Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Robert Béjian
Henri Faure

Discrépance de la suite de van der Corput

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 19, nº 1 (1977-1978), exp. nº 13, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1977-1978__19_1_A10_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
19e année, 1977/78, n° 13, 14 p.

5 décembre 1977

DISCRÉPANCE DE LA SUITE DE VAN DER CORPUT

par Robert BÉJIAN et Henri FAURE

1. Introduction.

L'objet de cet article est de calculer avec précision la discrépance de la suite de Van der Corput, et d'améliorer par suite la connaissance de son comportement asymptotique.

Il faut, à ce sujet, distinguer la discrépance proprement dite que nous notons $D(N)$ et la "discrépance à l'origine" que nous notons $D^*(N)$. A part le fait banal que $D(N) \leqslant 2D^*(N)$, nous n'avions que des résultats sur $D^*(N)$.

VAN DER CORPUT [8] avait démontré que $D^*(N) \leqslant \frac{\log N}{\log 2} + 1$. HABER [3] a ensuite obtenu $D^*(N) \leqslant \frac{\log N}{3\log 2} + O(1)$.

Enfin, TIJDEMAN [7] est parvenu à

$$D^*(N) \leqslant \frac{\log N}{3\log 2} + 1 \ , \quad \limsup (D^*(N) - \frac{\log N}{3\log 2}) \geqslant \frac{4}{9} + \frac{\log 3}{3\log 2} .$$

Dans cet article, nous démontrons l'égalité en ce qui concerne cette limite.

Par une méthode de descente appropriée, nous obtenons une détermination précise de $D(N)$, soit par une série assez simple, soit par des relations de récurrence très simples.

Un résultat qui nous semble intéressant est que $D(N) = D^*(N)$. En effet, on utilise, en calcul numérique, le résultat suivant (KOKSMA [5], HLAWKA [4]) : Si f est à variation bornée $V(f)$ sur $[0 , 1]$, si (x_k) est une suite de discrépance D^*, on a

$$E_N = |\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x_k) - \int_0^1 f(x)\, dx| \leqslant V(f) \frac{D^*(N)}{N} .$$

Mais en fait, quand $f(0) = f(1)$, on a aussi

$$E_N \leqslant V(f) \frac{D(N)}{2N} .$$

Si on utilise la suite de Van der Corput, la précision est ainsi doublée.

Depuis le travail dont il vient d'être question, nous avons obtenu des généralisations dans deux directions différentes :

1° Suites associées au développement en base 2, dont la discrépance à l'origine est moitié de celle de Van der Corput [1]. A tout paramètre α de $[0 , 1[$, on fait correspondre une suite $\Omega^{(\alpha)}$ dont la discrépance D^* à l'origine est faible si α est convenablement choisi. En particulier, pour $\alpha = \overline{0{,}010011000111\ldots}$, si $\Omega^{(\alpha)}$ est définie par $a_1 = \alpha$ et $a_{2^n+1-j} = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{\{2^n \alpha\}}{2^{n-1}}$, pour $1 \leqslant j \leqslant 2^{n-1}$, alors

$$\limsup_{N\to+\infty} \frac{D^*(N, \Omega^{(\alpha)})}{\log N} = \frac{1}{6\log 2} = 0{,}240 \ldots$$

2° Suites associées à un système de numération quelconque [2]. A toute permutation σ de la base $\{0, 1, \ldots, r-1\}$, on associe la suite S_r^σ définie par $S_r^\sigma(n) = \sum_{j=0}^S \sigma(a_j) r^{-j-1}$ si $n - 1 = \sum_{j=0}^S a_j r^j$. On obtient ainsi des suites à faible discrépance, le meilleur résultat connu actuellement étant acquis pour $r = 12$ et $\sigma_0 = (17698)(23\alpha 45)$ (produit de deux permutations circulaires avec l'encadrement

$$0{,}371 < \limsup_{N\to\infty} \frac{D_{12}^{\sigma_0}(N)}{\log N} < 0{,}386 .$$

<u>Notations</u>. - Soient x et y deux réels de $[0, 1)$.

Si $x < y$, on note $[x, y[$ l'intervalle fermé en x, ouvert en y, et on pose $\ell([x, y[) = y - x$.

Si $x > y$, on pose $[x, y[= [0, 1) \setminus [y, x[$, et $\ell([x, y[) = 1 - \ell([y, x[)$.

Si $x = y$, on convient que $[x, y[= \emptyset$.

Soit un entier $n \geq 1$; si $n - 1 = \sum_{j=0}^S a_j 2^j$ en représentation binaire, on pose $x_n = \sum_{j=0}^S (a^j/2^{j+1})$.

x_n est le n-ième terme de la suite de Van der Corput.

On pose $\omega = (x_n)_{n\geq 1}$, $\omega_n = (x_1, x_2, \ldots, x_{2^n})$, $\bar{\omega}_n$ = support de ω_n.

$$\omega_n^* = (x_{2^n}, \ldots, x_2, x_1) .$$

N étant un entier naturel, on pose

$$A([x, y[, N, \omega) = \mathrm{Card}\{j \in \underset{\sim}{N}^* ;\ j \leq N \text{ et } x_j \in [x, y[\} ,$$

$$E([x, y[, N, \omega) = A([x, y[, N, \omega) - N\ell([x, y[) ,$$

$$E([0, y], N, \omega) = \mathrm{Card}\{j \in \underset{\sim}{N}^* ;\ j \leq N \text{ et } 0 \leq x_j \leq y\} - Ny .$$

