SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU.
THÉORIE DES NOMBRES

HENRI CHAIX

Points frontières de certains compacts convexes appartenant à un réseau, dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 19, nº 1 (1977-1978), exp. nº 16, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1977-1978__19_1_A13_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
19e année, 1977/78, n° 16, 12 p.

19 décembre 1977

POINTS FRONTIÈRES DE CERTAINS COMPACTS CONVEXES APPARTENANT A UN RÉSEAU, DANS $\underset{\sim}{R}^2$ ET $\underset{\sim}{R}^3$

par Henri CHAIX

Résumé. - Considérons dans l'espace euclidien $\underset{\sim}{R}^n$ un réseau de déterminant 1 et un compact strictement convexe $\mathcal{C}$ de volume $\mathcal{V}$. Notons $\mathcal{N}$ le nombre de points du réseau situés sur la frontière de $\mathcal{C}$. Lorsque ces points ne sont pas dans un même hyperplan, il existe une constante k_n, ne dépendant que de n, telle que

$$\mathcal{N} \leqslant k_n \mathcal{V}^{(n-1)/(n+1)} .$$

Par suite, si $\mathcal{C}$ est un "corps $\mathcal{R}$-rond" (c'est-à-dire une intersection non vide de boules fermées de rayon $\mathcal{R}$)

$$\mathcal{N} \leqslant k_n'' \mathcal{R}^{n(n-1)/(n+1)} ,$$

où k_n'' est une constante ne dépendant que de n. L'auteur, par une méthode valable en dimension quelconque, avait obtenu des majorations de k_n et k_n'' ; le but de ce travail est d'améliorer celles de k_2 et k_3''.

1. Introduction.

1.1. Dans l'espace euclidien $\underset{\sim}{R}^n$, considérons un réseau G de déterminant 1 et un compact strictement convexe $\mathcal{C}$ de volume $\mathcal{V}$. Notons $\mathcal{A}$ l'aire de l'hypersurface $\tilde{\mathcal{C}}$, frontière de $\mathcal{C}$. Une question classique de géométrie des nombres est l'évaluation du nombre $\mathcal{N}$ de points du réseau G appartenant à $\tilde{\mathcal{C}}$.

Dans le cas particulier de $\underset{\sim}{R}^2$ et du réseau des points à coordonnées entières, si ℓ désigne la longueur de $\tilde{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{N}_1$ le nombre de points frontières de $\mathcal{C}$ appartenant à ce réseau, V. JARNÍK [9] a démontré, pour $\ell > 1$, l'inégalité :

$$\mathcal{N}_1 \leqslant 3(2\pi)^{-(1/3)} \ell^{2/3} + O(\ell^{1/3}) . \tag{1}$$

Il a aussi montré que la constante $3(2\pi)^{-(1/3)}$ ne peut pas être améliorée.

Pour $n \geqslant 2$, lorsque les points de $G \cap \tilde{\mathcal{C}}$ ne sont pas tous dans un même hyperplan, G. E. ANDREWS [1], puis l'auteur [2], par des méthodes différentes, ont établi l'existence d'une constante k_n ne dépendant que de n, telle que

$$\mathcal{N} \leqslant k_n \mathcal{V}^{(n-1)/(n+1)} . \tag{2}$$

L'auteur a montré que l'exposant de $\mathcal{V}$ dans (2) ne peut pas être amélioré, et que k_n admet un minorant strictement positif. L'inégalité des isopérimètres et (2) donnent immédiatement :

$$\mathcal{N} \leqslant k_n' \mathcal{A}^{n/(n+1)} , \tag{3}$$

où k_n' est une constante ne dépendant que de n.

Le travail de l'auteur établit (2) comme conséquence de (3), sans utiliser l'inégalité des isopérimètres. Il conduit aux majorations suivantes :

(4) $$k'_n \leq \left(2^{n^2-n-1}(n-1)^{2(n^2-n+1)}((n-1)!)^{n-1}\frac{\Gamma^2((n-1)/2)}{\pi^{(n-2)/2}\,\Gamma(n/2)}\right)^{1/(n+1)} ,$$

(5) $$k_n \leq \left(2^n\, n^n (n!)^{n-1}\right)^{1/(n+1)} k'_n .$$

Dans le cas $n = 2$, les inégalités (4) et (5) ainsi que le résultat de V. JARNÍK et l'inégalité des isopérimètres donnent

(6) $$4{,}32\ldots = 3\sqrt[3]{2} \leq k_2 \leq 4\sqrt[3]{\pi} = 5{,}85\ldots$$

De plus, si S désigne l'aire de $\mathcal{C}$, B. DIVIŠ [5] a établi par une méthode propre à $\underset{\sim}{R}^2$, pour $S > 1$, l'inégalité

(7) $$\mathfrak{N} \leq (4\sqrt[3]{2} + o(1))S^{1/3} < (5{,}04 + o(1))S^{1/3} .$$

Par une méthode plus simple, toujours propre à $\underset{\sim}{R}^2$, les résultats du paragraphe 2 permettent d'améliorer (6) et (7) ; nous obtenons

(8) $$k_2 \leq 4\sqrt[3]{(3/2)} < 4{,}58 .$$

<u>Remarque</u> 1. - Si les points de $G \cap \tilde{\mathcal{C}}$ sont dans un même hyperplan, nous sommes ramenés à un problème analogue dans un espace de dimension inférieur à n .

