)	+	$(q-1)$	(Λ_1,Λ_2)	$(\Lambda_1\Lambda_2^q,\Lambda_1\Lambda_2)$	$\lambda_1\lambda_2$
(iv)	–	$(q-1)$	$(\Lambda,\alpha_1,\alpha_2)$	$(\Lambda(\alpha_2\circ n),\Lambda(\alpha_1\circ n))$	$\alpha_1\alpha_2\lambda$
(v)	+	$(q+1)$	(Λ_1,Λ_2)	$(\lambda_1,\Lambda_1\Lambda_2,\lambda_2)$	$\lambda_1\lambda_2$

Conventions sur les éléments des algèbres et les caractères :

a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , $a\in\mathbb{F}_q$, x , $y\in\mathbb{F}_{q^2}$, $z\in\mathbb{F}_{q^4}$,

α_1 , α_2 , α_3 , α_4 caractères de $\mathbb{F}_q^\times$, Λ_1 , Λ_2 , Λ caractères de $\mathbb{F}_{q^2}^\times$, Ψ caractère de $\mathbb{F}_{q^4}^\times$, λ_1 (resp. λ_2 , resp. λ , resp. ψ) restriction de Λ_1 (resp. Λ_2 , resp. Λ , resp. Ψ) à $\mathbb{F}_q^\times$,

n désigne la norme de $\mathbb{F}_{q^2}$ sur $\mathbb{F}_q$.

4. - Lemmes préliminaires.

LEMME 1 ("*Théorème de Lang*"). - *Soit* $\sigma \in \mathfrak{D}_4$, *et soit*

$$U = \{x \in A \ ; \ \ xx^r = 1\} .$$

L'application de U *dans* U , *définie par* $u \longmapsto u^\sigma u^{-q}$, *est surjective.*

En effet, un élément u dans U est de la forme

$$u = (s \ , \ s^{-1} \ , \ s \ , \ s^{-1}) \quad \text{avec} \quad s \in \underset{\sim}{F}^\times .$$

Pour $\sigma \in \mathfrak{D}_4$, on a, soit $u^\sigma = u$, soit $u^\sigma = (s^{-1} \ , \ s \ , \ s^{-1} \ , \ s)$. Tout revient donc à résoudre les équations $s^{1-q} = t$ et $s^{-1-q} = t$, pour tout $t \in \underset{\sim}{F}^\times$ donné. Comme $\underset{\sim}{F}$ est algébriquement clos, l'existence de la solution est assurée.

C. Q. F. D.

LEMME 2. - *En posant* $L = \{x \in A^\times \ ; \ \ xx^\zeta \in \underset{\sim}{F}\}$, *on a* :

(i) *La suite*

$$1 \longrightarrow U \longrightarrow A^\times \xrightarrow{f} L \longrightarrow 1$$

est exacte.

(ii) *Pour tout* $\sigma \in \mathfrak{D}_4$, *la suite*

$$1 \longrightarrow U_{\sigma'} \longrightarrow A^\times_{\sigma'} \xrightarrow{f} L_\sigma \longrightarrow 1$$

est exacte, où $U_{\sigma'} = U \cap A_{\sigma'}$ *et* $L_\sigma = L \cap A_\sigma$.

La vérification de l'assertion (i) est immédiate, car L se compose des $x \in A$ tels que $x_1 x_3 = x_2 x_4$. En (ii), le seul point à vérifier est la surjectivité de f : Soit $x \in L_\sigma$; d'après (i), il existe un $y_0 \in A^\times$ tel que $f(y_0) = x$. D'autre part, on a

$$f(y_0^{\sigma'}) = f(y_0)^\sigma = x^\sigma = x^q = f(y_0)^q = f(y_0^q) ,$$

d'où $(y_0^{\sigma'})^{-1} y_0^q \in U$; d'après le lemme 1, il existe un $u \in U$ tel que

$$u^{\sigma'} u^{-q} = (y_0^{\sigma'})^{-1} y_0^q .$$

On en déduit que

$$(uy_0)^q = u^{\sigma'} y_0^{\sigma'} = (uy_0)^{\sigma'} .$$

Pour $y = uy_0$, on a donc $y \in A^\times_{\sigma'}$ et $f(y) = x$, ce qui démontre bien la surjectivité de f .

