Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

GÉRARD RAUZY

Une généralisation du développement en fraction continue

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 18, nº 1 (1976-1977), exp. nº 15, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1976-1977__18_1_A12_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
18e année, 1976/77, n° 15, 16 p.

7 février 1977

UNE GÉNÉRALISATION DU DÉVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE

par Gérard RAUZY

1. Introduction.

Désignons par R l'ensemble $\{1 , 2 , 3 , 4\}$, et soit π^* l'application de $R^{\underset{\sim}{N}}$ dans $R^{\underset{\sim}{N}}$ qui à la suite $v = v_0\ v_1\ v_2 \ldots v_n \ldots$ associe la suite formée de "blocs" :

$$\pi^*(v) = B_0\ B_1\ B_2 \ldots B_n \ldots ,$$

où B_i désigne

le bloc 142 si $v_i = 1$,
le bloc 1422 si $v_i = 2$,
le bloc 143342 si $v_i = 3$,
le bloc 14342 si $v_i = 4$.

Ainsi, si $v = 1\ 2\ 3\ 4 \ldots$, $\pi^*(v) = \underbrace{142}\,\underbrace{1422}\,\underbrace{143342}\,\underbrace{14342} \ldots$

La transformation π^* , évidemment contractante pour la métrique naturelle sur $R^{\underset{\sim}{N}}$, admet un unique point fixe u , dont le début s'écrit

$$u = \underbrace{\underbrace{142}_{1}\,\underbrace{14342}_{4}\,\underbrace{1422}_{2}}_{1}\,\underbrace{\underbrace{142}_{1}\,\underbrace{14342}_{4}\,\underbrace{143342}_{3}\ldots}_{4\ldots}$$

Nous nous proposons ici "d'interpréter" la suite $u = (u_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ de la manière suivante : Soit X un espace, T une application de X dans X , $(X_i)_{i\in R}$ une partition de X en quatre sous-ensembles, a un élément de X ; désignons par ν la fonction de X dans R qui à l'élément x de X associe l'élément $\nu(x) = i$ de R si x appartient au sous-ensemble X_i ; nous cherchons alors à déterminer des données (X , T , a , ν) de manière que

$$\forall\ n \in \underset{\sim}{N} , \qquad u_n = \nu(T^n\ a) .$$

2. Une interprétation canonique.

21. - Dans l'espace $R^{\underset{\sim}{N}}$ muni de la métrique naturelle (associée à la topologie produit de la topologie discrète sur R), soit T le "shift" qui à la suite $v = (v_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ associe la suite $Tv = (v_{n+1})_{n\in\underset{\sim}{N}}$, et soit X la clôture de l'orbite de u par T , c'est-à-dire l'ensemble

$$X = \overline{\bigcup_{n\in\underset{\sim}{N}} \{T^n\ u\}} .$$

L'image de X par T est évidemment contenue dans X , ce qui permet de définir par restriction une application de X dans X que nous continuerons d'appeler T .

A titre d'exercice, le lecteur pourra montrer que cette application est surjective, et que w étant donné dans X, l'équation $Tv = w$ a une solution, et une seule, v dans X, sauf pour trois valeurs de w où il y a deux solutions exactement.

Désignons pour $i \in R$ par X_i l'ensemble des éléments de X dont le premier terme est i. $(X_i)_{i\in R}$ est une partition de X, et ν ayant la signification donnée dans l'introduction, on a évidemment

$$\forall\, n \in \underset{\sim}{N}, \qquad u_n = \nu(T^n u) .$$

22. - "L'interprétation" précédente est bien entendu valable quelle que soit la suite u choisie au départ. Pour tenir compte du caractère particulier de la suite u considérée, remarquons tout d'abord que, si un élément v de X est dans X_1, quatre éventualités sont possibles qui s'excluent mutuellement :

v peut, en effet, commencer

par 1421...
ou par 14221...
ou par 1433421...
ou par 143421... .

Nous désignons par y_1, y_2, y_3, y_4 les quatre ensembles correspondants : $(y_i)_{i\in R}$ forme donc une partition de l'ensemble X_1 à laquelle nous attachons une nouvelle fonction μ de X_1 dans R, définie par

$$\mu(x) = i \quad \text{si} \quad x \in y_i .$$

Par ailleurs, si v est un élément quelconque de X, il existe un entier $n > 0$ (**inférieur** ou égal à 6) tel que $T^n v \in X_1$.

Nous désignons alors par $\tau(v)$ la quantité $\inf\{n > 0 \,,\; T^n v \in X_1\}$, ce qui permet de définir la transformation S de X_1 dans X_1 (transformation induite par T sur X_1) en posant, pour tout élément v de X_1,

$$S(v) = T^{\tau(v)}(v) .$$

On peut alors traduire la définition de u par "l'interprétation" suivante :

$$\forall\, n \in \underset{\sim}{N}, \qquad u_n = \mu(S^n u) .$$

C'est de cette situation formelle que nous allons partir pour donner de u une interprétation au moyen d'un quadruplet (X, T, a, ν) qui ne soit pas aussi manifestement "ad hoc" que dans l'interprétation précédente.

3. Quelques propriétés de la suite u.

31. - Nous donnons ici quelques propriétés de répartition de la suite u, qui vont se traduire dans l'interprétation précédente en termes de propriétés du "flot" (X, T). Il est commode d'introduire l'ensemble $M(R)$ des mots sur l'alphabet R (c'est-à-dire le monoïde associatif libre engendré par R). La longueur est la fonction L de $M(R)$ dans $\underset{\sim}{N}$ qui à un mot V associe l'entier $L(V)$ défini par

récurrence :

(i) $L(\emptyset) = 0$,

(ii) $L(xV) = L(Vx) = L(V) + 1$ pour toute lettre x de R .

On désignera par F l'ensemble des éléments V de $M(R)$ qui "figurent" dans u , c'est-à-dire tels qu'il existe un couple d'entiers (m , n) , $0 \leqslant m \leqslant n$, vérifiant

$$V = u_m \, u_{m+1} \, \dots \, u_n$$

(Remarque : par définition même le mot vide n'appartient pas à F) .

Il est alors aisé de montrer le lemme suivant.

LEMME 31. - Un élément v de $\underset{\sim}{R}^{\underset{\sim}{N}}$ appartient à X , si, et seulement si, tout mot V figurant dans v appartient à F .