<u>Remarque</u> 2. - Tout ce qui précède est encore valable si $\mathcal{C}$ est un compact convexe de $\underset{\sim}{R}^n$, et si $\mathfrak{N}$ désigne le nombre de points extrémaux de $\mathcal{C}$ appartenant au réseau G .

1.2. Une partie $\mathcal{C}$ de l'espace euclidien $\underset{\sim}{R}^n$ est appelée "corps $\mathcal{R}$-rond" si elle vérifie une des deux propriétés équivalentes suivantes :

(i) $\mathcal{C}$ est l'intersection non vide d'une famille de boules fermées de rayon $\mathcal{R}$.

(ii) $\mathcal{C}$ est compacte, convexe, et si M est un point de sa frontière, il existe une boule fermée de rayon $\mathcal{R}$ contenant $\mathcal{C}$ et dont M est un point frontière.

<u>Remarque</u> 3. - Dans $\underset{\sim}{R}^2$, une courbe de Van der Corput définit un corps $\mathcal{R}$-rond.

<u>Remarque</u> 4. - Un compact convexe de $\underset{\sim}{R}^n$ dont l'hypersurface frontière admet des rayons de courbures principaux majorés par $\mathcal{R}$ est un corps $\mathcal{R}$-rond.

Pour $n \geq 2$, lorsque $\mathcal{C}$ est un corps $\mathcal{R}$-rond, une conséquence immédiate de (3) est que, si l'ensemble $G \cap \tilde{\mathcal{C}}$ n'est pas contenu dans un hyperplan,

(9) $$\mathfrak{N} \leq k''_n\, \mathcal{R}^{n(n-1)/(n+1)} ,$$

où k''_n est une constante ne dépendant que de n et vérifiant

(10) $$k''_n \leq \left(2\pi^{n/2}(\Gamma(n/2))^{-1}\right)^{n/(n+1)} k'_n .$$

En particulier, on obtient $k''_2 \leq 2\pi$ et $k''_3 \leq 2^7\sqrt{\pi} < 227$.

Dans le paragraphe 3, ce résultat est amélioré pour $n = 3$; nous obtenons

(11) $$k''_3 \leq 32\sqrt{6\pi} < 139 .$$

Toujours pour $n = 3$, si $\mathcal{R}_0$ désigne la borne inférieure de l'ensemble des nombres réels $\mathcal{R}$ tels que $\mathcal{C}$ soit un corps $\mathcal{R}$-rond, dans le cas particulier où $\mathfrak{N}_1$

est le nombre de points frontières de $\mathcal{C}$ à coordonnées entières, un résultat de B. DIVIŠ [6] permet d'obtenir

$$\pi_1 < (12,7 + o(1))\ \mathcal{R}_0^{3/2}\ , \text{ quand } \mathcal{R}_0 \longrightarrow +\infty .$$

Remarque 5. - Pour $x > 0$, notons $\mathcal{C}_x$ le transformé de $\mathcal{C}$ dans une homothétie de rapport $x^{1/n}$. Si nous désignons par $\pi(x)$ le nombre de points du réseau appartenant à la frontière de $\mathcal{C}_x$, nous obtenons $\pi(x) = O(x^{(n-1)/(n+1)})$. Ceci peut aussi se déduire des travaux de E. HLAWKA [8], C. S. HERZ [7] et S. KRUPIČKA [11] sur l'évaluation du nombre de points à coordonnées entières de $\mathcal{C}_x$. Cependant, cela nécessite des hypothèses beaucoup plus fortes sur $\mathcal{C}$ (différentiabilité suffisante en particulier). De plus, dans le cas général, la constante n'a pu être exprimée, indépendamment de $\mathcal{C}$, en fonction d'éléments géométriques simples tels que $\mathcal{R}$ ou la courbure totale, par exemple.

2. Points extrémaux des compacts convexes de $\mathbb{R}^2$.

Les résultats démontrés dans ce paragraphe ont fait l'objet d'une note de l'auteur aux C. R. Acad. Sc. [3].

Donnons tout d'abord trois définitions dans lesquelles G désigne un réseau de points de $\mathbb{R}^2$.

Définition 1. - Nous dirons qu'un vecteur a est "G-entier" s'il peut être défini à partir de deux points distincts du réseau G ; en outre, nous dirons qu'il est "G-irréductible" s'il n'est pas de la forme ηb où b est un vecteur G-entier et η un nombre entier strictement supérieur à un.

Définition 2. - L'enveloppe convexe T de trois points non alignés du réseau G sera dite "triangle entier élémentaire relatif à G", si T ne contient aucun autre point de G.