C. Q. F. D.

Soit $B' = \underset{\sim}{F}_q \times \underset{\sim}{F}_q$ ou $\underset{\sim}{F}_{q^2}$. Pour $x \in B'$, on pose

$$\bar{x} = \begin{cases} (x_2 \ , \ x_1) & \text{si} \ \ x = (x_1 \ , \ x_2) \in \underset{\sim}{F}_q \times \underset{\sim}{F}_q \ , \\ x^q & \text{si} \ \ x \in \underset{\sim}{F}_{q^2} \ ; \end{cases}$$

on note n (resp. tr) la norme (resp. trace) de B' sur $\underset{\sim}{F}_q$; on a

$$n(x) = x\bar{x} \quad (\text{resp. } tr(x) = x + \bar{x}) \text{ pour tout } x \in B' .$$

LEMME 3. - <u>On a</u> $\sum_{x\in B'} e(-n(x)) = q\varepsilon(B')$.

En effet, on a

$$\sum_{x\in B'} e(-n(x)) = c_0(B') - c_1(B') ,$$

où

$$c_0(B') = \mathrm{Card}\,\{x \in B' \ ; \ n(x) = 0\}$$

et

$$c_1(B') = \mathrm{Card}\,\{x \in B' \ ; \ n(x) = 1\} = \mathrm{Card}\,\{x \in B' \ ; \ n(x) = a\} ,$$

pour tout $a \in \underset{\sim}{F}_q^\times$. On a tenu compte du fait que $\sum_a e(a) = -1$, où l'on somme sur tous les a dans $\underset{\sim}{F}_q^\times$. On a explicitement

$$c_0(B') = 2q - 1 , \quad c_1(B') = q - 1 , \quad \varepsilon(B') = 1 , \text{ si } B' = \underset{\sim}{F}_q \times \underset{\sim}{F}_q$$

et

$$c_0(B') = 1 , \quad c_1(B') = q + 1 , \quad \varepsilon(B') = -1 , \text{ si } B' = \underset{\sim}{F}_{q^2} .$$

L'assertion du lemme en est une conséquence.

C. Q. F. D.

LEMME 4. - <u>On a, pour tout</u> $x \in B'$ <u>avec</u> $B' = \underset{\sim}{F}_q \times \underset{\sim}{F}_q$ <u>ou</u> $\underset{\sim}{F}_{q^2}$,

$$q\varepsilon(B')\, e(n(x)) = \sum_{y\in B'} e(-n(y))\, e(tr(xy)) .$$

On remarque tout d'abord que $tr(xy) - n(y) = n(x) - n(x - \bar{y})$, d'où

$$\begin{aligned}\sum_y e(-n(y))e(tr(xy)) &= e(n(x)) \sum_y e(-n(x - \bar{y})) \\ &= e(n(x)) \sum_y e(-n(y)) = e(n(x))q\varepsilon(B') ,\end{aligned}$$

d'après le lemme 3.

C. Q. F. D.

On rappelle un lemme bien connu.

LEMME 5. - <u>Soient</u> H <u>un groupe abélien fini,</u> H' <u>un sous-groupe de</u> H , <u>et</u> $h \in H$; <u>on a alors</u>

$$\sum_\chi \chi(h) = \begin{cases} (H : H') & \underline{\text{si}} \ \ h \in H' , \\ 0 & \underline{\text{si}} \ \ h \notin H' , \end{cases}$$

<u>où l'on somme sur tous les caractères</u> χ <u>de</u> H <u>dont la restriction à</u> H' <u>soit triviale.</u>

LEMME 6. - <u>Soient</u> $\sigma \in \mathfrak{D}_4$, <u>et</u> Φ <u>un caractère de</u> $A_\sigma^\times$. <u>Pour tout caractère</u> Φ_1 <u>de</u> $A_\sigma^\times$, <u>les deux assertions suivantes sont équivalentes :</u>

(i) $\Phi_1' = \Phi'$;

(ii) il existe un caractère Θ de $B_\sigma^\times$ dont la restriction à $\underset{\sim}{F}_q^\times$ soit triviale et tel que $\Phi_1 \Phi^{-1}$ soit le composé de Θ avec la norme N de $A_\sigma^\times$ sur $B_\sigma^\times$.