Les discrépances sont définies par

$$D(N) = \sup_{0\leq\alpha<\beta\leq 1} |E([\alpha, \beta[, N, \omega)| \quad \text{pour la discrépance de } \omega ,$$

$$D^*(N) = \sup_{0<\alpha\leq 1} |E([0, \alpha[, N, \omega)| \quad \text{pour la discrépance "à l'origine" de } \omega .$$

Si n est tel que $N \leq 2^n$, on pose

$$D_n(N) = \sup_{x,y\in\bar{\omega}_n} |E([x, y[, N, \omega_n)| ,$$

$$D_n^*(N) = \sup_{x\in\bar{\omega}_n} |E([0, x[, N, \omega_n)| .$$

La discrépance étudiée dans l'ouvrage "Uniform distribution of sequences" de KUIPERS et NIEDERREITER [6] est ici multipliée par N.

On introduit la fonction φ de période 1, définie sur $[0, 1)$ par $\varphi(x) = \min(x, 1 - x)$. φ'_+, φ'_- désignent respectivement ses dérivées à droite et à gauche.

2. Etude de $D(N)$ et $D^*(N)$.

LEMME 1. - Soit $N \geq 1$ et n tel que $N \leq 2^n$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} D_n(N) = D(N) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} D_n^*(N) = D^*(N) .$$

Démonstration. - Soient α et β dans $[0 , 1]$, notons x le plus petit terme de ω_n, supérieur ou égal à α ; on procède de même pour définir y à partir de β. Il en résulte que

$$A([\alpha , \beta[, N , \omega_n) = A([x , y[, N , \omega_n) ,$$

$$\ell([\alpha , \beta[) = \ell([x , y[) + (x - \alpha) - (y - \beta) .$$

Etant donné que $x - \alpha$ et $y - \beta$ varient dans $[0 , 1/2^n[$, nous avons

$$|E([\alpha , \beta[, N , \omega_n) - E([x , y[, N , \omega_n)| \leq \frac{N}{2^n} .$$

On en déduit le résultat pour $D(N)$.

Si $\alpha = 0$, alors $x = 0$, et on en déduit le résultat pour $D^*(N)$.

LEMME 2. - Soit $N \geq 1$ et n tel que $N \leq 2^n$.

Soient x et y deux points de la séquence ω_n. Alors

$$E([x , y[, N , \omega_n) = E([y , x[, 2^n - N , \omega_n^*) .$$

Démonstration.

$$E([x , y[, N , \omega_n) = A([x , y[, N , \omega_n) - N\ell([x , y[) ,$$

$$E([x , y[, 2^n - N , \omega_n^*) = A([x , y[, 2^n - N , \omega_n^*) - (2^n - N)\ell([x , y[) .$$

Mais il est clair que

$$A([x , y[, N , \omega_n) + A([x , y[, 2^n - N , \omega_n^*) = A([x , y[, 2^n , \omega_n) .$$

D'où

$$\text{(i)} \quad E([x , y[, N , \omega_n) + E([x , y[, 2^n - N , \omega_n^*) = A([x , y[, 2^n , \omega_n) - 2^n \ell([x , y[) = 0 .$$

Par ailleurs, on a

$$E([y , x[, 2^n - N , \omega_n^*) = A([y , x[, 2^n - N , \omega_n^*) - (2^n - N)[1 - \ell([x , y[)] ,$$

$$A([y , x[, 2^n - N , \omega_n^*) + A([x , y[, 2^n - N , \omega_n^*) = A([0 , 1[, 2^n - N , \omega_n^*) = 2^n - N .$$

D'où

$$\text{(ii)} \quad E([y , x[, 2^n - N , \omega_n^*) + E([x , y[, 2^n - N , \omega_n^*) = (2^n - N) - (2^n - N) = 0 .$$

Le rapprochement de (i) et (ii) donne le résultat.

LEMME 3. - Soit $N \geq 1$ et n tel que $N \leq 2^n$. Soient x et y dans $\overline{\omega_n}$. Alors

$$E([x\ ,\ y[\ ,\ N\ ,\ \omega_n) = E([1-y\ ,\ 1-x[\ ,\ N\ ,\ \omega_n^*)\ .$$

<u>Démonstration</u>. - Soit $x_k \in [x\ ,\ y[$; x_{k_1}, x et y sont des points de la forme $\frac{h}{2^n}$, avec $0 \leqslant h < 2^n$. D'où $x < x_k + \frac{1}{2^n} \leqslant y$. i. e.

$$1 - y \leqslant 1 - x_k - \frac{1}{2^n} < 1 - x\ .$$

Posons $\omega_n^* = (y_1\ ,\ y_2\ ,\ \ldots\ ,\ y_{2^n})$, c'est-à-dire $y_k = x_{2^n-k+1}$.