Définition 3. - Nous dirons qu'un polygone convexe de $\mathbb{R}^2$, de sommets consécutifs $M_0, M_1, \ldots, M_{r-1}$, est "plat", si tous les vecteurs $\overrightarrow{M_0 M_1}, \ldots, \overrightarrow{M_{r-2} M_{r-1}}, \overrightarrow{M_{r-1} M_0}$, sauf un, appartiennent à un demi-plan vectoriel ouvert.

Remarque 6. - Un triangle est un polygone plat.

THÉORÈME 1. - Soient, dans $\mathbb{R}^2$, un réseau de points G et un polygone convexe $\mathcal{P}$ dont les sommets appartiennent à G. Désignons par N le nombre de sommets de $\mathcal{P}$ et par ν le nombre de triangles entiers élémentaires relatifs à G en lesquels on peut décomposer $\mathcal{P}$. Alors, si $\mathcal{P}$ est un polygone plat non dégénéré ($N \geqslant 3$),

$$\nu \geqslant (2N^3 - 3N^2 - 5N + 12)/24 . \tag{12}$$

Démonstration. - Le résultat énoncé est invariant par transformation affine, nous nous bornerons donc à le démontrer dans le cas où G est un réseau de déterminant 1. Dans ces conditions, si σ désigne l'aire du polygone $\mathcal{P}$, nous avons

(13) $$\nu = 2\sigma \,.$$

Appelons A_0 , A_1 , ... , A_{N-1} les N sommets de $\mathcal{P}$, la numérotation étant telle que les sommets A_i et A_{i+1} soient consécutifs sur la frontière de $\mathcal{P}$ pour tous les nombres entiers $i = 0 , 1 , \dots , N - 2$. Posons $a_0 = \overrightarrow{A_{N-1} A_0}$ et $a_i = \overrightarrow{A_{i-1} A_i}$ si $i \in \{1 , 2 , \dots , N - 1\}$.

Notons $a \wedge b$ le déterminant des vecteurs a et b , déterminant qui est un nombre entier lorsque a et b sont G-entiers, puisque nous avons supposé $\det G = 1$.

Le polygone $\mathcal{P}$ étant convexe, son aire σ est la somme des aires des triangles $A_0 A_1 A_{N-1}$, $A_1 A_2 A_{N-1}$, ... , $A_{N-3} A_{N-2} A_{N-1}$; nous avons donc

$$2\sigma = \sum_{i=1}^{N-2} |a_i \wedge (a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_{N-1})| \,.$$

Remarquant que les déterminants $a_i \wedge a_j$, pour $1 \leqslant i < j \leqslant N - 1$, sont tous de même signe, nous obtenons

$$2\sigma = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N-1} |a_i \wedge a_j| \,.$$

Les sommets de $\mathcal{P}$ sont, par hypothèse, des points du réseau G , les vecteurs a_i $(0 \leqslant i \leqslant N - 1)$ sont donc G-entiers. Posons $a_i = \eta_i a'_i$ où η_i est un nombre entier strictement positif et a'_i un vecteur G-irréductible ; alors

(14) $$2\sigma \geqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N-1} |a'_i \wedge a'_j| \,.$$

Le polygone $\mathcal{P}$ étant plat, $(N - 1)$ vecteurs parmi a_0 , a_1 , ... , a_{N-1} appartiennent à un demi-plan vectoriel ouvert ; nous supposerons dans la suite qu'il s'agit des vecteurs a_1 , a_2 , ... , a_{N-1} . Un point quelconque Ω du réseau G étant choisi, nous définissons alors les points A'_1 , A'_2 , ... , A'_{N-1} du réseau tels que

$$a'_i = \overrightarrow{\Omega A'_i} \,, \text{ pour } i = 1 , 2 , \dots , N - 1 \,.$$

Les $(N - 1)$ points A'_1 , A'_2 , ... , A'_{N-1} appartiennent à un demi-plan ouvert E de frontière Δ passant par Ω . Désignons par a'_λ , un vecteur de la famille $\{a'_1 , \dots , a'_{N-1}\}$, tel que la droite Δ' translatée de Δ par a'_λ définisse avec Δ une bande fermée contenant les points A'_1 , A'_2 , ... , A'_{N-1} et Ω . Les vecteurs a'_1 , a'_2 , ... , a'_{N-1} étant G-entiers, les quantités $|a'_i \wedge a'_\lambda|$, pour $i \in \{1 , 2 , \dots , \lambda - 1 , \lambda + 1 , \dots , N - 1\}$, sont des nombres entiers strictement positifs. En outre, et c'est là le point essentiel de la démonstration, a'_λ étant G-irréductible, les quantités $a'_i \wedge a'_\lambda$ sont toutes distinctes. Nous en déduisons, si N est pair,

(15) $$\sum_{1 \leqslant i \leqslant N-1} |a'_i \wedge a'_\lambda| \geqslant 2(1 + 2 + \dots + (N - 2)/2) = (N^2 - 2N)/4 \,,$$

et, si N est impair,

(16) $$\sum_{1 \leqslant i \leqslant N-1} |a'_i \wedge a'_\lambda| \geqslant 2(1 + 2 + \dots + [(N - 2)/2]) + [N/2] = (N^2 - 2N + 1)/4 \,.$$