Le nombre M des caractères Φ_1 satisfaisant à (i) et (ii) est égal à $(B_\sigma^\times : \underset{\sim}{F}_q^\times)$.

Pour démontrer que (i) implique (ii), on rappelle que la norme N de $A_\sigma^\times$ sur $B_\sigma^\times$ est donnée par $N(x) = xx^\zeta$, pour $x \in A_\sigma^\times$. Or $\operatorname{Ker} N = \{x \in A_\sigma^\times \ ; \ xx^\zeta = 1\}$ est contenu dans $L_\sigma = \{x \in A_\sigma^\times \ ; \ xx^\zeta \in \underset{\sim}{F}\}$ et, d'après le lemme 2 (ii), on a $\operatorname{Im} f = L_\sigma$. La relation $\Phi_1' = \Phi'$ signifie que $\Phi_1 \Phi^{-1}$ est trivial sur $\operatorname{Im} f$ et entraîne donc l'existence d'un caractère $\Theta : B_\sigma^\times \longrightarrow \underset{\sim}{C}^\times$ tel que $\Phi_1 \Phi^{-1} = \Theta \circ N$. D'autre part, $\underset{\sim}{F}_q^\times$ est l'image de L_σ par N, et la restriction de $\Phi_1 \Phi^{-1}$ à L_σ est triviale. Il s'ensuit que la restriction de Θ à $\underset{\sim}{F}_q^\times$ est triviale. Ceci démontre que (i) implique (ii).

D'autre part, on voit aisément que (ii) entraîne (i) en remarquant que $N(f(x)) \in \underset{\sim}{F}_q^\times$, pour tout $x \in A_{\sigma'}^\times$.

C. Q. F. D.

LEMME 7. - *Pour* $\sigma \in \mathfrak{D}_4$, *on a* $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(B_{\sigma'})$.

On définit un homorphisme $\sigma \longmapsto \tau$ de $\mathfrak{D}_4$ dans $\mathfrak{S}_2$ par

$$\tau(1) \equiv \sigma'(1) \mod 2 \ , \quad \tau(2) \equiv \sigma'(2) \mod 2$$

(remarquer que si $i \equiv j \mod 2$, on a $\sigma'(i) \equiv \sigma'(j) \mod 2$). On a $\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\sigma)$: il suffit de vérifier cette relation pour σ égal à r ou s, et c'est immédiat.

Par ailleurs B se compose des $x = (x_1 , x_2 , x_1 , x_2)$ avec x_1 , x_2 dans $\underset{\sim}{F}$. Il en résulte aussitôt que $B_{\sigma'}$ est isomorphe à la sous-algèbre de $\underset{\sim}{F} \times \underset{\sim}{F}$ composée des (x_1 , x_2) tels que $x_{\tau(1)} = x_1^q$, $x_{\tau(2)} = x_2^q$. Vu les définitions, on a donc $\varepsilon(B_{\sigma'}) = \varepsilon(\tau)$, d'où le lemme 7 puisque $\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\sigma)$.

LEMME 8. - *Soit* Φ *un caractère de* $A_\sigma^\times$, *et* φ *sa restriction à* $\underset{\sim}{F}_q^\times$. *La restriction de* $\Phi' = \Phi \circ f$ *à* $B_{\sigma'}^\times$, *est alors égale à* $\varphi \circ n$, *où* n *désigne la norme de* $B_{\sigma'}$ *sur* $\underset{\sim}{F}_q$.

Il suffit de prouver que la restriction de f à $B_{\sigma'}^\times$ coïncide avec la norme n. Or, pour $x = (x_1 , x_2 , x_1 , x_2)$ dans $B_{\sigma'}^\times$, on a $n(x) = x_1 x_2$, c'est-à-dire $n(x) = xx^r = f(x)$.