32. - Sur $M(R)$ on définit, par récurrence, une transformation π en posant :

(i) $\pi(\emptyset) = \emptyset$ ($\emptyset$ est le mot vide) ;

(ii) $\pi(1) = 142$,

$\pi(2) = 1422$,

$\pi(3) = 143342$,

$\pi(4) = 14342$;

(iii) Si $V = Wx$ (respectivement xW) où x appartient à R , alors $\pi(V) = \pi(W)\,\pi(x)$ (respectivement $\pi(x)\,\pi(W)$).

Ainsi, $\pi^2(1) = 142143421422$, et plus généralement $\pi^n(1)$ est le "début" de la suite u . On vérifiera que les trois points exceptionnels dont il est fait mention dans le paragraphe 21 débutent respectivement par

$$2\ \pi(2)\ \pi^2(2)\ \dots\ \pi^n(2) \ ,$$

$$3421\ \pi(3421)\ \pi^2(3421)\ \dots\ \pi^n(3421) \quad \text{et} \quad 421\ \pi(421)\ \pi^2(421)\ \dots\ \pi^n(421) \ .$$

On montrera également le lemme suivant :

LEMME 32. - Si V appartient à F , il existe une suite finie $x_1 , \dots , x_s$ d'éléments de R et une suite finie $n_1 , \dots , n_s$ d'éléments de $\underset{\sim}{N}$ tels que :

(i) $V = \pi^{n_1}(x_1)\ \pi^{n_2}(x_2)\ \dots\ \pi^{n_s}(x_s)$,

(ii) $\forall\, n \in \underset{\sim}{N}$, $\operatorname{card}\{k \ ; \ n_k = n\} \leqslant 10$

(on note $\pi^0(x) = x$).

Le nombre 10 correspond par exemple, à $V = 4334214334$.

33. - Soit i un élément de R , $V = x_1 \dots x_s$ ($x_k \in R$ pour $k = 1 , \dots , s$) un élément non vide de $M(R)$. Nous nous intéressons à l'évaluation de la quantité

$$r_i(V) = \operatorname{card}\{k \ ; \ x_k = i\}$$

(c'est-à-dire le nombre de fois où la lettre i figure dans le mot V).

Evidemment, $L(V) = \sum_{i \in R} r_i(V)$.

D'autre part, $\pi(V) = \pi(x_1) \dots \pi(x_s)$. Désignant par $r(V)$, le vecteur colonne

$$\begin{pmatrix} r_1(V) \\ r_2(V) \\ r_3(V) \\ r_4(V) \end{pmatrix}$$

on en déduit alors l'égalité matricielle $r(\pi(V)) = A\, r(V)$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Compte tenu du lemme 32, nous sommes donc amenés à nous intéresser aux expressions du type $r(\pi^n(x)) = A^n r(x)$, où $x \in \underset{\sim}{R}$. Des calculs directs permettent alors de montrer le résultat suivant.

THÉORÈME 33.

(i) Le polynôme caractéristique de A est un polynôme réciproque

$$\text{dét}(A - xI) = x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 7x + 1 ,$$

qui admet pour racines les nombres $1/\theta$, $1/\theta'$, θ' , θ vérifiant l'inégalité

$$0 < 1/\theta < 1/\theta' < 1 < \theta' < \theta ;$$

(ii) L'unique vecteur propre ξ de A , correspondant à la valeur propre θ , vérifie les inégalités

$$\forall\ i \in R , \qquad \xi_i > 0$$

(ce qui permet de normaliser, en supposant $\sum_{i \in R} \xi_i = 1$) ;

(iii) Si η est un vecteur non nul à coordonnées supérieures ou égales à 0, il existe des nombres réels strictement positifs c_1 , c_2 , c_3 tels que

$$\forall\ n \in \underset{\sim}{N} , \qquad c_1\, \theta^n \leqslant \|A^n\, \eta\|_1 \leqslant c_2\, \theta^n ,$$

$$\|A^n\, \eta - \|A^n\, \eta\|_1\, \xi\|_1 \leqslant c_3\, \|A^n\, \eta\|_1^{\rho} ,$$

où pour le vecteur colonne $\eta = (\eta_i)_{i \in R}$, on pose $\|\eta\|_1 = \sum_{i \in R} |\eta_i|$ ($= \sum_{i \in R} \eta_i$ si les coordonnées de η sont supérieures ou égales à 0), et où ρ désigne la quantité

$$\rho = \frac{\log \theta'}{\log \theta} \text{ vérifiant donc } 0 < \rho < 1 .$$

34. - Du lemme 32 et du théorème précédent, on déduit alors le théorème suivant.

THÉORÈME 34. - Il existe un nombre réel $c > 0$, tel que

$$\forall\, V \in F\ ,\quad \forall\, i \in R\ ,\qquad |r_i(V) - \xi_i\, L(V)| < c\, L(V)^{\rho}\ .$$

Démonstration. - Nous appliquons la partie (iii) du théorème 33 pour avoir des constantes c_1, c_2, c_3 valables pour les vecteurs $\eta = r(x)$, où $x \in R$.

Soit maintenant V un élément de F, et $V = \pi^{n_1}(x_1) \ldots \pi^{n_s}(x_s)$ une décomposition satisfaisant aux conditions du lemme 32, et soit $n = \max\{n_k\ ;\ k = 1,\ldots,s\}$.

On a, pour tout élément i de R,

$$r_i(V) = \sum_{k=1}^{s} r_i(\pi^{n_k}(x_k))$$

et

$$|r_i(\pi^{n_k}(x_k)) - \xi_i\, L(\pi^{n_k}(x_k)) \leqslant c_3\, L(\pi^{n_k}(x_k))^{\rho} \leqslant c_3\, c_2^{\rho}\, \theta^{\rho n_k}\ .$$

Compte tenu de $L(V) = \sum_{k=1}^{s} L(\pi^{n_k}(x_k))$, il vient

$$|r_i(V) - \xi_i\, L(V) \leqslant c_3\, c_2^{\rho} \sum_{k=1}^{s} \theta^{\rho n_k}\ .$$

Par ailleurs, on a évidemment, pour tout $k = 1\ ,\ \ldots\ ,\ s$, $L(V) \geqslant \pi^{n_k}(x_k)$, d'où $L(V) \geqslant c_1\, \theta^n$. Enfin,

$$\sum_{k=1}^{s} \theta^{\rho n_k} \leqslant 10 \sum_{j=0}^{n} \theta^{\rho j} \leqslant \frac{10}{\theta^{\rho} - 1}\, \theta^{\rho n}\ ,$$

d'où le résultat.