Dans tous les cas, nous avons

(17) $$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N-1} |a'_i \wedge a'_\lambda| \geqslant (N^2 - 2N)/4 .$$

Les inégalités (14) et (17) permettent alors d'obtenir

(18) $$2\sigma \geqslant ((N^2 - 2N)/4) + \sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant N-1 \\ i\neq\lambda, j\neq\lambda}} |a'_i \wedge a'_j| .$$

La somme du second membre de (18) est étendue aux $(N - 2)$ vecteurs $a'_1 , \dots ,$ $a'_{\lambda-1} , a'_{\lambda+1} , \dots , a'_{N-1}$ sur lesquels nous pouvons recommencer le raisonnement. Le calcul par récurrence donne, pour $N \geqslant 4$,

$$2\sigma \geqslant 1 + \sum_{q=4}^{N}(q^2 - 2q)/4 ,$$

c'est-à-dire

(19) $$2\sigma \geqslant \frac{2N^3 - 3N^2 - 5N + 12}{24} = \frac{(N-1)^3}{12} + \frac{(N-2)^2}{8} + \frac{N+2}{24} .$$

L'inégalité (19) est triviale pour $N = 3$; et les relations (13) et (19) fournissent (12).

<u>Remarque</u> 7. - Si, dans la dernière partie du calcul, nous utilisons les inégalités (15) ou (16) suivant la parité des nombres $4 , 5 , \dots , N$, le théorème 1 est amélioré. Nous obtenons, si N est pair ,

(12') $$\nu \geqslant (2N^3 - 3N^2 - 2N)/24 ,$$

et, si N est impair,

(12") $$\nu \geqslant (2N^3 - 3N^2 - 2N + 3)/24 .$$

THÉORÈME 2. - <u>Soient, dans</u> $\underline{R}^2$, <u>un réseau de points</u> G <u>et un polygone convexe</u> $\mathcal{P}$ <u>dont les sommets appartiennent à</u> G . <u>Désignons par</u> N <u>le nombre de sommets de</u> $\mathcal{P}$ <u>et par</u> ν <u>le nombre de triangles entiers élémentaires relatifs à</u> G <u>en lesquels on peut décomposer</u> $\mathcal{P}$. <u>Alors, pour</u> $N \geqslant 3$,

(20) $$\nu \geqslant (N^3 + 3N^2 - 10 N + 24)/48 > N^3/48 .$$

<u>Démonstration</u>. - Pour $N = 3$, les inégalités (20) sont triviales, nous pouvons donc supposer $N \geqslant 4$. Le polygone $\mathcal{P}$ peut toujours se décomposer en deux polygones plats $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. Si nous notons N_1 (resp. N_2) le nombre de sommets de $\mathcal{P}_1$ (resp. $\mathcal{P}_2$), nous avons

$$N_1 + N_2 = N + 2 ,$$

et par suite

(21) $$\nu \geqslant \sum_{i=1,2}\left(\frac{(N_i - 1)^3}{12} + \frac{(N_i - 2)^2}{8} + \frac{N_i + 2}{24}\right) .$$

Le deuxième membre de (21) admet $(N^3 + 3N^2 - 10N + 24)/48$ pour borne inférieure, celle-ci étant obtenue pour $N_1 = N_2 = (N/2) + 1$; et les inégalités (20) sont ainsi démontrées.

<u>Remarque</u> 8. - En utilisant l'inégalité (12') de la remarque 7 au lieu de l'inégalité (12), nous obtenons

(20')
$$\nu \geqslant (N^3 + 3N^2 - 4N - 12)/48 .$$

Ce résultat constitue une légère amélioration du théorème 2, pour $N \geqslant 6$.

COROLLAIRE 1. - Soient, dans $\underset{\sim}{R}^2$, un compact convexe $\mathcal{C}$ et un réseau de points G de déterminant 1 . Notons S l'aire de $\mathcal{C}$, et N le nombre de points extrémaux de $\mathcal{C}$ appartenant à G . Alors

(22)
$$N \leqslant \sup(2 \ , \ 4 \sqrt[3]{(3/2)} \ S^{1/3}) .$$

Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème 2. En effet, les points extrémaux de $\mathcal{C}$ appartenant à G sont les sommets d'un polygone convexe dont l'aire σ vérifie, si $N \geqslant 3$, $0 < \sigma \leqslant S$ et, en utilisant les notations du théorème 2, $\nu = 2\sigma$ puisque $\det G = 1$. Nous avons donc

$$S \geqslant \sigma > \frac{N^3}{96} ,$$

et nous en déduisons (22).

Remarque 9. - Dans le cas particulier des polygones plats, le théorème 1 montre que

$$N \leqslant (2 \sqrt[3]{3} + o(1)) \ S^{1/3} < (2{,}89 + o(1)) \ S^{1/3} \ , \text{ quand } S \longrightarrow + \infty .$$

Nous voyons ainsi qu'il existe une classe importante de compacts convexes pour laquelle la meilleure constante possible est certainement inférieure à $3 \sqrt[3]{2}$ (meilleur minorant de k_2 connu actuellement).