Il résulte de la définition de la suite de Van der Corput que

$$x_{2^n-k+1} = 1 - x_k - \frac{1}{2^n}\ .$$

En effet, si $k-1 = \sum_{j=0}^{n-1} a_j\, 2^j$, $x_k = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{2^{j+1}}$,

$$2^n - k = (2^n - 1) - (k-1) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j\, 2^j\ ,\ \text{avec}\quad \alpha_j = 1 - a_j\ ;$$

d'où

$$x_{2^n-k+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\alpha_j}{2^{j+1}} = 1 - (\tfrac{1}{2})^n - x_k\ ,$$

et le lemme 3 résulte de l'équivalence

$$x_k \in [x\ ,\ y[\quad \text{si et seulement si}\quad y_k \in [1-y\ ,\ 1-x[\ .$$

LEMME 4. - <u>Soit</u> $N \geqslant 1$ <u>et</u> n <u>tel que</u> $N \leqslant 2^n$. <u>On pose</u> $N' = \min(N\ ,\ 2^n - N)$. <u>Pour tout</u> x <u>et</u> y <u>dans</u> $\overline{\omega_n}$, <u>il existe</u> x' <u>et</u> y' <u>dans</u> $\overline{\omega_{n-1}}$ <u>et</u> ϵ <u>dans</u> $\{-1\ ,\ 0\ ,\ 1\}$ <u>vérifiant</u>

$$E([x\ ,\ y[\ ,\ N\ ,\ \omega_n) = E([x'\ ,\ y'[\ ,\ N'\ ,\ \omega_{n-1}) + \epsilon\varphi(\frac{N}{2^n})\ .$$

<u>Démonstration</u>.

<u>Premier cas</u> : $N' = N$. - Suivant que x appartient ou non à $\overline{\omega_{n-1}}$, on pose $x' = x$ ou $x' = x + \frac{1}{2^n}$.

De même, on pose $y' = y$ ou $y' = y + \frac{1}{2^n}$ de sorte que x' et y' appartiennent à $\overline{\omega_{n-1}}$ et

$$A([x\ ,\ y[\ ,\ N\ ,\ \omega_n) = A([x'\ ,\ y'[\ ,\ N\ ,\ \omega_{n-1})\ .$$

D'où

$$E([x\ ,\ y[\ ,\ N\ ,\ \omega_n) = E([x'\ ,\ y'[\ ,\ N\ ,\ \omega_{n-1}) + N\{\ell([x'\ ,\ y'[) - \ell([x\ ,\ y[)\}\ ,$$

et selon le cas, la différence $\ell([x'\ ,\ y'[) - \ell([x\ ,\ y[)$ vaut 0 ou $\mp\frac{1}{2^n}$. Comme $N \leqslant 2^{n-1}$, on a $\varphi(\frac{N}{2^n}) = \frac{N}{2^n}$, et on obtient

$$E([x\ ,\ y[\ ,\ N\ ,\ \omega_n) = E([x'\ ,\ y'[),\ N\ ,\ \omega_{n-1} + \epsilon\varphi(\frac{N}{2^n})\ .$$

<u>Second cas</u> : $N' = 2^n - N$. - D'après le lemme 2,

$$E([x\ ,\ y[\ ,\ N\ ,\ \omega_n) = E([y\ ,\ x[\ ,\ 2^n - N\ ,\ \omega_n^*)\ .$$

Posons $a = x$ ou $a = x + \frac{1}{2^n}$ suivant que x appartient ou non à $\overline{\omega_{n-1}}$. On définit b de manière analogue. Alors :

$$A([y , x[, 2^n - N , \omega_n^*) = A([b , a[, 2^n - N , \omega_{n-1}^*) ;$$

$$E([y , x[, 2^n - N , \omega_n^*)$$
$$= E([b , a[, 2^n - N , \omega_{n-1}^*) + (2^n - N)\{\ell([b , a[) - \ell([y , x[)\} ,$$

la différence $\ell([b , a[) - \ell([y , x[)$ vaut 0 ou $\mp \frac{1}{2^n}$. Comme $\frac{N}{2^n} \geqslant \frac{1}{2}$, on a $(2^n - N)\{\ell([b , a[) - \ell([y , x[)\} = \epsilon\varphi(\frac{N}{2^n})$, et

$$E([x , y[, N , \omega_n) = E([b , a[, 2^n - N , \omega_{n-1}^*) + \epsilon\varphi(\frac{N}{2^n}) ;$$

posons $x' = 1 - a$, $y' = 1 - b$; en appliquant le lemme 3 à l'écart $E([b , a[, 2^n - N , \omega_{n-1}^*)$, on obtient

$$E([x , y[, N , \omega_n) = E([x' , y'[, 2^n - N , \omega_{n-1}) + \epsilon\varphi(\frac{N}{2^n}) .$$

LEMME 5. - Soient $N \geqslant 1$, n tel que $N \leqslant 2^n$, x et y dans $\overline{\omega_n}$. Alors

$$|E([x , y[, N , \omega_n)| \leqslant \sum_{j=0}^{n} \varphi(\frac{N}{2^j}) .$$

Démonstration.

Si $N = 2^n$, les deux membres de cette inégalité sont trivialement nuls.

Procédons par récurrence sur n.

Si $n = 0$, alors $N = 2^0$, et on est ramené au cas précédent.

Supposons l'inégalité vraie jusqu'à l'ordre $n - 1$.

Soient x et y dans $\overline{\omega_n}$, et N tel que $1 \leqslant N < 2^n$. D'après le lemme 4, il existe x' et y' dans $\overline{\omega_{n-1}}$ tels que

$$|E([x , y[, N , \omega_n)| \leqslant |E([x' , y'[, N' , \omega_{n-1})| + \varphi(\frac{N}{2^n}) ,$$

avec $N' = \min(N , 2^n - N)$. On a $1 \leqslant N' \leqslant 2^{n-1}$, et l'hypothèse de récurrence donne

$$|E([x' , y'[, N' , \omega_{n-1})| \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(\frac{N'}{2^j}) .$$

Mais $\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(\frac{N'}{2^j}) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(\frac{N}{2^j})$. Ceci est banal si $N' = N$, et pour $N' = 2^n - N$, φ étant paire et de période 1, on a

$$\varphi(\frac{N'}{2^j}) = \varphi(\frac{2^n - N}{2^j}) = \varphi(2^{n-j} - \frac{N}{2^j}) = \varphi(\frac{N}{2^j}) .$$

Il en résulte que

$$|E([x , y[, N , \omega_n)| \leqslant \sum_{j=0}^{n} \varphi(\frac{N}{2^j}) .$$

LEMME 6. - Soient n et N tels que $1 \leqslant N \leqslant 2^n$. Alors il existe x dans $\overline{\omega_n}$ vérifiant

$$E([0 , x[, N , \omega_n) = \sum_{j=0}^{n} \varphi(\frac{N}{2^j}) .$$

Démonstration.