35. - Le théorème précédent permet alors de montrer, compte tenu du lemme 31, que quel que soit l'élément $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X, on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\, \mathrm{card}\{n < N\ ;\ v_n = i\} = \xi_i\ ,$$

cette limite étant d'ailleurs uniforme en v. En d'autres termes, la suite u est uniformément répartie (well-distributed) dans R pour la mesure de probabilité $(\xi_i)_{i \in R}$. Une analyse plus poussée, mais tout à fait analogue, permet même de montrer la complète répartition, ce qui peut encore s'énoncer sous la forme suivante, compte tenu du fait que le flot $(X\ ,\ T)$ est minimal.

THÉORÈME 35. - Le flot $(X\ ,\ T)$ est strictement ergodique.

Remarque 1. - Si m désigne l'unique mesure de probabilité invariante par T définie par le théorème 35, on a, avec les notations du paragraphe 2,

$$\forall\, i \in R\ ,\qquad m(X_i) = \xi_i\ ;$$

on vérifie sans peine qu'on a également

$$\forall\, i \in R\ ,\qquad m(y_i) = \xi_i\, m(X_1)\ .$$

Remarque 2. - Utilisant le résultat précédent, et une modification de l'exercice proposé dans le paragraphe 21, on peut aisément montrer que tout élément v de X

est déterministe [1] ; en outre, quel que soit l'entier $s \geqslant 1$, la suite de terme général $\frac{1}{N}\sum_{n<N}|v_n - v_{n+s}|$ a une limite qui est bornée inférieurement par une quantité strictement positive (indépendante de s). Il résulte d'une remarque faite dans [5] qu'aucun élément v de X n'est presque périodique au sens de BESICOVITCH.

2. Une interprétation de u au moyen d'un échange d'intervalles.

Dans ce paragraphe, X , T , X_i , S , Y_i n'auront pas la même signification que dans les paragraphes précédents.

41. - Soit, en effet, $\alpha = (\alpha_i)_{i\in R}$ le vecteur colonne défini par $\alpha_1 = 0$ et, pour $i > 1$, $\alpha_i = \sum_{j<i} \xi_j$ (ξ ayant la signification du paragraphe précédent), et soit $X = [0\ ,\ 1[$, $X_i = [\alpha_i\ ,\ \alpha_{i+1}[$ si $i < 4$ et $X_4 = [\alpha_4\ ,\ 1[$.

Soit, d'autre part, σ la permutation de R définie par $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 4$, $\sigma(3) = 3$, $\sigma(4) = 1$. T désignera alors la transformation "échange" d'intervalles [2] qui consiste à "découper" X en les intervalles X_i , et à les "replacer" dans l'ordre $(X_{\sigma(1)}\ ,\ X_{\sigma(2)}\ ,\ X_{\sigma(3)}\ ,\ X_{\sigma(4)})$ (attention : les notations diffèrent légèrement de celles utilisées dans [2]).

De manière précise, si $i \in R$ et si $x \in X_i$, T associe à x l'élément $T(x)$ de X vérifiant $T(x) = x + a_i$, où le vecteur colonne a de coordonnées a_i est donné par l'équation matricielle :

$$a = M\xi \quad \text{où} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $x \in X$, désignons comme précédemment par $\nu(x)$ l'élément i de R vérifiant $x \in X_i$. Notre but est alors de montrer le résultat suivant.

THÉORÈME 41. - $\forall\, n \in \underset{\sim}{N}$, $u_n = \nu(T^n\, 0)$.

Démonstration.

42. - Comme précédemment, nous allons tout d'abord définir la transformation S induite par T sur l'intervalle X_1 . Remarquons que T conservant la mesure de Lebesgue sur $[0\ ,\ 1[$, la transformation S est définie en presque tout point de X_1 (théorème de récurrence de Poincaré). Nous allons voir qu'en fait cette transformation est définie partout.

ξ , étant vecteur propre de A , vérifie la relation $\xi = A(\frac{1}{\theta}\,\xi)$. Partons plus généralement d'un échange d'intervalles X_1 , X_2 , X_3 , X_4 de longueurs $\xi_1,\ldots,\xi_4$ avec la même permutation σ , mais où on suppose seulement que le vecteur ξ vérifie la relation

(42-1) $$\xi = A\eta\ ,$$

où les coordonnées $\eta_1 , \ldots , \eta_4$ du vecteur colonne η sont strictement positives. Les points $\alpha_1 , \ldots , \alpha_4$, précédemment définis, vérifient donc les équations

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 0 , \\ \alpha_2 &= \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 , \\ \alpha_3 &= 2\eta_1 + 3\eta_2 + 2\eta_3 + 2\eta_4 , \\ \alpha_4 &= 2\eta_1 + 3\eta_2 + 3\eta_3 + 2\eta_4 .\end{aligned}$$

Dénotons par $\beta_1 , \ldots , \beta_4$ la subdivision de X_1 par les points

$$\beta_1 = \alpha_1 = 0 , \quad \beta_2 = \eta_1 , \quad \beta_3 = \eta_1 + \eta_2 , \quad \beta_4 = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 ,$$

et cherchons quel est le temps de retour de β_1 par exemple dans X_1 .

Comme $\beta_1 \in X_1$,

$$T\beta_1 = \beta_1 + a_1 = 2\eta_1 + 3\eta_2 + 4\eta_3 + 3\eta_4 > \alpha_4 .$$

On a donc $T\beta_1 \in X_4$, d'où

$$T^2 \beta_1 = T\beta_1 + a_4 = \eta_1 + 2\eta_2 + 2\eta_3 + 2\eta_4 .$$

On a donc $T^2 \beta_1 \in X_2$, d'où

$$T^3 \beta_1 = T^2 \beta_1 + a_2 = \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 ,$$

et par conséquent $T^3 \beta_1$ appartient à X_1 , d'où $S\beta_1 = T^3 \beta_1$.