LEMME 9. - *Pour chaque* $a \in \underset{\sim}{F}_q^\times$, *le nombre d'éléments* x *dans* $B_\sigma^\times$ *de norme* a *est égal au nombre d'éléments de* U_σ.

En effet, la norme n est un homomorphisme surjectif de $B_\sigma^\times$ sur $\underset{\sim}{F}_q^\times$, de noyau U_σ.

LEMME 10. - On a, pour tout caractère α de $\underset{\sim}{F}_q^\times$,

$$\alpha(-1)\, g(\alpha)\, g(\alpha^{-1}) = q - (q-1)\, \delta(\alpha) .$$

C'est une propriété bien connue des sommes de Gauss qui se vérifie facilement par un calcul direct.

5. Démonstration du théorème 2.

On calcule la somme

$$S = \varepsilon(\sigma)\, \frac{1}{M} \sum_{\Phi_1'=\Phi'} G(\Phi_1) .$$

D'après le lemme 7, on obtient

$$S = \varepsilon(B_{\sigma'})(A_\sigma^\times : L_\sigma)^{-1} \sum_{\Phi_2} G(\Phi.\Phi_2)$$

où l'on somme sur les caractères Φ_2 de $A_\sigma^\times$ dont la restriction à L_σ soit triviale, c'est-à-dire

$$S = \varepsilon(B_{\sigma'})(A_\sigma^\times : L_\sigma)^{-1} \sum_{x\in A_\sigma^\times} \Phi(x)\, e(\mathrm{Tr}(x)) \sum_{\Phi_2|_{L_\sigma}=1} \Phi_2(x) .$$

Mais

$$\sum_{\Phi_2|_{L_\sigma}=1} \Phi_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin L_\sigma \\ (A_\sigma^\times : L_\sigma) & \text{si } x \in L_\sigma \end{cases}$$

d'après le lemme 5, d'où

$$S = \varepsilon(B_{\sigma'}) \sum_{x\in L_\sigma} \Phi(x)\, e(\mathrm{Tr}(x)) .$$

D'après le lemme 2 (ii), on obtient

$$S = \varepsilon(B_{\sigma'})|U_{\sigma'}|^{-1} \sum_{x'\in A_{\sigma'}^\times} \Phi(f(x'))\, e(\mathrm{Tr}(f(x'))) .$$

Pour abréger, on pose $B' = B_{\sigma'}$, $U' = U_{\sigma'}$, $A' = A_{\sigma'}$, et on observe que

$$\mathrm{Tr}(f(x')) = x_1'\, x_2' + x_2'\, x_3' + x_3'\, x_4' + x_4'\, x_1' = (x_1' + x_3')(x_2' + x_4') = n(T(x')) ,$$

pour $x' = (x_1', x_2', x_3', x_4') \in A'$, où n désigne la norme de B' sur $\underset{\sim}{F}_q$ et où T désigne la trace de A' sur B' donnée par $T(x) = x + x^\zeta$, pour $x \in A'$. On a donc

$$S = \varepsilon(B')|U'|^{-1} \sum_{x'\in A'^\times} \Phi'(x')\, e(n(T(x'))) .$$

En appliquant le lemme 4, on obtient

$$S = q^{-1}|U'|^{-1} \sum_{x'\in A'^\times} \Phi'(x') \sum_{y\in B'} e(-n(y))\, e(\mathrm{tr}(T(x')y)) ,$$

$$= q^{-1}|U'|^{-1} \sum_{y\in B'} e(-n(y)) \sum_{x'\in A'^\times} \Phi'(x')\, e(\mathrm{Tr}(x'y)) ,$$

c'est-à-dire $S = S_1 + S_2$, où

$$S_1 = q^{-1}|U'|^{-1} \sum_{y\in B'} [e(-n(y)) - 1] \sum_{x'\in A'^{\times}} \Phi'(x')\, e(\mathrm{Tr}(x'y)) ,$$
$$S_2 = q^{-1}|U'|^{-1} \sum_{x'\in A'^{\times}} \Phi'(x') \sum_{y\in B'} e(\mathrm{tr}(T(x')y)) .$$