Si $N = 2^n$, tout point x de $\overline{\omega_n}$ convient.

Procédons par récurrence sur n .

Pour $n = 0$, $N = 2^0$, et on est ramené au cas précédent.

Supposons la propriété vraie jusqu'à l'ordre $n - 1$.

Soit N tel que $1 \leq N < 2^n$, et posons $N' = \min(N , 2^n - N)$. Alors $1 \leq N' \leq 2^{n-1}$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe x' dans $\overline{\omega_{n-1}}$ vérifiant $E([0 , x'[, N' , \omega_{n-1}) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(\frac{N'}{2^j})$.

Comme dans le lemme précédent, on a $\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(\frac{N'}{2^j}) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(\frac{N}{2^j})$.

Montrons que, pour tout x' dans $\overline{\omega_{n-1}}$, on a

(i) $$E([0 , x' - \frac{1}{2^n}[, N' , \omega_n) = E([0 , x'[, N' , \omega_{n-1}) + \varphi(\frac{N}{2^n}) .$$

En effet,

$$E([0 , x' - \frac{1}{2^n}[, N' , \omega_n) = A([0 , x' - \frac{1}{2^n}[, N' , \omega_n) - N'(x' - \frac{1}{2^n}) ,$$

$$E([0 , x'[, N' , \omega_{n-1}) = A([0 , x'[, N' , \omega_{n-1}) - N' x' .$$

Or, on a $\frac{N'}{2^n} = \varphi(\frac{N'}{2^n}) = \varphi(\frac{N}{2^n})$, et, comme $N' \leq 2^{n-1}$,

$$A([0 , x' - \frac{1}{2^n}[, N' , \omega_n) = A([0 , x'[, N' , \omega_{n-1}) .$$

On en déduit l'égalité (i).

Si $N' = N$, il suffit de poser $x = x' - \frac{1}{2^n}$.

Si $N' = 2^n - N$, par le lemme 2 et le lemme 3, on a

$$\begin{aligned} E([0 , x' - \frac{1}{2^n}[, N' , \omega_n) &= E([x' - \frac{1}{2^n} , 0[, 2^n - N' , \omega_n^*) \\ &= E([x' - \frac{1}{2^n} , 0[, N , \omega_n^*) = E([1 , 1 - x' + \frac{1}{2^n}[, N , \omega_n) , \end{aligned}$$

ce qui est différent de $E([0 , 1 - x' + \frac{1}{2^n}[, N , \omega_n)$. Dans ce cas, il suffit de poser $x = 1 - x' + \frac{1}{2^n}$.

THÉORÈME 1. - <u>Soit</u> φ <u>la fonction de période</u> 1 , <u>définie sur</u> $[0 , 1]$ <u>par</u> $\varphi(x) = \min(x , 1 - x)$. <u>Alors, pour</u> $N \geq 1$, <u>on a</u>

$$D(N) = D^*(N) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi(\frac{N}{2^j}) .$$

<u>Démonstration</u>. - Soit n un entier tel que $N \leq 2^n$.

D'après les deux lemmes précédents, on a

$$\sum_{j=0}^{n} \varphi(\frac{N}{2^j}) \leq D_n^*(N) \leq D_n(N) \leq \sum_{j=0}^{n} \varphi(\frac{N}{2^j}) ,$$

c'est-à-dire $\sum_{j=0}^{n} \varphi(\frac{N}{2^j}) = D_n^*(N) = D_n(N)$. Lorsque n augmente indéfiniment, $D_n^*(N)$ et $D_n(N)$ ont pour limite $\sum_{j=0}^{\infty} \varphi(\frac{N}{2^j})$, et, d'après le lemme 1, cette limite est aussi $D(N)$ et $D^*(N)$.

COROLLAIRE. - Soit $N \geq 1$. On a les relations

$$D(1) = 1 \ , \quad D(2N) = D(N) \ , \quad D(2N+1) = 1/2(D(N) + D(N+1) + 1) \ .$$

Démonstration.

$D(2N) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(\frac{2N}{2^j}) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(\frac{N}{2^{j-1}}) = D(N)$, car $\varphi(N) = 0$.