Procédant de la même manière pour $\beta_2 , \beta_3 , \beta_4$ (il est conseillé de faire un dessin en prenant par exemple $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4$), on en déduit finalement que, si on désigne par Y_1 , Y_2 , Y_3 , Y_4 les intervalles $[\beta_1 , \beta_2[, [\beta_2 , \beta_3[, [\beta_3 , \beta_4[, [\beta_4 , \alpha_2[$:

$$\begin{aligned}&TY_1 \subset X_4 , \quad T^2 Y_1 \subset X_2 , \quad T^3 Y_1 \subset X_1 , \\ &TY_2 \subset X_4 , \quad T^2 Y_2 \subset X_2 , \quad T^3 Y_2 \subset X_2 , \quad T^4 Y_2 \subset X_1 , \\ &TY_3 \subset X_4 , \quad T^2 Y_3 \subset X_3 , \quad T^3 Y_3 \subset X_3 , \quad T^4 Y_3 \subset X_4 , \quad T^5 Y_3 \subset X_2 , \quad T^6 Y_3 \subset X_1 , \\ &TY_4 \subset X_4 , \quad T^2 Y_4 \subset X_3 , \quad T^3 Y_4 \subset X_4 , \quad T^4 Y_4 \subset X_2 , \quad T^5 Y_4 \subset X_1 .\end{aligned}$$

En outre, les 18 intervalles ainsi obtenus forment une partition de X , et les intervalles $T^3 Y_1 , T^4 Y_2 , T^6 Y_3 , T^5 Y_4$ se succèdent sur X_1 dans l'ordre suivant : $T^4 Y_2 , T^5 Y_4 , T^6 Y_3 , T^3 Y_1$.

Il en résulte que la transformation S sur X_1 est encore un échange d'intervalles qui consiste à remettre les intervalles $Y_1 , \ldots , Y_4$ dans l'ordre $Y_{\sigma(1)} , \ldots , Y_{\sigma(4)}$, la permutation étant la même que pour T .

Si b est le vecteur colonne défini par l'équation matricielle

$$b = M\eta \tag{42-2}$$

on a donc, si $x \in X_i$, $S(x) = x + b_i$.

Par ailleurs, soit μ la fonction de X_1 dans R , définie de manière analogue à la fonction ν de X dans R , c'est-à-dire $\mu(x) = i$ si $x \in Y_i$. Il résulte de ce qui précède que

$$\begin{cases} \mu(x) = 1 \Longrightarrow T^3\, x = Sx \quad \text{et} \quad \nu(x) = 1\ ,\quad \nu(Tx) = 4\ ,\quad \nu(T^2\, x) = 2\ ; \\ \ldots \\ \ldots \\ \mu(x) = 4 \Longrightarrow T^5\, x = Sx \quad \text{et} \quad \nu(x) = 1\ ,\quad \nu(Tx) = 4\ ,\quad \nu(T^2\, x) = 3\ , \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \nu(T^3\, x) = 4\ ,\quad \nu(T^4\, x) = 2\ . \end{cases}$$

En particulier, si $\mu(x) = 1$, $S(x) = x + a_1 + a_4 + a_2$.

Procédant de la même manière pour les autres coordonnées, on obtient l'équation matricielle :

(42-3) $\qquad b = {}^tAa$, où ${}^tA$ est la transposée de A .

Tenant compte des égalités (41), (42-1), (42-2) et (42-3), il vient finalement

(42-4) $$M\eta = {}^tAMA\eta\ ,$$

et cette relation étant valable pour tout vecteur η à coordonnées strictement positives,

(42-5) $$M = {}^tAMA\ .$$

Remarque. - On voit aisément que $\text{dét}(M) = 1$. La relation précédente permet de retrouver le fait que le polynôme caractéristique de A est réciproque, on a en effet :

$$\text{dét}(A - xI) = \text{dét}({}^tA - xI) = \text{dét}(MA^{-1}\, M^{-1} - xI) = \text{dét}(A^{-1} - xI)\ ,$$

d'où $\text{dét}(A) = \text{dét}(A^{-1}) = 1$ et $\text{dét}(A - xI) = \text{dét}(I - xA)$.

43. - Soit x un élément de X_1 . D'après ce qu'on a vu, la connaissance de $\mu(x)$ entraîne celle de $\nu(T^n\, x)$ pour tout $n \leqslant \tau(x)$, où $\tau(x)$ est le "temps de retour" dans X_1 .

On montre alors aisément, par récurrence, que la suite $(\nu(T^n\, x))_{n\in\underset{\sim}{N}}$ s'obtient à partir de la suite $(\mu(T^n\, x))_{n\in\underset{\sim}{N}}$ par la transformation π^* définie dans l'introduction, c'est-à-dire que l'on a

(43-1) $$(\nu(T^n\, x))_{n\in\underset{\sim}{N}} = \pi^*(\mu(T^n\, x))_{n\in\underset{\sim}{N}}\ .$$

Revenons maintenant à la transformation T définie dans le paragraphe 41 : ξ est alors proportionnel à η (ce qui implique en particulier $\xi_1 = 1/\theta$), et la transformation S est alors conjuguée de T par l'homothétie de rapport θ .

On a donc

$$\forall\, x \in X\ ,\qquad T(x) = \theta S(\tfrac{x}{\theta}) \quad \text{et} \quad \nu(x) = \mu(\tfrac{x}{\theta})\ .$$

On en déduit :

(43-2) $$(\nu(T^n x))_{n\in \underset{\sim}{N}} = (\mu(S^n(\tfrac{x}{\theta})))_{n\in \underset{\sim}{N}} .$$

Comparant (43-1) et (43-2) pour $x = 0$, on en déduit que $(\nu(T^n 0))_{n\in \underset{\sim}{N}}$ est un point fixe pour π^*, donc égal à u, ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque. - On peut définir, comme dans [2], une application de $[0 , 1[$ dans l'espace X considéré dans les paragraphes 2 et 3. Le théorème 35 implique alors que l'échange d'intervalle T considéré est strictement ergodique.

5. Généralisation.

51. - Nous venons de voir que, par transformation induite, on peut attacher à certains échanges d'intervalles d'autres échanges d'intervalles. C'est ce résultat que nous nous proposons maintenant de généraliser en faisant ressortir le lien qui existe entre cette question et celle du développement d'un nombre en fraction continue.