COROLLAIRE 2. - Soient, dans $\underset{\sim}{R}^2$, un compact strictement convexe $\mathcal{C}$ et un réseau de points G de déterminant 1 . Notons S l'aire de $\mathcal{C}$ et N le nombre de points frontières de $\mathcal{C}$ appartenant à G . Alors

$$N \leqslant \sup(2 \ , \ 4 \sqrt[3]{(3/2)} \ S^{1/3}) .$$

D'après le corollaire 1, ce résultat est trivial. Il suffit de remarquer que $\mathcal{C}$ étant strictement convexe, tous ses points frontières sont extrémaux.

Remarque 10. - Pour le cercle et d'autres courbes particulières, l'exposant de S peut être abaissé. Il y a de nombreux travaux sur ce sujet, par exemple ceux de H. P. F. SWINNERTON-DYER [12] et de S. V. KONIAGIN [10] donnant des encadrements de cet exposant pour certaines classes de compacts strictement convexes.

3. Points frontières des "corps $\mathcal{R}$-ronds" de $\underset{\sim}{R}^3$.

Les résultats de ce paragraphe ont fait l'objet d'une note de l'auteur [4].

Nous noterons $\|\ldots\|$ la norme euclidienne de $\underset{\sim}{R}^3$.

LEMME 1. - Soient, dans $\underset{\sim}{R}^3$, deux sphères distinctes S et S' de centres respectifs w et w' et de même rayon ; notons B (resp. B') la boule fermée correspondant à S (resp. S'). Soient M (resp. M') un point de $S \cap B'$ (resp. $S' \cap B$), et Π le plan orthogonal à la droite $\tilde{w}M$ contenant M' . Notons α

l'angle des vecteurs $\overrightarrow{wM}$ et $\overrightarrow{w'M'}$ et β celui des vecteurs $\overrightarrow{wM}$ et $\overrightarrow{w\mu}$ où μ est un point quelconque de $\Pi \cap S$. Alors

(23) $$0 \leq \beta \leq \alpha \leq \pi .$$

Démonstration. - Soit M_1 le point de S' défini par $\overrightarrow{w'M_1} = \overrightarrow{wM}$. Si nous désignons par δ_0 (resp. δ_1) la distance du point M (resp. M_1) au plan Π, nous avons $\delta_0 \leq \delta_1$. Les sphères S et S' ayant même rayon, l'angle des vecteurs $\overrightarrow{w'M_1}$ et $\overrightarrow{w'M'}$ est supérieur à celui des vecteurs $\overrightarrow{wM}$ et $\overrightarrow{w\mu}$, d'où les inégalités (23).

LEMME 2. - Soit, sur la sphère unité S_2, une famille finie $\mathfrak{F}$ de points m_i où $i = 1, 2, \dots, p$. Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, considérons une calotte sphérique γ_i de centre m_i, et désignons par d_i la densité des points de $\mathfrak{F}$ sur γ_i. Alors

(24) $$p \leq 16\pi (\sup_{1\leq i\leq p} d_i) .$$

Démonstration. - Nous noterons (m, r) la calotte sphérique de S_2, de centre m et de rayon polaire r.

Posons $d = \sup_{1\leq i\leq p} d_i$.

L'idée principale de la démonstration est de construire sur S_2 un nouvel ensemble $\mathfrak{F}'$ de points distincts et une suite finie de calottes sphériques $\{\gamma'_i\}_{i=1,2,\dots,q}$ vérifiant les quatres propriétés suivantes :

(25.1) $$\operatorname{Card} \mathfrak{F}' = \operatorname{Card} \mathfrak{F} = p ,$$

(25.2) $$\mathfrak{F}' \subset \cup_{i=1}^{q} \gamma'_i ,$$

(25.3) $$\gamma'_i \cap \gamma'_j = \emptyset , \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, q\}^2 , \quad i \neq j ,$$

(25.4) $$d'_i \leq 4d , \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, q\} ,$$

où d'_i désigne la densité superficielle sur γ'_i des points appartenant à $\mathfrak{F}'$.

Si nous supposons construit l'ensemble $\mathfrak{F}'$, et si nous notons σ'_i l'aire de la calotte γ'_i pour $i = 1, 2, \dots, q$, nous obtenons

$$p = \sum_{i=1}^{q} d'_i \sigma'_i \leq 4d \sum_{i=1}^{q} \sigma'_i \leq 16 \pi d ;$$

et l'inégalité (24) est alors assurée.

Nous supposerons dorénavant que les points m_i de $\mathfrak{F}$ sont indéxés de 1 à p de manière que la suite $\{r_i\}_{i=1,\dots,p}$ des rayons polaires des calottes γ_i soit décroissante. La construction de l'ensemble $\mathfrak{F}'$ et de la suite $\{\gamma'_i\}_{i=1,\dots,q}$ se fait alors par récurrence.

(a) Appelons $\mathfrak{F}_1$ un ensemble de points obtenu à partir de $\mathfrak{F}$ en remplaçant les n_1 points de $\gamma_1 \cap \mathfrak{F}'$ par n_1 nouveaux points appartenant à la calotte $\gamma'_1 = (m_1, r_1/2)$, et en conservant ceux n'appartenant pas à γ_1.