La relation $2D(2N+1) = D(2N) + D(2N+2) + 1$ équivaut à

$$2\sum_{j=1}^{\infty} \varphi(\frac{2N+1}{2^j}) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(\frac{2N}{2^j}) + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(\frac{2N+2}{2^j}) + 1 \ ,$$

pour $j = 1$, $2\varphi(\frac{2N+1}{2}) = 1$ et $\varphi(\frac{2N}{2}) = \varphi(\frac{2N+2}{2}) = 0$, et la relation à établir devient

$$2\sum_{j=2}^{\infty} \varphi(\frac{2N+1}{2^j}) = \sum_{j=2}^{\infty} \{\varphi(\frac{2N}{2^j}) + \varphi(\frac{2N+2}{2^j})\} \ .$$

Pour cela, il suffit de montrer que, pour tout $j \geq 2$ et tout $N \geq 1$,

(1) $$2\varphi(\frac{2N+1}{2^j}) = \varphi(\frac{2N}{2^j}) + \varphi(\frac{2N+2}{2^j}) \ .$$

Posons $2N + 1 = 2^j q + r$, avec $0 < r < 2^j$. D'où $\frac{1}{2^j} \leq \frac{r}{2^j} \leq 1 - \frac{1}{2^j}$; posons $x = \frac{2N+1}{2^j}$; alors $\{x\} = r/2^j$ et la relation (1) s'écrit

$$2\varphi(x) = \varphi(x - \frac{1}{2^j}) + \varphi(x + \frac{1}{2^j}) \ ,$$

i. e.

$$2\varphi(\{x\}) = \varphi(\{x\} - \frac{1}{2^j}) + \varphi(\{x\} + \frac{1}{2^j}) \ ,$$

l'inégalité précédente prouve que $\{x\} - \frac{1}{2^j}$ et $\{x\} + \frac{1}{2^j}$ sont simultanément dans $[0 , 1/2]$ ou $[1/2 , 1]$ suivant que $\{x\}$ est inférieur ou supérieur strictement à $1/2$. On en déduit la relation (1) car φ est affine sur ces intervalles.

Remarque. - La table numérique à la fin de l'article donne les premières valeurs de $D(N)$.

3. Etude des arcs donnant la discrépance.

LEMME 7. - Soit $n \geq 1$ et N tel que $1 \leq N < 2^n$. Les x dans $\overline{\omega_n}$ tels que $E([0 , x[, N , \omega_n) = D_n(N)$ sont ceux pour lesquels il existe une suite finie $(\epsilon_k)_{1 \leq k \leq n}$, ϵ_k $\{- , +\}$ telle que

$$x = - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \varphi'_{\epsilon_k}(\frac{N}{2^k}) \quad (\mathrm{mod}\ 1) \ .$$

Démonstration. - Pour $N = 2^{n-1}$, seuls les points de $\overline{\omega_n} - \overline{\omega_{n-1}}$ conviennent, et l'énoncé est donc vérifié dans ce cas, puisque la formule donne (mod 1)

$$\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2^2} \pm \frac{1}{2^3} \pm \dots \pm \frac{1}{2^n} \ .$$

Procédons par récurrence sur n .

1° Pour $n = 1$, la propriété est vraie d'après ce qui précède.

Supposons la propriété vraie jusqu'à l'ordre $n-1$, et montrons-la pour n . Soit donc N tel que $1 \leq N < 2^n$, et posons $N' = \min(N , 2^n - N)$. Alors $1 \leq N' \leq 2^{n-1}$.

Le cas $N = 2^{n-1}$ étant déjà traité, on peut supposer $N \neq 2^{n-1}$;

2° Notons $L_n(N)$ l'ensemble des x dans $\overline{\omega_n}$ tels que $E([0 , x[, N , \omega_n) = D_n(N)$ et montrons , dans un premier temps, que x est dans $L_n(N)$ si, et seulement si, il existe x' dans $L_{n-1}(N')$ tel que $x = (x' - \frac{1}{2^n})\varphi'(\frac{N}{2^n})$ (mod 1) .

On a vu au lemme 6 que, pour tout x' dans $\overline{\omega_{n-1}}$, on a

(i) $$E([0 , x' - \frac{1}{2^n}[, N' , \omega_n) = E([0 , x'[, N' , \omega_{n-1}) + \varphi(\frac{N}{2^n}) .$$

Alors, si x est dans $L_n(N)$, $x' = x\varphi'(\frac{N}{2^n}) + \frac{1}{2^n}$ est dans $\overline{\omega_{n-1}}$ (car x n'est pas dans $\overline{\omega_{n-1}}$) et vérifie

$$E([0 , x'[, N' , \omega_{n-1}) = E([0 , x[, N , \omega_n) - \varphi(\frac{N}{2^n})$$

car

(ii) $$E([0 , x\varphi'(\frac{N}{2^n})[, N' , \omega_n) = E([0 , x[, N , \omega_n) .$$

D'où $E([0 , x'[, N' , \omega_{n-1}) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(\frac{N}{2^j}) = D_{n-1}(N')$. (on a vu au lemme 5 que $\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(\frac{N'}{2^j}) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(\frac{N}{2^j})$)

On a donc montré l'une des implications.

Pour l'autre, toujours d'après le lemme 6, on montre que si x' est dans $L_{n-1}(N')$ alors $x = (x' - \frac{1}{2^n})\ \varphi'(\frac{N}{2^n})$ est dans $L_n(N)$. En effet, d'après (i) et (ii), on a

$$E([0 , x[, N , \omega_n) = E([0 , x'[, N' , \omega_{n-1}) + \varphi(\frac{N}{2^n}) ,$$

et on conclut comme ci-dessus.

3° Toujours dans le cas $N \neq 2^{n-1}$, montrons à présent la propriété de récurrence à l'ordre n .