Soit donc s un entier supérieur ou égal à 2, $\xi = (\xi_i)_{i=1,\dots,s}$ un vecteur colonne dont les coordonnées ξ_i sont strictement positives, σ une permutation de l'ensemble $\{1 , \dots , s\}$. Au triplet (s , ξ , σ) nous associons un échange d'intervalle T défini sur $X = [0 , \sum_{i=1}^{s} \xi_i[$ (nous ne supposerons pas $\sum_{i=1}^{s} \xi_i = 1$ à priori) de la manière suivante : Définissons $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \xi_1$, ..., $\alpha_s = \xi_1 + \dots + \xi_{s-1}$, et soit $(X_1 , \dots , X_s)$ la partition de X en intervalles $X_1 = [\alpha_1 , \alpha_2[$, $X_2 = [\alpha_2 , \alpha_3[$, ..., $X_s = [\alpha_s , \sum_{i=1}^{s} \xi_i[$.

La transformation T consiste alors à "réarranger" les intervalles $(X_1,\dots,X_s)$ dans l'ordre $(X_{\sigma(1)} , X_{\sigma(2)} , \dots , X_{\sigma(s)})$, et on a donc

$$\forall\ i = 1 , \dots , s , \qquad x \in X_i \Longrightarrow T(x) = x + a_i ,$$

où le vecteur colonne $a = (a_i)_{i=1,\dots,s}$ est donné en fonction de ξ par l'équation matricielle

(51) $$a = M\xi .$$

La matrice $M = (m_{ij})$ ne dépend que de la permutation σ, et est antisymétrique. En fait, il est aisé de vérifier que

$$\begin{cases} \text{si } \ i = 1 , \dots , s , & m_{ii} = 0 ; \\ \text{si } \ 1 \leqslant i < j \leqslant s , & m_{ij} = -m_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ \sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(j) , \\ 0 & \text{si } \ \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j) . \end{cases} \end{cases}$$

52. - THÉORÈME. - Le déterminant de M est égal soit à 0 soit à 1.

On sait, en effet, que, par un changement convenable de coordonnées sur l'espace $\underset{\sim}{R}^s$, la forme bilinéaire alternée $\sum_{i,j} m_{ij}\, x_i\, y_j$ peut se mettre sous la forme :

$$\sum_{k=1}^{t} (u_k\, v_{k+t} - u_{k+t}\, v_k) ,$$

ce qui implique d'une part, que $\text{dét}(M)$ est toujours égal à 0 si s est impair, et d'autre part, que dans tous les cas $\text{dét}(M)$ est le carré d'un nombre rationnel (la réduction pouvant se faire dans $\underset{\sim}{Q}^s$), donc le carré d'un entier puisque M est à coefficients entiers.

Le théorème précédent est plus précis, et affirme que la réduction peut se faire dans $\underset{\sim}{Z}^s$.

Supposons donc $\text{dét}(M) \neq 0$, et soient $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = \xi_{\sigma(1)}$, ... , $\beta_s = \xi_{\sigma(1)} + \dots + \xi_{\sigma(s-1)}$ les extrémités des intervalles $(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(s)})$ après le réarrangement par T .

Définissons de même

$$\alpha_{s+1} = \beta_{s+1} = \sum_{i=1}^{s} \xi_i = \sum_{i=1}^{s} \xi_{\sigma(i)} ,$$

et soient p et q les applications suivantes :

$p : \{1, \dots, s\} \longrightarrow \{1, \dots, s\}$ qui à i fait correspondre j de telle manière que $\beta_j = T(\alpha_i)$ (c'est-à-dire $p = \sigma^{-1}$),

$q : \{2, \dots, s+1\} \longrightarrow \{2, \dots, s+1\}$ qui à j fait correspondre k de telle manière que $\lim_{x \to \alpha_k - 0} T(x) = \beta_j$.

On a donc,

si $i \in \{1, \dots, s\}$, $\beta_{p(i)} = \alpha_i + a_i$,

et

si $j \in \{2, \dots, s+1\}$, $\beta_j = \alpha_{q(j)} + a_{q(j)-1}$.

Appelons alors <u>chaîne</u> toute suite $(i_1, \dots, i_t)$ telle que

$$p(i_1) = i_2 , \quad q(i_2) = i_3 , \quad p(i_3) = i_4 , \dots$$

ou au contraire

$$q(i_1) = i_2 , \quad p(i_2) = i_3 , \quad q(i_3) = i_4 , \dots .$$

Il est clair que l'hypothèse $\text{dét}(M) \neq 0$ implique qu'il ne peut y avoir de chaîne périodique de période impaire. (Sinon il existerait une relation du type $a_{i_1} + a_{i_3} + \dots + a_{i_{2r+1}} = a_{i_1 -1} + a_{i_3 -1} + \dots + a_{i_{2r+1}-1}$ qui est non triviale (considérer le plus petit indice du 2e membre) et qui est valable quel que soit ξ à coordonnées strictement positives, donc implique une relation non triviale entre les lignes de la matrice M .)

Par exemple, si $s = 6$ et σ permute $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ en $(6, 2, 5, 4, 3, 1)$, on a la chaîne périodique $p(3) = 5$, $q(5) = 5$, $p(5) = 3$, d'où la relation $a_3 + a_5 = a_2 + a_4$, et le déterminant correspondant est nul.

De manière plus générale, on voit que, sous l'hypothèse $\text{dét}(M) \neq 0$, il existe exactement deux chaînes maximales, toutes deux de longueur impaire :

$$i_1 = 1 , \quad i_2 = p(1) , \quad i_3 = q(i_2) , \quad \dots , \quad i_{2t'+1} = s + 1 ,$$

$$j_1 = s + 1 , \quad j_2 = q(j_1) , \quad \dots \qquad , \quad j_{2t''+1} = 1 ,$$

et l'ensemble $\{i_1 , i_3 , \dots , i_{2t'-1}\} \cup \{j_2 , j_4 , \dots , j_{2t''}\}$ est l'ensemble $\{1 , \dots , s\}$ tout entier.