Calcul de S_1 : on a $e(-n(y)) = 1$ si $y \in B' - B'^{\times}$, d'où

$$S_1 = q^{-1}|U'|^{-1} \sum_{y\in B'^{\times}} [e(-n(y)) - 1].\sum_{x'\in A'^{\times}} \Phi'(x')\, e(\mathrm{Tr}(x'y))$$
$$= q^{-1}|U'|^{-1} \sum_{y\in B'^{\times}} [e(-n(y)) - 1].\Phi'(y)^{-1}\, G(\Phi') .$$

D'après le lemme 8, on a donc

$$S_1 = q^{-1}|U'|^{-1}\, G(\Phi') \sum_{y\in B'^{\times}} [e(-n(y)) - 1].\varphi(n(y))^{-1}$$
$$= q^{-1}\, G(\Phi')\, \varphi(-1)\, g(\varphi^{-1}) - (q-1)\, \delta(\varphi)] \quad \text{d'après le lemme 9 ;}$$

mais, d'après le lemme 10, on a

$$\varphi(-1)\, g(\varphi^{-1}) = g(\varphi)^{-1}(q - (q-1)\,\delta(\varphi)) = q\, g(\varphi)^{-1} + (q-1)\,\delta(\varphi) ,$$

d'où $S_1 = G(\Phi')/g(\varphi)$.

Calcul de S_2 : on a, pour tout $x' \in A'^{\times}$,

$$\sum_{y\in B'} e(\mathrm{tr}(T(x')y)) = |B'|\, \delta(T(x')) = q^2\, \delta(x' + x'^{\zeta}) ,$$

d'où

$$S_2 = q|U'|^{-1} \sum_{x'+x'^{\zeta}=0} \Phi'(x') \quad \text{avec} \quad x' \in A'^{\times} .$$

On voit aisément qu'il existe un élément ε dans $A'^{\times}$ tel que $\varepsilon + \varepsilon^{\zeta} = 0$ (par exemple en considérant la liste des algèbres A_σ donnée dans le tableau suivant l'énoncé du théorème 2). Pour $x' \in A'^{\times}$, on a alors $x' + x'^{\zeta} = 0$, si et seulement s'il existe un $u \in B'^{\times}$ tel que $x' = \varepsilon u$, d'où

$$S_2 = q|U'|^{-1} \sum_{u\in B'^{\times}} \Phi'(u)\, \Phi'(\varepsilon) = q(B'^{\times} : U')\, \Phi'(\varepsilon)\, \delta(\Phi'|_{B'^{\times}}) .$$

Or $\Phi'|_{B'^{\times}} = \varphi \circ n$, d'après le lemme 8. On a donc $\delta(\Phi'|_{B'^{\times}}) = \delta(\varphi)$. D'autre part, $(B'^{\times} : U'^{\times}) = q - 1$, d'après le lemme 9. On remarque que $\Phi'(\varepsilon) = \Phi(\varepsilon\varepsilon^r)$, et que $\varepsilon_0 = \varepsilon\varepsilon^r$ appartient à $B_\sigma^{\times}$ et vérifie $\mathrm{Tr}_{B_\sigma/\mathbb{F}_q}(\varepsilon_0) = 0$. Il s'ensuit que

$$S_2 = q(q-1)\, \delta(\varphi)\, \Phi(\varepsilon_0) .$$

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HELVERSEN-PASOTTO (A.). - L'identité de Barnes pour les corps finis, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 286, 1978, Série A, p. 297-300.

[2] HELVERSEN-PASOTTO (A.). - Décomposition de la représentation de Gel'fand-Graev du groupe GL(2 , $\mathbb{F}_q$), Séminaire P. Cartier, Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Bures-sur-Yvette (en préparation).

[3] JACQUET (H.). - Automorphic forms on GL(2). - Berlin, Springer-Verlag, 1972 (Lecture Notes in Mathematics, 278).

[4] WHITTAKER (E. T.) and WATSON (G. N.). - A course of modern analysis. Fourth edition, reprinted. - Cambridge, At the University Press, 1958.

(Texte reçu le 3 février 1978)

Mme Anna HELVERSEN-PASOTTO
Institut des Hautes Etudes Scientifiques
35 route de Chartres
91440 BURES SUR YVETTE