Supposons d'abord que $x \in L_n(N)$ et montrons qu'il existe une suite $(\epsilon_k)_{1 \leq k \leq n}$, $\epsilon_k \in \{- , +\}$, telle que

$$x = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \varphi'_{\epsilon_k}(\frac{N}{2^k}) \quad (\text{mod } 1) .$$

D'après 2°, il existe $x' \in L_{n-1}(N')$ tel que $x = (x' - \frac{1}{2^n})\ \varphi'(\frac{N}{2^n})$; et d'après l'hypothèse de récurrence, on a donc $x' = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \varphi'_{\epsilon_k}(\frac{N'}{2^k})$ (mod 1) . Mais

(iii) $$\varphi'(\frac{N}{2^n})\ \varphi'_{\epsilon_k}(\frac{N'}{2^k}) = \varphi'_{\epsilon_k}(\frac{N}{2^k}) , \text{ pour } 1 \leq k \leq n-1 .$$

En effet, si $N < 2^{n-1}$, on a $N' = N$, et la formule est évidente ; et si $2^{n-1} < N < 2^n$, on a $N' = 2^n - N$, d'où

$$\varphi'(\frac{N}{2^n}) = -1 \quad \text{et} \quad \varphi'_{\epsilon_k}(\frac{N'}{2^k}) = \varphi'_{\epsilon_k}(2^{n-k} - \frac{N}{2^k}) = -\varphi'_{\epsilon_k}(\frac{N}{2^k}) \ ;$$

la formule est donc encore vérifiée.

En appliquant (iii), on a alors $x = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \varphi'_{\epsilon_k}(\frac{N}{2^k}) \pmod 1$, avec ϵ_n arbitraire dans $\{-, +\}$.

Inversement, si on a une suite $(\epsilon_k)_{1 \leq k \leq n}$ telle que

$$x = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \varphi'_{\epsilon_k}(\frac{N}{2^k}) \pmod 1 ,$$

posons $x' = x\,\varphi'(\frac{N}{2^n}) + \frac{1}{2^n}$, et montrons que x' est dans $L_{n-1}(N')$. Alors d'après 2° on aura montré que $x \in L_n(N)$.

Notons que $\varphi'_{\epsilon_k}(\frac{N}{2^n})\, \varphi'(\frac{N}{2^n}) = 1$, puisque N est différent de 2^n et 2^{n-1} .

Avec (iii) on obtient donc $x' = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \varphi'_{\epsilon_k}(\frac{N'}{2^k}) \pmod 1$; d'où, d'après l'hypothèse de récurrence $x' \in L_{n-1}(N')$, ce qu'il fallait démontrer.

THÉORÈME 2. Soit $N \geq 1$. Les α dans $[0, 1[$ tels que $E([0, \alpha[, N, \omega) = D(N)$ sont ceux pour lesquels il existe une suite $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, $\epsilon_k \in \{-, +\}$, telle que

$$\alpha = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \varphi'_{\epsilon_k}(\frac{N}{2^k}) \pmod 1 .$$

Démonstration.

Soit d'abord $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite à termes dans $\{-, +\}$ et soit

$$\alpha = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \varphi'_{\epsilon_k}(\frac{N}{2^k}) \pmod 1 .$$

Pour n tel que $N < 2^n$, on a $\alpha = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \varphi'_{\epsilon_k}(\frac{N}{2^k}) - \frac{1}{2^n}$ et donc, d'après le lemme 7, $\alpha = x - \frac{1}{2^n}$, avec x dans $\overline{\omega_n}$ vérifiant

$$E([0, x[, N, \omega_n) = D_n(N) .$$

Mais il résulte du lemme 1 que $D(N) = D_n(N) + \frac{N}{2^n}$ et, par ailleurs,

$$E([0, x[, N, \omega_n) + \frac{N}{2^n} = E([0, \alpha[, N, \omega) ,$$

d'où $E([0, \alpha[, N, \omega) = D(N)$.

Inversement, soit $\alpha \in [0, 1[$ tel que $E([0, \alpha[, N, \omega) = D(N)$, et soit n tel que $N < 2^n$. Alors $\alpha \in \overline{\omega_n}$, sans quoi, sans changer $A([0, \alpha[, N, \omega)$, on pourrait diminuer $N\alpha$ et donc augmenter l'écart, et α ne réaliserait plus $D(N)$.

Posons alors $x = \alpha + \frac{1}{2^n}$; x est dans $\overline{\omega_n}$ et

$$\begin{aligned} E([0, x[, N, \omega_n) &= A([0, \alpha + \frac{1}{2^n}[, N, \omega_n) - (\alpha + \frac{1}{2^n})N \\ &= (A([0, \alpha[, N, \omega_n) - \alpha N) - \frac{N}{2^n} = D(N) - \frac{N}{2^n} = D_n(N) \ ; \end{aligned}$$

d'où $x \in L_n(N)$, et d'après le lemme 7, il existe une suite $(\epsilon_k)_{1 \leq k \leq n}$ telle que

$$x = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \varphi'_{\epsilon_k}\left(\frac{N}{2^k}\right) \pmod 1 .$$

Par suite

$$\alpha = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \varphi'_{\epsilon_k}\left(\frac{N}{2^k}\right) - \frac{1}{2^n}$$

et, par passage à la limite sur n, on obtient ce qu'on voulait démontrer.

Remarque. - Si 2^ν est la plus grande puissance de 2 divisant N, le nombre des arcs $[0, \alpha)$ qui conviennent est 2^ν ; voir la table pour les premières valeurs de N.

COROLLAIRE (Formules génératrices). - *Soit* $N \geq 0$. *Posons*

$$D'(N) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \varphi'_+\left(\frac{N}{2^k}\right) .$$

Alors :

(a) $D(N+1) = D(N) + D'(N)$;
$D'(0) = 1$; $D'(2N) = \dfrac{D'(N) + 1}{2}$; $D'(2N+1) = D'(2N) - 1$.