Les formules $\beta_{i_2} = \alpha_{i_1} + a_{i_1} = \alpha_{i_3} + a_{i_3 - 1}$, ... permettent alors d'exprimer $(\alpha_1 , \dots , \alpha_{s+1})$ comme combinaison linéaire à coefficients entiers des $(a_i)_{i=1,\dots,s}$. Comme $\xi_1 = \alpha_2 - \alpha_1 , \dots , \xi_s = \alpha_{s+1} - \alpha_s$, il en est de même de $(\xi_1 , \dots , \xi_s)$, et la matrice M est donc inversible dans $\underset{\sim}{Z}^s$, ce qui achève la démonstration.

53. - Disons maintenant qu'un triplet (s , σ , ξ) est <u>régulier</u> si la relation

$$T^k \alpha_i = \alpha_j \quad \text{avec} \quad k > 0 , \quad i , j \in \{1 , \dots , s\}$$

implique $k = 1$, $j = 1$, $i = \sigma(1)$. On sait que dans ces conditions, l'échange T associé est minimal, et qu'en particulier l'orbite de tout point est dense dans X [2].

Remarquons d'autre part, que s , σ étant fixés, l'ensemble $\Omega_{(s,\sigma)}$ des ξ tels que (s , σ , ξ) soit régulier est "gros" du point de vue topologique et du point de vue métrique : son complémentaire dans $\underset{\sim}{R}^{+s}$ est union dénombrable de fermés d'intérieur vide, et de mesure de Lebesgue nulle.

Soit maintenant (s , σ , ξ^0) un triplet régulier ; les quantités

$$\varphi_-(x) = \inf\{n \geqslant 0 \ ; \ T_0^{-n} x \in X_1^0\} , \quad \varphi_+(x) = \inf\{n > 0 \ ; \ T_0^n x \in X_1^0\}$$

sont finies à cause de la minimalité pour tout $x \in X^0$.

Posons en particulier, pour $i \in \{1 , \dots , s\}$,

$$\rho(i) = \varphi_-(\alpha_i^0) + \varphi_+(\alpha_i^0) \quad \text{et} \quad \rho = \max_{i=1,\dots,s} \rho(i) .$$

Il existe alors un ouvert ω dans l'ensemble des éléments de $\underset{\sim}{R}^s$ à coordonnées strictement positives, tel que $\xi^0 \in \omega$ et tel que, pour tout $\xi \in \omega$, si T , α_i , ... désignent l'échange associé, et les points correspondants, une inégalité du type

$$T^n \alpha_i < T^m \alpha_j \text{ , où } i , j \in \{1 , \dots , s\} , \quad |n| \text{ et } |m| \leqslant \rho ,$$

est vraie si, et seulement si, l'inégalité correspondante est vraie pour $T_0 , \alpha_i^0 \dots$

En particulier, $\varphi_-(\alpha_i) = \varphi_-(\alpha_i^0)$ et $\varphi_+(\alpha_i) = \varphi_+(\alpha_i^0)$.

Soient alors $\beta_1 = 0 < \beta_2 < \dots < \beta_s$ les points de la forme $T^{-\varphi_-(\alpha_i)}(\alpha_i)$ $(i = 1 , \dots , s)$ rangés dans l'ordre croissant. Il existe une permutation p de $\{1 , \dots , s\}$ qui ne dépend pas du choix de ξ dans ω et telle que

$$\forall \ i \in \{1 , \dots , s\} , \qquad \beta_{p(i)} = T^{-\varphi_-(\alpha_i)}(\alpha_i) ,$$

et évidemment $p(1) = 1$, puisque $\varphi_-(\alpha_1) = 0$.

Désignons par $(Y_1 , \dots , Y_s)$ les intervalles $[\beta_1 , \beta_2[, \dots , [\beta_s , \alpha_2[$ qui forment donc une partition de X_1 . Nous allons montrer qu'il <u>existe une permuta-</u>

tion τ de $\{1 , \dots , s\}$ indépendante du choix de ξ dans ω telle que la transformation induite par T sur X_1 , soit l'échange S des s intervalles $(Y_1 , \dots , Y_s)$ selon la permutation τ .

Compte tenu du fait que, pour tout n tel que $0 < n < \rho(i)$, $T^n(\beta_{p(i)})$ n'appartient pas à X_1 , et que $T^{\rho(i)}(\beta_{p(i)})$ appartient à X_1 , il suffit alors de montrer que

(a) pour tout n tel que $0 \leqslant n \leqslant \rho(i)$, $T^n(Y_{p(i)})$ est un intervalle ne contenant en son intérieur aucun point de la forme α_k $(k = 1 , \dots , s)$,

(b) si $i \neq j$, $T^{\rho(i)}(Y_{p(i)}) \cap T^{\rho(j)}(Y_{p(j)}) = \emptyset$.

En effet, l'extrémité gauche de $Y_{p(i)}$ étant $\beta_{p(i)}$, il résultera de (a) d'une part, que l'extrémité gauche de $T^n(Y_{p(i)})$ sera $T^n(\beta_{p(i)})$ pour tout $n \leqslant \rho(i)$, et donc que, pour $n < \rho(i)$, cet intervalle n'aura aucun point commun avec X_1 , d'autre part, que, pour $n = \rho(i)$, il sera entièrement contenu dans X_1 (sinon α_2 lui appartiendrait). Utilisant alors (b) et le fait que $(Y_j)_{j=1,\dots,s}$ forme une partition de X_1 , il en résulte bien que $(T^{\rho(i)}(Y_{p(i)}))_{i=1,\dots,s}$ forme une partition de X_1 .

(a) se démontre par récurrence. La proposition est vraie évidemment pour $n = 0$. Supposons-la vraie pour n . Alors, évidemment $T^{n+1}(Y_{p(i)})$ est un intervalle. D'autre part, si α_k est intérieur à $T^{n+1}(Y_{p(i)})$,alors, pour tout m tel que $0 \leqslant m \leqslant n + 1$, $T^{-m}\,\alpha_k$ est intérieur à $T^{n+1-m}(Y_{p(i)})$; en particulier, si $0 < m < n + 1$, $T^{-m}\,\alpha_k$ n'appartient pas à X_1 , donc $\varphi_-(\alpha_k) = m + 1$, et $T^{-(n+1)}(\alpha_k) = \beta_{p(k)}$ qui, par définition de $Y_{p(i)}$ ne peut être intérieur à cet intervalle.

(b) résulte évidemment de (a), ce qui achève la démonstration.

