

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

JACQUES MARTINET

## **Petits discriminants**

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 19, n° 1 (1977-1978),  
exp. n° 14, p. 1-5

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1977-1978\\_\\_19\\_1\\_A11\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1977-1978__19_1_A11_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

PETITS DISCRIMINANTS

par Jacques MARTINET (\*)

Des travaux de ODLYZKO, puis de ODLYZKO, POITOU [P] et SERRE résultent des minoration des discriminants bien meilleures que celles obtenues par des méthodes géométriques. Le problème se pose de savoir si ces minoration sont proches des meilleures possibles. Pour donner une réponse à cette question, nous construisons des corps dont le discriminant est petit par rapport aux minoration évoquées ci-dessus. Plus précisément, nous nous référons à une table de ODLYZKO datée du 29 novembre 1976 [0], et nous nous limitons aux corps totalement imaginaires. La comparaison est faite avec les minoration obtenues sous l'hypothèse de Riemann généralisée (GRH).

Pour des degrés  $n$  relativement petits, nous obtenons des exemples de corps  $K$  de degré  $n$ , de discriminant  $d_K$ , pour lesquels  $|d_K|^{1/n}$  n'excède que de peu la minoration sous GRH donnée dans [0]. Les résultats sont présentés sous forme de tables. La règle, quelque peu arbitraire, adoptée pour le choix des corps présentés dans les tables est la suivante : Un degré  $n$  ne figure dans les tables que lorsque nous avons trouvé un corps  $K$  pour lequel  $|d_K|^{1/n}$  n'excède pas de plus de 3 % la minoration sous GRH de [0]. Cela nous a permis de donner des exemples en degrés 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60 et 72.

La table 1 est construite en considérant des corps de classes de corps quadratiques imaginaires. Elle a été confectionnée d'après des calculs de Gilles ROBERT.

La table 2 est construite en considérant des corps de classes de corps totalement imaginaires de degré 4, par le procédé suivant : Soit  $k$  un corps totalement imaginaire de degré 4, soit  $\varepsilon$  une unité fondamentale de  $k$ , et soit  $\zeta$  une racine primitive de l'unité dans  $k$ , d'ordre  $q$ . On étudie l'idéal  $I$  engendré par  $(\varepsilon^p - \zeta^r)$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq r < q$ .

La théorie du corps de classes fournit une suite exacte

$$0 \longrightarrow (\mathcal{O}_k/I)^*/\text{Im } E_k \longrightarrow G_I \longrightarrow \text{Cl}_k \longrightarrow 0,$$

où

$\text{Cl}_k$  est le groupe des classes d'idéaux de  $k$ ,

$\mathcal{O}_k$  est l'anneau des entiers de  $k$ ,

$E_k$  est le groupe des unités de  $k$  (éléments inversibles de  $\mathcal{O}_k$ ),

$G_I$  est le groupe de Galois (abélien) du corps de classes  $k_I$  de rayon  $I$  de  $k$ .

---

(\*) Laboratoire associé au C. N. R. S. n° 226.

On trouve le degré de  $k_I$  sur  $k$  en calculant la norme de  $I$  et en observant que  $\varepsilon^D$  et  $\zeta^r$  ont même image dans  $(\mathcal{O}_k/I)^*$ . On trouve ensuite les discriminants sur  $k$  de  $k_I$  et de ses sous-corps en décomposant le discriminant de  $k_I/k$  en produit de conducteurs. Les corps, figurant dans les tables 1 et 2, sont des corps de classes de rayon, à l'exception du corps de degré 24 de la table 1, qui est un sous-corps du corps de degré 48 donné dans cette même table.

Remarque 1. - On peut vérifier que tous les corps décrits dans les tables 1 et 2 ont pour nombre de classes 1 (i. e. leurs anneaux d'entiers sont principaux). Cela résulte directement de l'examen des tables de [0], sauf pour le corps  $K$  de degré 72 de la table 2, pour lequel le degré d'une extension non ramifiée est majoré seulement par 2. On obtient le résultat cherché en utilisant l'action du groupe de Galois de  $K/k$  sur  $Cl_K$  (notons que cette difficulté ne se présenterait pas si l'on admettait GRH).

Pour obtenir de bons résultats en degré dépassant la centaine, il faut utiliser d'autres méthodes. Voici deux exemples, en degrés 480 et 12 144, pour lesquels les excès par rapport aux tables de ODLYZKO sont 4,8 % et 10 % respectivement. On utilise une table de HÄSSE [H] qui donne les nombres de classes des corps abéliens de conducteurs  $\leq 100$ . On considère le corps abélien de degré 4 (resp. 44), de conducteur  $3.17 = 51$  (resp.  $3.23 = 69$ ), de nombre de classes 10 (resp.  $3.23 = 69$ ). Le corps de classes de Hilbert de ce corps est de degré 40 (resp.  $3.036$ ), le corps de degré 40 figure du reste dans la table 2. Les nombres premiers 17 et 23 sont inertes dans  $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ . On considère alors le corps de classes de Hilbert du corps de rayon 17 (resp. 23) sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ . Son degré est multiple de  $2 \times (17^2 - 1)/6 \times 5 = 480$  (resp.  $2 \times (23^2 - 1)/6 \times 69 = 12\,144$ ). Nous avons ainsi construit un corps  $K$  de degré  $m = 480$ , et un corps  $L$  de degré  $n = 12\,144$ .