(b) *Si* α_N *désigne celui des* α *que donne la suite* $\epsilon_k = +$, *pour tout* $k \geq 1$, *on a*

$$\alpha_N = -D'(N) \quad \textit{si } N \textit{ est impair,}$$

$$\alpha_N = 1 - D'(N) \quad \textit{si } N \textit{ est pair.}$$

Démonstration.

(a) Pour $x \geq 0$, introduisons la fonction définie par $D(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\frac{x}{2^k})$; on voit que D est affine sur tout intervalle joignant deux entiers consécutifs. $D'(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \varphi'(\frac{x}{2^k})$ si x est différent d'un entier ; et, en ces points, $D'_+(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \varphi'_+(\frac{x}{2^k})$; d'où en fait $D'(N) = D'_+(N)$, et donc $D(N+1) - D(N) = D'(N)$. Les formules suivantes se déduisent alors des formules analogues pour D.

(b) Si N est impair, $\varphi'_+(\frac{N}{2}) = -1$ d'où $D'(N)$ est dans $[-1, 0)$; et α_N qui est dans $[0, 1)$ est bien égal à $-D'(N)$.

Si N est pair, $\varphi'_+(\frac{N}{2}) = +1$ d'où $D'(N)$ est dans $[0, 1)$ et $\alpha_N = -D'(N) \pmod 1$ donne alors $\alpha_N = 1 - D'(N)$.

4. Etude asymptotique.

LEMME 8. - *Posons* $I_n = [2^{n-1}, 2^n)$, $a_n = \frac{1}{3}(2^{n+1} + (-1)^n)$ $(n \geq 1)$. *Alors* :

(i) $a_n \in I_n$, a_n *est impair* ;

(ii) $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$;

(iii) $2a_{n-1} - 4a_{n-2} = 2(-1)^{n+1}$;

(iv) $D(a_n) = \dfrac{n-1}{3} + \dfrac{10}{9} + \dfrac{(-1)^n}{9 \cdot 2^{n-1}}$;

(v) $D_n(a_n) = \dfrac{n}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{9 \cdot 2^n}$;

(vi) D <u>est maximum sur</u> I_n <u>pour</u> a_n ;

(vii) <u>De même</u> D_n .

<u>Démonstration.</u>

Les trois premières affirmations se voient aisément.

De (ii) et (iii) se déduit que le nombre impair a_n est intercalé entre les nombres pairs $2a_{n-1}$ et $4a_{n-2}$.

On peut donc pour calculer $D(a_n)$ utiliser le corollaire du théorème 1 :

$$D(a_n) = \frac{1}{2}(D(a_{n-1}) + D(a_{n-2}) + 1) .$$

On vérifie donc (iv) par récurrence.

Pour obtenir (v) à partir de (iv), il suffit d'affiner le lemme 1. De sa démonstration découle

$$D(N) = D_n(N) + \frac{N}{2^n}$$

(on peut aussi se référer au théorème 1).

Pour (vi), qu'il est facile de vérifier pour $n=1$ et 2 directement, procédons encore par récurrence.

Soit donc x dans I_n . Si x est impair, il s'encadre entre un multiple de 4 , z , et un multiple de 2 non multiple de 4 , y . Alors

$$D(x) = \frac{1}{2}(D(y) + D(z) + 1) \leqslant \frac{1}{2}(D(a_{n-1}) + D(a_{n-2}) + 1) .$$

Cela nous donne donc $D(x) \leq D(a_n)$ en ce cas.

Si maintenant x est pair,

$$D(x) = D(\frac{x}{2}) \leqslant D(a_{n-1}) < D(a_n) .$$

Pour (vii), nous noterons l'identité

$$D_n(x) = \frac{1}{2}(D_{n-1}(y) + D_{n-2}(z) + 1)$$

qui permet de procéder pour D_n comme on a fait pour D dans le paragraphe précédent.

COROLLAIRE. - <u>Pour</u> $N \in I_n$, <u>nous avons</u>

$$D(N) \leq \min(D(a_n) , D_n(a_n) + \frac{N}{2^n}) .$$

Ceci est l'utilisation conjointe de (vi) et (vii).

THÉORÈME 3. - <u>On a</u>

(a) $D(N) \leqslant \frac{\log N}{3 \log 2} + 1$ <u>pour</u> $N \geqslant 1$;

(b) $\limsup_{N\to\infty} (D(N) - \frac{\log N}{3 \log 2}) = \frac{4}{9} + \frac{\log 3}{3 \log 2}$;

(c) $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} D(k) = \frac{\log N}{4 \log 2} + O(1)$.

Démonstration.

Montrons d'abord que $D(N) - \frac{\log N}{3 \log 2} \leqslant D(a_n) - \frac{\log a_n}{3 \log 2}$, pour tout $N \in I_n$. On est amené à distinguer 2 cas :

(i) Si $N \geqslant a_n$, on utilise le premier terme de la majoration du corollaire.

(ii) Si $N < a_n$, on utilise le second terme

$$D(N) - \frac{\log N}{3 \log 2} \leqslant D_n(a_n) + \frac{N}{2^n} - \frac{\log N}{3 \log 2} .$$

Or la fonction $x \longrightarrow \frac{x}{2^n} - \frac{\log x}{3 \log 2}$ est croissante sur $[2^{n-1} , a_n]$, ce que montre un calcul élémentaire. Cela achève notre démonstration.