54. - Nous allons maintenant préciser la transformation S . Nous désignons par η_i la longueur de l'intervalle Y_i (S est donc l'échange associé au triplet (s , τ , η)), et par N la matrice antisymétrique associée (N ne dépendant que de τ est donc la même pour tout ξ dans ω).

On a donc

$$\forall\, i \in \{1 , \dots , s\} , \quad \forall\, x \in Y_i , \qquad S(x) = x + b_i ,$$

où le vecteur colonne b de coordonnées b_i est donné par l'équation

$$b = N\eta . \tag{54-1}$$

Définissons alors une matrice $A = (a_{ij})$ en posant

$$a_{ij} = \operatorname{card}\{n \ ; \ 0 \leqslant n < \rho(p^{-1}(j)) , \ T^n Y_j \subset X_i\} .$$

Comme pour $x \in Y_j$, $S(x) = T^{\rho(p^{-1}(j))}(x)$, on a évidemment

$$b_j = \sum_{i=1}^{s} a_{ij}\, a_i .$$

Soit encore

$$b = {}^tAa = {}^tAM\xi \ .$$

Remarquons en outre que, par définition de ω , la matrice A est constante sur ω .

Par ailleurs, si ξ appartient à $\omega \cap \Omega_{(s,\sigma)}$, la transformation T est minimale, et en particulier l'ensemble $\bigcup_{n\geqslant 0} T^n(X_1)$ est dense dans X . Or cet ensemble est constitué par la réunion finie des intervalles de la forme

$$T^n \, Y_{p(i)} \ , \quad i = 1 \ , \ \dots \ , \ s \ , \quad 0 \leqslant n < \rho(i) \ .$$

Un argument analogue à celui utilisé dans la démonstration du (b) du paragraphe précédent montre que deux quelconques de ces intervalles sont disjoints. Ils forment donc une partition de X . Comme par ailleurs un tel intervalle $T^n \, Y_j$ a pour longueur η_j , il résulte de la définition de A que

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \, \eta_j \ ,$$

soit encore

(54-3) $$\xi = A\eta \ .$$

55. - Pour tout $i = 1 \ , \ \dots \ , \ s$, $\beta_{p(i)} = T^{-\varphi_-(\alpha_i)}(\alpha_i)$ s'exprime comme forme linéaire à coefficients entiers (indépendants du choix de ξ dans ω) des ξ_i . Comme $\eta_1 = \beta_2 - \beta_1 \ , \ \dots \ , \ \eta_s = \alpha_2 - \beta_s$, il en est de même des η_i . ω étant ouvert, il en résulte que la matrice A est inversible, et que son inverse est à coefficients entiers, et donc que son déterminant est ± 1 .

L'image inverse de l'ensemble $\omega \cap \Omega_{(s,\sigma)}$ par A est alors un ensemble dont le complémentaire dans l'image inverse de ω par A est maigre. Pour tout η dans cette image inverse, on a, en vertu de (54-1), (54-2), (54-3),

$$N\eta = {}^tAMA\eta \ .$$

On en déduit donc l'égalité matricielle :

(55) $$N = {}^tAMA \ .$$

Ce qui montre que les formes bilinéaires associées à M et N sont équivalentes (et donc $\text{dét}\, N = \text{dét}\, M$), le changement de coordonnée s'effectuant par la matrice à coefficients <u>entiers</u> A de déterminant ± 1 . En d'autres termes, ces formes sont équivalentes sur $\underset{\sim}{Z}^s$.

Dans le cas particulier où $M = N$ et où $\text{dét}(M) = 1$ (donc s pair), A est à un changement de base près, un élément du groupe symplectique $S_p(s \ , \ \underset{\sim}{Z})$, et en particulier son déterminant est 1 et son polynôme caractéristique réciproque. Dans le cas général par contre, N n'est pas nécessairement égal à M , et le déterminant de A peut être égal à -1.

56. - Notons $A(T)$, $S(T)$, $\tau(T)$, $N(T)$, $\eta(T)$ les éléments appelés A , S , τ ,

N , η dans les paragraphes précédents, et désignons par $\mathfrak{A}(s, \sigma)$ l'ensemble des matrices $A(T)$ quand T parcourt l'ensemble des échanges associés aux triplets réguliers (s, σ, ξ) .

Soit alors $A \in \mathfrak{A}(s, \sigma)$, et η un vecteur à coordonnées strictement positives tel que le triplet $(s, \sigma, A\eta)$ soit régulier. Si la matrice A correspond à un triplet (s, σ, ξ^0) auxquels sont associées les quantités α_i^0 , β_i^0 , φ_-^0 , φ_+^0 , ρ^0 , p^0 , η_i^0 , tous les nombres de la forme $T_0^n \beta_{p^0(i)}$, $i = 1, \dots, s$, $0 \leqslant n \leqslant \rho^0(i)$, s'expriment comme combinaisons linéaires à coefficients entiers positifs en les η_i^0 . En outre, l'ordre de ces points sur la droite est identique à l'ordre lexicographique sur la suite des coefficients (sauf en ce qui concerne la comparaison de **points** de la forme β_i et $T^{\rho^0(j)} \beta_{p^0(j)}$). Il en résulte que ces mêmes combinaisons, où l'on remplace les η_i^0 par η_i , sont dans le même ordre sur la droite, et donc que, désignant par T la transformation associée au triplet $(s, \sigma, A\eta)$, on a

$$A(T) = A = A(T_0) \quad \text{et} \quad N(T) = N(T_0) .$$

En résumé on a donc le résultat suivant.

THÉORÈME. - <u>Si</u> T <u>est l'échange associé au triplet régulier</u> (s, σ, ξ) , <u>la transformation induite par</u> T <u>sur le premier intervalle est un échange d'intervalle</u> $S(T)$ <u>associé à un triplet (évidemment régulier)</u> $(s, \tau(T), \eta(T))$, <u>et il existe une matrice</u> $A(T)$ <u>à coefficients entiers positifs et unimodulaire telle qu'on ait les relations</u>

$$\xi = A(T)\, \eta(T) , \qquad N(T) = {}^tA(T)\, M(T)\, A(T) ,$$

($M(T)$ <u>et</u> $N(T)$ <u>étant les matrices antisymétriques associées respectivement à</u> T <u>et</u> $S(T)$).