Nous avons les propriétés suivantes :

$$\mathrm{Card}\ \mathcal{F}_1 = \mathrm{Card}\ \mathcal{F} = p ,$$

$$\mathcal{F}_1 \subset \gamma'_1 \cup (\cup_{i=2}^{p} \gamma_i) ,$$

$$d'_1 = 4\, d_1 \leqslant 4\, d ,$$

$$\|\overrightarrow{m_1\, \mu}\| \geqslant r_1 , \quad \forall\, \mu \in \mathcal{F}_1 - (\mathcal{F}_1 \cap \gamma'_1) .$$

(b) Pour un nombre entier ℓ tel que $1 \leq \ell < p$, supposons construits une application $\varphi : \{1 , 2 , \dots , \ell\} \longrightarrow \{1 , 2 , \dots , p\}$ strictement croissante telle que $\varphi(1) = 1$, et un ensemble fini $\mathcal{F}_\ell$ de points de S_2 coïncidant avec $\mathcal{F}$ sur $S_2 - (\cup_{i=1}^{\ell} \gamma_{\varphi(i)})$ qui vérifient les propriétés suivantes où γ'_i désigne la calotte $(m_{\varphi(i)} , 2^{-1}\, r_{\varphi(i)})$, pour $1 \leq i \leq \ell$:

(26.1) $$\mathrm{Card}\ \mathcal{F}_\ell = \mathrm{Card}\ \mathcal{F} = p ,$$

(26.2) $$\mathcal{F}_\ell \subset (\cup_{i=1}^{\ell} \gamma'_i) \cup (\cup_{i=\varphi(\ell)+1}^{p} \gamma_i) ,$$

(26.3) $$\gamma'_i \cap \gamma'_j = \emptyset , \quad \forall\, (i , j) \in \{1 , \dots , \ell\}^2 , \quad i \neq j ,$$

(26.4) $$d'_i \leqslant 4\, d_{\varphi(i)} , \quad \forall\, i \in \{1 , \dots , \ell\} ,$$

(26.5) $$\|\overrightarrow{m_{\varphi(i)}\, \mu}\| \geqslant r_{\varphi(i)} , \quad \forall\, i \in \{1 , \dots , \ell\} , \quad \forall\, \mu \in \mathcal{F}_\ell - (\mathcal{F}_\ell \cap (\cup_{i=1}^{\ell} \gamma'_i)) = \mathcal{H}_\ell .$$

Deux cas sont possibles :

ou bien $\mathcal{H}_\ell$ est un ensemble vide, les relations (25) sont alors conséquence immédiate des relations (26), et $q = \ell$;

ou bien $\mathcal{H}_\ell$ n'est pas vide. Cela signifie que les rayons polaires r_j des calottes γ_j dont les centres m_j ne sont pas éléments de $\cup_{i=1}^{\ell} \gamma_{\varphi(i)}$ forment un ensemble non vide ; posons

(27) $$r_s = \max_{\varphi(\ell)+1 \leq j \leq p} \{r_j \mid m_j \notin (\cup_{i=1}^{\ell} \gamma_{\varphi(i)} \cap \mathcal{F}_\ell\} .$$

Soit l'application $\tilde{\varphi} : \{1 , 2 , \dots , \ell + 1\} \longrightarrow \{1 , 2 , \dots , p\}$ définie par

(28) $$\tilde{\varphi}(i) = \varphi(i) , \quad \forall\, i \in \{1 , 2 , \dots , \ell\} ,$$

(29) $$\tilde{\varphi}(\ell + 1) = s .$$

Les hypothèses faites sur φ, ainsi que la définition de s montrent que $\tilde{\varphi}$ est strictement croissante et que $\tilde{\varphi}(1) = 1$.

Notons maintenant $\mathcal{F}_{\ell+1}$ un ensemble de points de S_2 obtenu à partir de $\mathcal{F}_\ell$ en remplaçant les $n'_{\ell+1}$ points de $\mathcal{F}_\ell \cap \gamma_s$ non éléments de $(\cup_{i=1}^{\ell} \gamma'_i)$ par $n'_{\ell+1}$ nouveaux points de la calotte $\gamma'_{\ell+1} = (m_s , r_s/2)$ et en conservant les autres. On remarque immédiatement que, dans ces conditions, les ensembles $\mathcal{F}_{\ell+1}$ et $\mathcal{F}$ coïncident sur

$$S_2 - (\cup_{i=1}^{\ell} \gamma_{\varphi(i)}) \cup \gamma_s = S_2 - (\cup_{i=1}^{\ell+1} \gamma_{\tilde{\varphi}(i)}) .$$

La suite $\{r_i\}_{i=1,\dots,p}$ a été supposée décroissante, donc la suite extraite $\{r_{\tilde\varphi(i)}\}_{i=1,\dots,\ell+1}$ est décroissante. Pour $i \in \{1, 2, \dots, \ell\}$, nous avons, d'après (26.5) et (27),

$$\|\overrightarrow{m_s\, m_{\varphi(i)}}\| \geqslant r_{\varphi(i)} \geqslant (r_{\varphi(i)}/2) + (r_s/2) ;$$

ce qui signifie

(30) $$\gamma'_i \cap \gamma'_{\ell+1} = \emptyset , \quad \forall\, i \in \{1, 2, \dots, \ell\} .$$