Nous pouvons maintenant calculer

$$\frac{\log a_n}{3 \log 2} = \frac{n+1}{3} - \frac{\log 3}{3 \log 2} + \frac{1}{3 \log 2} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right) ,$$

d'où

$$D(N) - \frac{\log N}{3 \log 2} \leqslant \frac{\log 3}{3 \log 2} + \frac{4}{9} + \frac{(-1)^n}{9 . 2^{n-1}} - \frac{1}{3 \log 2} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right) ,$$

l'égalité ayant lieu pour $N = a_n$. Ainsi, on a obtenu (b). On vérifie l'égalité pour $N = 1$. Le second membre prend ensuite des valeurs inférieures à 1, ce qui justifie (a).

Pour démontrer (c), nous interpolerons $D(N)$ en posant, pour tout x réel positif,

$$D(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{x}{2^i}\right)$$

comme il a été fait pour le corollaire du théorème 2.

Cette fonction est affine sur chaque intervalle joignant deux entiers consécutifs. La "méthode des trapèzes" donne exactement

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} D(i) = \frac{1}{N} \int_0^N D(t)\, dt + \frac{D(N)}{2N} .$$

Pour x positif, introduisons la fonction définie par $m(x) = \frac{1}{x} \int_0^x D(t)\, dt$, ce qui donne

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} D(i) = m(N) + \frac{D(N)}{2N} .$$

On a $D(2x) = \varphi(x) + D(x)$, d'où

$$\int_0^{2x} D(t)\, dt = 2 \int_0^x D(2\theta)\, d\theta = 2 \int_0^x D(t)\, dt + 2 \int_0^x \varphi(t)\, dt .$$

Mais $\int_0^x \varphi(t)\, dt = \int_0^{[x]} \varphi(t)\, dt + \int_{[x]}^x \varphi(t)\, dt = \frac{x}{4} + \varepsilon(x)$, avec $|\varepsilon(x)| \leqslant \frac{1}{2^5}$, d'où

$$m(2x) = m(x) + \frac{1}{4} + \frac{\varepsilon(x)}{x} .$$

Si $x \in [2^{n-1} , 2^n]$, alors

$$m(x) = m\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4} + \frac{\theta_0}{2^{n+3}} ,$$

$$\cdots \qquad \text{avec } |\theta_i| \leqslant 1 .$$

$$m\left(\frac{x}{2^n}\right) = m\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{4} + \frac{\theta_n}{2^3} ,$$

Comme $\frac{x}{2^{n+1}}$ tombe dans $[1/4\ ,\ 1/2[$, on a

$$m(\frac{x}{2^{n+1}}) = \frac{x}{2^{n+2}} \leq 1/4 \ ;$$

par ailleurs, $n - 1 = [\frac{\log x}{\log 2}]$, une sommation sur les égalités précédentes donne

$$m(x) = \frac{\log x}{4 \log 2} + O(1) \ .$$

TABLE NUMERIQUE

Table donnant, pour les premières valeurs de N , les discrépances D et D^* , la fonction D' , les arcs où l'écart est maximum, et a_n .

a_i	N	D(N)	D'(N)	mesures des arcs
	0	0	1	
a_1	1	1	0	0
	2	1	1/2	0 1/2
a_2	3	3/2	- 1/2	1/2
	4	1	3/4	0 1/4 1/2 3/4
a_3	5	7/4	- 1/4	1/4
	6	3/2	1/4	1/4 3/4
	7	7/4	- 3/4	3/4
	8	1	7/8	0 1/8 ... 7/8
	9	15/8	- 1/8	1/8
	10	7/4	3/8	1/8 5/8
a_4	11	17/8	- 5/8	5/8
	12	3/2	5/8	1/8 3/8 5/8 7/8
	13	17/8	- 3/8	3/8
	14	7/4	1/8	3/8 7/8
	15	15/8	- 7/8	7/8
	16	1	15/16	0 1/16 ... 15/16

BIBLIOGRAPHIE

[1] BÉJIAN (R.). - Sur certaines suites présentant une faible discrépance à l'origine, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 286, 1978, Série A, p. 135-138.

[2] FAURE (H.). - Discrépance de suites associées à un système de numération, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 286, 1978, Série A, p. 293-296.

[3] HABER (S.). - On a sequence of points of interest for numerical quadrature, J. Res. Nat. Bur. Stand., Sect. B, t. 70, 1966, p. 127-136.

[4] HLAWKA (E.). - Funktionen von beschränkter Variation in der Theorie der Gleichverteilung, Annali di Mat., Serie 4, t. 54, 1961, p. 325-333.

[5] KOKSMA (J. F.). - Een algemeene stelling uit de Theorie der gelykmatige verdeeling modulo 1, Mathematica, Zutphen, t. B-11, 1942, p. 7-11.

[6] KUIPERS (L.) and NIEDERREITER (H.). - Uniform distribution of sequences. - J. Wiley and Sons, 1974 (Pure and applied Mathematics, Wiley-Interscience).

[7] TIJDEMAN (R.). - Travail non publié [cité dans KUIPERS (L.) and NIEDERREITTER (H.). - Uniform distribution of sequences. - New York, Wiley and Sons, 1974 ; p. 129].

[8] VAN DER CORPUT (J. G.). - Verteilungfunktionen, Koninkl. nederl. Wet., Proc., t. 38, 1935, p. 813-821, p. 1058-1066 ; t. 39, 1936, p. 10-19, p. 19-26, p. 149-153, p. 339-344, p. 489-494, p. 579-590.

(Texte reçu le 29 mai 1978)

Robert BEJIAN et Henri FAURE
Laboratoire de Mathématiques
associé au C. N. R. S.
Université de Provence
Place Vistor Hugo
13331 MARSEILLE CEDEX 3