La table de [0] sous GRH donne, pour tout corps  $k$  de degré  $m = 480$ , la minoration  $|d_k|^{1/480} \geq 26,485$ . On trouve pour le discriminant de  $K$  l'expression

$$|d_K|^{1/m} = 3^{1/2} \cdot 17^{47/48} = 27,757, \text{ et } 27,757/26,485 = 1,048.$$

Par interpolation de la table de [0], on obtient, pour un corps  $k$  de degré  $n = 12\,144$ , la minoration approximative  $|d_k|^{1/n} \geq 34,95$ . On trouve pour le discriminant de  $L$  l'expression  $|d_L|^{1/n} = 3^{1/2} \cdot 23^{87/88} = 38,44$ , qui excède de 10 % environ la minoration ci-dessus.

Remarque 2. - On peut aussi faire des comparaisons avec les minorations asymptotiques de  $|d_k|^{1/n}$ , pour  $n = [K : \mathbb{Q}]$  tendant vers l'infini. On trouve dans [P] la minoration 44,7. Nous avons construit dans [M1] un corps  $k$  de degré 10 pour lequel  $|d_k|^{1/10} = 92,37$ , et qui possède une 2-tour de corps de classes infinies, à savoir le corps  $k = \mathbb{Q}(\cos(2\pi/11), \sqrt{-46})$ , pour lequel

$$|d_k|^{1/10} = 2^{3/2} \cdot 11^{4/5} \cdot 23^{1/2} = 92,368 \dots$$

Pour tout  $n$ , il existe donc un corps  $k_n$  de degré  $5 \cdot 2^{n+1}$ , pour lequel

$|d_{K_n}|^{1/[k_n : \mathbb{Q}]} = |d_K|^{1/10}$  ; l'excès par rapport à la table est de 107 % environ.

Remarque 3. - Les constructions de corps de petits discriminants peuvent aussi être utilisées pour donner des exemples de corps de nombre de classes 1 de degré relativement élevé (cf. [M2]).

TABLE 1

Corps de classes de corps quadratiques imaginaires (\*)

| n  | - d | f               | $ d_K ^{1/n}$                         | $ d_K ^{1/n}$ | OdL    | %    |
|----|-----|-----------------|---------------------------------------|---------------|--------|------|
| 2  | 3   | (1)             | $3^{1/2}$                             | 1,732         | 1,721  | 0,64 |
| 4  | 3   | $p_{13}$        | $3^{1/2} \cdot 13^{1/4}$              | 3,289         | 3,263  | 0,79 |
| 6  | 3   | $p_{19}$        | $3^{1/2} \cdot 19^{1/3}$              | 4,622         | 4,592  | 0,65 |
| 8  | 4   | $p_{17}$        | $2 \cdot 17^{3/8}$                    | 5,787         | 5,734  | 0,92 |
| 10 | 3   | $p_{31}$        | $3^{1/2} \cdot 31^{2/5}$              | 6,841         | 6,726  | 1,70 |
| 12 | 3   | $p_3 p_{19}$    | $3^{3/4} \cdot 19^{5/12}$             | 7,774         | 7,598  | 2,32 |
| 14 | 71  | (1)             | $71^{1/2}$                            | 8,426         | 8,371  | 0,66 |
| 16 | 15  | $p_3 p_5$       | $3^{3/4} \cdot 5^{7/8}$               | 9,321         | 9,068  | 2,78 |
| 18 | 4   | $p_{37}$        | $2 \cdot 37^{4/9}$                    | 9,954         | 9,697  | 2,65 |
| 22 | 7   | $p_{23}$        | $7^{1/2} \cdot 23^{5/11}$             | 11,003        | 10,797 | 1,91 |
| 24 | 7   | $(3)p_7$        | $3^{3/4} \cdot 7^{5/6}$               | 11,537        | 11,283 | 2,25 |
| 32 | 15  | $p_2^2 p_3 p_5$ | $2^{1/2} \cdot 3^{3/4} \cdot 5^{7/8}$ | 13,181        | 12,912 | 2,08 |
| 36 | 23  | $p_{13}$        | $23^{1/2} \cdot 13^{5/12}$            | 13,964        | 13,581 | 2,82 |
| 48 | 7   | $(3)p_7$        | $3^{7/8} \cdot 7^{11/12}$             | 15,565        | 15,225 | 2,23 |

La colonne 1 donne le degré d'un corps  $K$ , extension abélienne du corps quadratique imaginaire de discriminant  $d$  (colonne 2) ayant pour conducteur  $f$  (colonne 3). Le discriminant  $d_K$  de  $K$  est calculé dans les colonnes 4 et 5. La colonne 6 donne la minoration obtenue sous GRH par ODLYZKO dans sa table du 29 novembre 1976. Les résultats des colonnes 5 et 6 sont arrondis aux 3 décimales les plus proches, et le quotient des nombres de ces deux colonnes est donné en pourcentage dans la colonne 7, arrondi aux 2 décimales les plus proches. La notation  $p_q$  désigne un idéal premier de degré 1 au dessus de  $q$  dans  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ .

(\*) Table établie d'après des calculs de Gilles ROBERT.

TABLE 2

Corps de classes de corps biquadratiques totalement imaginaires

| n  | d                | f          | $ d_K ^{1/n}$                              | $ d_K ^{1/n}$ | OdK    | %    |
|----|------------------|------------|--|---------------|--------|------|
| 12 | $3^2 \cdot 13$   | $P_{163}$  | $3^{1/2} \cdot 13^{1/4} \cdot 163^{1/6}$   | 7,687         | 7,598  | 1,17 |
| 16 | $3^2 \cdot 13$   | $P_{241}$  | $3^{1/2} \cdot 13^{1/4} \cdot 241^{3/16}$  | 9,198         | 9,068  | 1,43 |
| 20 | $2^8$            | $p_{11}$   | $2^2 \cdot 11^{2/5}$                       | 10,438        | 10,270 | 1,64 |
| 24 | $3^2 \cdot 13$   | $P_{397}$  | $3^{1/2} \cdot 13^{1/4} \cdot 397^{5/24}$  | 11,441        | 11,283 | 1,40 |
| 40 | $3^2 \cdot 17^3$ | (1)        | $3^{1/2} \cdot 17^{3/4}$                   | 14,501        | 14,183 | 2,24 |
| 44 | $3^3 \cdot 7$    | $P_{463}$  | $3^{3/4} \cdot 7^{1/2} \cdot 463^{5/22}$   | 14,960        | 14,728 | 1,57 |
| 48 | $5^2 \cdot 19^2$ | $p_2 p'_2$ | $2^{2/3} \cdot 5^{1/2} \cdot 19^{1/2}$     | 15,472        | 15,225 | 1,62 |
| 52 | $5^3$            | $P_{911}$  | $5^{3/4} \cdot 911^{3/13}$                 | 16,114        | 15,680 | 2,77 |
| 56 | $3^2 \cdot 37$   | $P_{337}$  | $3^{1/2} \cdot 37^{1/4} \cdot 337^{13/56}$ | 16,496        | 16,097 | 2,48 |
| 60 | $3^2 \cdot 7$    | $p_{19}$   | $3^{1/2} \cdot 37^{1/4} \cdot 19^{7/15}$   | 16,880        | 16,482 | 2,41 |
| 72 | $2^8$            | $P_{577}$  | $2^2 \cdot 577^{17/72}$                    | 17,948        | 17,497 | 2,57 |

Les notations des colonnes 1, et 4 à 7, sont celles de la table 1. La notation  $P_q$  (resp.  $p_q$ ) désigne un idéal premier de degré 1 (resp. de degré 2) au-dessus de  $q$  dans le corps biquadratique  $k$  de discriminant  $d$ . Le conducteur de  $K$  sur  $k$  est  $f$  (colonne 3). Voici les corps  $k$  utilisés : les corps de discriminants  $3^2 \cdot 13 = 117$ ,  $3^3 \cdot 7 = 189$  et  $3^2 \cdot 37 = 333$  sont les extensions quadratiques de  $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$  de conducteurs respectifs  $p_{13}$ ,  $p_3 p_7$  et  $p_{37}$  ; les corps de discriminants  $5^3 = 125$  et  $2^8 = 256$  sont les corps des racines 5e et 8e de l'unité ; le corps de discriminant  $17^3 \cdot 3^2 = 44\ 217$  est le corps cyclique de conducteur  $3 \cdot 17 = 51$  (HASSE n° 6), de nombre de classes 10 ; le corps de discriminant  $5^2 \cdot 19^2 = 9\ 025$  est le corps  $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{-19})$ , dont le nombre de classes est 4.

## BIBLIOGRAPHIE

- [H] HASSE (H.). - Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper. - Berlin, Akademie-Verlag, 1952, (Mathematische Lehrbücher und Monographien, 1).
- [M1] MARTINET (J.). - Tours de corps de classes et estimations de discriminants, Inventiones Math., t. 44, 1978, p. 65-73.
- [M2] MARTINET (J.). - Corps de nombre de classes 1, Séminaire de Théorie des nombres de l'Université de Bordeaux, Année 1977/78, n° 12.
- [O] ODLYZKO (A. M.). - Tables datées du 29 novembre 1976 (multigraphié).

[P] POITOU (G.). - Minorations de discriminants, d'après A. M. ODLYZKO, Séminaire Bourbaki, 28e année, 1975/76, n° 479, 18 p. - Berlin, Springer-Verlag, 1977 (Lecture Notes in Mathematics, 567).

(Texte reçu le 5 avril 1978)

Jacques MARTINET  
Mathématiques  
Université de Bordeaux-I  
351 cours de la libération  
33405 TALENCE CEDEX

---