Etant donné que les aires des calottes $\gamma_{\varphi(\ell+1)}$ et $\gamma'_{\ell+1}$ sont dans un rapport 4 et que

$$n'_{\ell+1} \leqslant n_{\varphi(\ell+1)} = \mathrm{Card}(\mathfrak{F} \cap \gamma_{\varphi(\ell+1)}) ,$$

nous obtenons

(31) $$d'_{\ell+1} \leqslant 4\, d_{\tilde\varphi(\ell+1)} .$$

Enfin, d'après la construction de $\mathfrak{F}_{\ell+1}$ à partir de $\mathfrak{F}_\ell$,

(32) $$\|\overrightarrow{m_s\, \mu}\| \geqslant r_s , \quad \forall\, \mu \in \mathfrak{F}_{\ell+1} - (\mathfrak{F}_{\ell+1} \cap (\cup_{i=1}^{\ell+1} \gamma'_i)) .$$

Les hypothèses de récurrence (26) et les relations (28), (29), (30), (31) et (32) permettent alors de montrer que l'application $\tilde\varphi$, l'ensemble $\mathfrak{F}_{\ell+1}$ et la suite $\{\gamma'_i\}_{i=1,\dots,\ell+1}$ vérifient encore les propriétés (26) pour l'entier $(\ell + 1)$.

THÉORÈME 3. - Soient, dans $\underset{\sim}{R}^3$, un corps $\mathcal{R}$-rond $\mathcal{C}$ et un réseau de points G de déterminant 1. Désignons par $\mathfrak{N}$ le nombre de points frontières de $\mathcal{C}$ appartenant à G. Alors, si ces points ne sont pas coplanaires,

(33) $$\mathfrak{N} < 32\sqrt{6\pi}\; \mathcal{R}^{3/2} .$$

Démonstration. - Grâce à la propriété (ii) de $\mathcal{C}$, choisissons pour chaque point A de $\tilde{\mathcal{C}}$ appartenant au réseau G une boule B_A dont le centre sera noté ω_A et la frontière S_A.

Désignons par Π un plan orthogonal à la droite $\omega_A A$, définissant un demi-espace fermé E contenant A, de telle sorte que $G \cap \tilde{\mathcal{C}} \cap E$ forme un ensemble de points non coplanaires de cardinal minimal (un tel plan existe toujours puisque, par hypothèse, les points de $G \cap \tilde{\mathcal{C}}$ ne sont pas coplanaires). Si δ désigne la distance euclidienne dans $\underset{\sim}{R}^3$, l'un des plans Π ainsi définis réalise le minimum de $\delta(A, \Pi)$; notons alors Π_A ce plan, E_A le demi-espace fermé associé contenant A et posons

(34) $$h_A = \delta(A, \Pi_A) .$$

Si $M \in S_A \cap \Pi_A$, désignons par β_A l'angle des vecteurs $\overrightarrow{\omega_A A}$ et $\overrightarrow{\omega_A M}$.

Notons ρ_A le rayon polaire de la calotte sphérique $S_A \cap \mathring{E}_A$, et v_A le volume de $B_A \cap E_A$. Nous avons alors les relations

(35) $$\rho_A = 2\mathcal{R} \sin(\beta_A/2) = (2\mathcal{R}\, h_A)^{1/2}$$

et

(36) $$v_A < \pi \mathcal{R} h_A^2 .$$

Appelons Π'_A l'un des plans contenant A tels que

$$G \cap \tilde{C} \cap E_A \subset \Pi_A \cup \Pi'_A ,$$

et que

(37) $$n_A = \mathrm{Card}(G \cap \tilde{C} \cap E_A \cap \Pi'_A) \geqslant 3 .$$

Les éléments de $(G \cap \tilde{C} \cap E_A \cap \Pi'_A)$ sont les sommets d'un polygone convexe $\mathcal{P}_A$ du plan Π'_A. Si nous désignons par G_A le réseau plan $G \cap \Pi'_A$, et par ν_A le nombre de triangles entiers élémentaires relatifs à G_A en lesquels on peut décomposer $\mathcal{P}_A$, nous avons, d'après le théorème 2,

(38) $$n_A^3 < 48\ \nu_A .$$

Par construction des plans Π_A et Π'_A, il existe au moins un point de $G \cap \tilde{C} \cap E_A$ n'appartenant pas à Π'_A ; cela signifie que $C \cap E_A$, donc $B_A \cap E_A$, contient au moins ν_A tétraèdres entiers élémentaires relatifs à G. D'où

(39) $$\nu_A < 6\ v_A .$$

D'après (38), (39) et (36), nous obtenons

(40) $$n_A < 2^{5/3}\ 3^{2/3}\ \pi^{1/3}\ \mathcal{R}^{1/3}\ h_A^{2/3} .$$

Les relations (37) et (40) fournissent, alors, un minorant de h_A :