<u>Réciproquement, si</u> T_0 <u>est l'échange associé au triplet régulier</u> (s, σ, ξ^0) , <u>si</u> η <u>est un vecteur à coordonnées strictement positives tel que le triplet</u> $(s, \sigma, A\eta)$ <u>soit régulier, on a, en désignant par</u> T <u>l'échange associé à ce triplet,</u>

$$N(T) = N(T_0) , \qquad A(T) = A(T_0) .$$

57. - De ce qui précède résulte que les ensembles du type

$$\Omega_{(s,\sigma)} \cap \{\xi = A\eta \ ; \ \eta_i > 0 \ \text{ pour } \ i = 1, \dots, s\}$$

forment une partition de $\Omega_{(s,\sigma)}$. Soit alors $x = (x_i)_{i=1,\dots,s}$ un vecteur à coordonnées strictement positives. Intégrant sur $\Omega_{(s,\sigma)}$ (ou, ce qui revient au même, sur $\underset{\sim}{R}^{+s}$) la fonction $\xi \longmapsto \exp(-\sum_{i=1}^{s} x_i\, \xi_i)$, on obtient alors la formule sommatoire

$$(57) \qquad 1/(\prod_{i=1}^{s} x_i) = \sum_{(a_{ij}) \in \mathfrak{A}(s,\sigma)} 1/(\prod_{i=1}^{s} (\sum_{j=1}^{s} a_{ji}\, x_j)) .$$

58. - Partant d'un échange T, associé à un triplet régulier (s, σ, ξ), on peut alors définir une suite d'échanges T_n associés aux triplets réguliers $(s, \sigma^{(n)}, \xi^{(n)})$ en posant

$$T_0 = T, \quad \sigma^{(0)} = \sigma, \quad \xi^{(0)} = \xi$$

et

$$T_{n+1} = S(T_n), \quad \sigma^{(n+1)} = \tau(T_n), \quad \xi^{(n+1)} = \eta(T_n).$$

On a alors évidemment

$$\begin{cases} M(T_n) = {}^t(\prod_{k<n} A(T_k))\, M(T) \prod_{k<n} A(T_k), \\ \xi = \prod_{k<n} A(T_k)\, \xi_n, \end{cases}$$

et T_n est la transformation induite par T sur un intervalle convenable $X_1^{(n)}$ dont l'origine est en 0.

Si la suite (T_n) est périodique, on peut alors refaire une théorie tout à fait analogue à celle faite dans les paragraphes 1, 2, 3 et 4 (l'existence d'une valeur propre positive avec un vecteur propre associé positif étant assurée par le théorème de Perron-Frobenius)

6. Relations avec le développement en fraction continue.

61. - Soit σ la permutation de $\{1, 2\}$ telle $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 1$. Un triplet $(2, \sigma, \xi)$ est régulier si, et seulement si, le rapport ξ_1/ξ_2 est irrationnel.

Soit alors $(2, \sigma, \xi)$ un tel triplet, et T l'échange associé. Soit k l'entier supérieur ou égal à 1 déterminé par la relation

$$\frac{1}{k+1} < \frac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2} < \frac{1}{k}.$$

La transformation induite $S(T)$ par T sur le premier intervalle est encore du type $(2, \sigma, \eta)$, et la matrice $A(T)$ est donnée par

$$A(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k-1 & k \end{pmatrix}$$

Posant $u = \xi_1/(\xi_1 + \xi_2)$, $v = \eta_1/(\eta_1 + \eta_2)$, on voit que u et v sont liés par la relation

$$u = 1/((k+1) - v).$$

L'entier k est donc le premier coefficient apparaissant dans le développement de u en fraction continue du deuxième type, c'est-à-dire

$$u = 1/(k_1 + 1) - 1/(k_2 + 1) - 1/(k_3 + 1) \ldots,$$

et avec les notations du paragraphe 58, on a donc

$$A(T_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k_n - 1 & k_n \end{pmatrix}$$

La transformation $T \longmapsto S(T)$ apparaît ainsi comme une généralisation de la transformation conduisant au développement en fraction continue, les matrices à coefficients entiers $A(T_n)$ remplaçant ici les coefficients du développement ordinaire.

62. - De ce point de vue, les échanges tels que la suite (T_n) soit périodique jouent le même rôle que, dans la théorie classique, les nombres quadratiques. En particulier, l'échange considéré dans le paragraphe 4 apparaît comme l'un des plus simples possibles après les échanges de deux intervalles, et le nombre θ racine du polynôme $x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 7x + 1$ apparaît comme l'un des plus "simples" nombres algébriques après les nombres quadratiques : on peut s'attendre à ce qu'il vérifie des propriétés particulières d'approximations ; en fait, l'étude du temps de retour sur l'intervalle $[0\ ,\ 1/\theta^n[$ permet de donner une suite <u>régulière</u> d'approximations malheureusement assez mauvaise. Ce fait est à rapprocher de résultats obtenus par C. PISOT [4].

63. - Le problème est donc posé de généraliser aux échanges d'intervalles ce qui a pu être fait pour les translations de $\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}$ en utilisant les développements en fraction continue. En particulier, les majorations, données dans le paragraphe 3, sont tout à fait analogues aux résultats concernant par exemple les intervalles à restes bornés [3].

Enfin, la formule sommatoire (57) semble indiquer l'existence pour la transformation $T \longmapsto S(T)$ d'une mesure invariante jouissant de propriétés analogues à celles de la mesure de Gauss.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KAMAE (T.). - Subsequences of normal sequences, Israel J. Math., t. 16, 1973, p. 121-149.

[2] KEANE (M.). - Interval exchange transformations, Math. Z., t. 141, 1975, p. 25-31.

[3] KESTEN (H.). - On a conjecture of Erdös and Szüsz related to uniform distribution mod 1 , Acta Arithm., Warszawa, t. 12, 1966/67, p. 193-212.

[4] PISOT (C.). - Quelques résultats d'approximation diophantienne, "Algèbre et théorie des nombres, [1949. Paris]", p. 57-58. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1950 (Colloques internationaux du CNRS, 24).

[5] RAUZY (G.). - Nombres normaux et processus déterministes, Acta Arithm., Warszawa, t. 29, 1976, p. 211-225.

(Texte reçu le 8 mars 1977)

Gérard RAUZY
Parc du Roy d'Espagne
24 allée E. Chabrier
13008 MARSEILLE