(41) $$h_A > 3^{1/2}\ 2^{-5/2}\ \pi^{-1/2}\ \mathcal{R}^{-1/2} .$$

Soit ω l'origine de $\underset{\sim}{R}^3$, centre de la sphère unité S_2. Considérons l'application injective

$$f : A \in G \cap \tilde{C} \longmapsto a = f(A) \in S_2$$

telle que

$$\overrightarrow{\omega a} = \|\overrightarrow{\omega_A A}\|^{-1}\ \overrightarrow{\omega_A A} .$$

Pour chaque point $a = f(A)$, appelons γ_a la calotte sphérique de S_2, de centre a et de rayon polaire $r_a = 2\sin(\beta_A/2)$. Si s_a désigne l'aire de γ_a, d'après (35),

(42) $$s_a = 2\ \pi \mathcal{R}^{-1}\ h_A .$$

Soit B un point de $G \cap \tilde{C}$ distinct de A. Si nous notons α l'angle des vecteurs $\overrightarrow{\omega_A A}$ et $\overrightarrow{\omega_B B}$, et β l'angle des vecteurs $\overrightarrow{\omega_A A}$ et $\overrightarrow{\omega_A \mu}$ où μ est un point quelconque du cercle intersection de S_A et du plan orthogonal à $\omega_A A$ passant par B, d'après le lemme 1,

$$\alpha \geqslant \beta .$$

Si nous supposons que B n'appartient pas à $G \cap \tilde{C} \cap E_A$,

$$\beta > \beta_A ;$$

nous en déduisons

$$\alpha > \beta_A ,$$

ce qui signifie que $b = f(B)$ n'appartient pas à la calotte γ_a.

Soit $n_a = \mathrm{Card}(\gamma_a \cap f(G \cap \tilde{C}))$; f étant injective, nous avons

(43) $$n_a \leqslant n_A .$$

En notant d_a la densité superficielle des points de $f(G \cap \tilde{C})$ sur γ_a, les relations (43), (40), (42) et (41) fournissent

$$d_a = n_a/s_a < 2^{3/2}\, 3^{1/2}\, \pi^{-1/2}\, \mathcal{R}^{3/2} .$$

Le lemme 2 et la majoration précédente permettent alors d'obtenir (33).

Remarque 11. - La méthode utilisée dans ce paragraphe se généralise pour $n \neq 3$; cependant, elle n'est efficace que pour $n = 3$, eu égard aux majorations (4) et (10) déjà connues. En effet, la méthode du lemme 2 fournit une bonne constante dans l'inégalité (24), alors que, pour la sphère unité S_{n-1} $(n \neq 3)$, la constante est beaucoup moins satisfaisante. De plus, dans le cas particulier $n = 2$, grâce au théorème 2, nous disposons d'une majoration de k_2 meilleure que celle connue dans le cas général.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDREWS (G. E.). - A lower bound for the volume of strictly convex bodies with many boundary lattice points, Trans. Amer. math. Soc., t. 106, 1963, p. 270-279.

[2] CHAIX (H.). - Points extrémaux d'un convexe compact de $\underset{\sim}{R}^n$ appartenant à un réseau, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 16e année, 1974/75, n° 26, 9 p.

[3] CHAIX (H.). - Sur les points frontières des compacts strictement convexes de $\underset{\sim}{R}^2$ appartenant à un réseau, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 285, 1977, série A, p. 887-889.

[4] CHAIX (H.). - Sur les points frontières des "corps $\mathcal{R}$-ronds" de $\underset{\sim}{R}^3$ appartenant à un réseau, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 286, 1978, série A, p. 1-4.

[5] DIVIŠ (B.). - Lattice points on convex curves, Monatsh. Math., t. 77, 1973, p. 389-395.

[6] DIVIŠ (B.). - On the lattice points on strictly convex surfaces, J. Number Theory, t. 8, 1976, p. 298-307.

[7] HERZ (C. S.). - On the number of lattice points in a convex set, Amer. J. Math., t. 84, 1962, p. 126-133.

[8] HLAWKA (E.). - Über Integrale auf konvexen Körpern, I, Monatsh. Math., t. 54, 1950, p. 1-36.

[9] JARNÍK (V.). - Über die Gitterpunkte auf konvexen Kurven, Math. Z., t. 24, 1925, p. 500-518.

[10] KONIAGIN (S. V.). - Sur les points entiers sur des courbes fermées strictement convexes, Mat. Zametki, t. 21, 1977, p. 799-805.

[11] KRUPIČKA (S.). - Über die Anzahl der Gitterpunkte in mehrdimensionalen konvexen Körpern, Czechoslovak Math. J., t. 7 (82), 1957, p. 524-552.

[12] SWINNERTON-DYER (H. P. F.). - The number of lattice points on a convex curve, J. Number Theory, t. 6, 1974, p. 128-135.

(Texte reçu le 15 juin 1978)

Henri CHAIX
U. E. R. de Mathématiques
Université de Provence
3 place Victor Hugo
13331 MARSEILLE CEDEX 3