Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Michel Mendès France

Fractions continues et polygones réguliers

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 17, nº 2 (1975-1976), exp. nº 27, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_2_A3_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
17e année, 1975/76, n° 27, 5 p.

17 mai 1976

FRACTIONS CONTINUES ET POLYGONES RÉGULIERS

par Michel MENDÈS FRANCE

1. Introduction

Cet exposé a pour but de préciser le théorème suivant de DAVENPORT [2].

THÉORÈME 0. - Soit ξ un nombre irrationnel, et soit p un nombre premier. L'un au moins des nombres

$$p^2\,\xi\ ,\ \xi\ ,\ \xi+\frac{1}{p}\ ,\ \xi+\frac{2}{p}\ ,\ \ldots\ ,\ \xi+\frac{p-1}{p}$$

admet une infinité de quotients partiels supérieurs ou égaux à $p-1$.

Notre théorème 2 ci-dessous montre qu'on peut ignorer le terme $p^2\,\xi$ en sorte qu'on a l'interprétation géométrique suivante.

Soit P un polygone régulier à p côtés, dessiné dans le plan sur lequel un repère des angles est donné. On prend pour unité d'angle l'angle plan (l'angle total, l'angle qui recouvre le plan). Si l'un des sommets du polygone a un argument irrationnel, alors il existe un sommet dont l'argument possède une infinité de quotients partiels $\geqslant p-1$.

2. Les résultats

Soit ξ un nombre réel, et

$$\xi = c_0(\xi) + \frac{1}{/c_1(\xi)} + \frac{1}{/c_2(\xi)} + \cdots + \frac{1}{/c_n(\xi)} + \cdots$$

son développement en fraction continue. Si ξ est rationnel, le développement se termine au rang s par exemple. Si $s \geqslant 1$, on supposera toujours $c_s(\xi) \geqslant 2$ sauf mention contraire. Le nombre s (profondeur de ξ) est noté $\gamma(\xi)$.

A tout nombre réel ξ, on associe de façon "canonique" la suite finie ou infinie des quotients partiels.

$$c(\xi) = (c_1(\xi)\ ,\ c_2(\xi)\ ,\ \ldots\ ,\ c_n(\xi)\ ,\ \ldots) \in \underset{\sim}{N}^{N} .$$

Soit $k \geqslant 1$ un entier. On pose

$$\Gamma(k\ ,\ \xi) = \{n \geqslant 1\ ;\ c_n(\xi) \geqslant k\} .$$

Le théorème 0 de Davenport affirme que certain $\Gamma(k\ ,\ \xi)$ est infini. On précise ce résultat en étudiant $\mathrm{card}(\Gamma(k\ ,\ \xi))$ et la densité supérieure

$$\delta^*(\Gamma(k\ ,\ \xi)) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\mathrm{card}\{m \leqslant n\ ;\ c_m(\xi) \geqslant k\} .$$

Quand la densité existe, on remplace le symbole δ^* par δ.

THÉORÈME 1. - Soit ξ un nombre rationnel, et soit p un nombre premier. Alors

$$\sum_{a=0}^{p-1} \operatorname{card} \Gamma(p-1, \xi + \frac{a}{p}) \geq \frac{1}{2} \Psi(p\xi) - 1 .$$

COROLLAIRE. - Quels que soient le nombre rationnel ξ et le nombre premier p, il existe un nombre entier $a \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ tel que

$$\operatorname{card} \Gamma(p-1, \xi + \frac{a}{p}) \geq \frac{1}{2p} \Psi(p\xi) - 1 .$$

THÉORÈME 2. - Soit ξ un nombre irrationnel, et soit p un nombre premier. Alors

$$\sum_{a=0}^{p-1} \delta^* \Gamma(p-1, \xi + \frac{a}{p}) \geq \frac{1}{4(1+\alpha \log p)} \quad \text{où} \quad \alpha = (2 \log \frac{1+\sqrt{5}}{2})^{-1} = 1{,}039 \dots$$

La borne inférieure ne peut être remplacée par $(p/\log 2) \log(1 + 1/p - 1)$.

COROLLAIRE. - Quels que soient le nombre irrationnel ξ et le nombre premier p, il existe un entier $a \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ tel que

$$\delta^* \Gamma(p-1, \xi + \frac{a}{p}) \geq \frac{1}{4p(1+\alpha \log p)} .$$

Par ailleurs, pour tout entier $b \in \{0, 1, \dots, p-1\}$,

$$\delta^* \Gamma(p-1, \xi + \frac{b}{p}) \leq \frac{1}{\log 2} \log(1 + \frac{1}{p-1}) < ((p-1) \log 2)^{-1} .$$

3. Démonstration du théorème 1.

Soit $\xi \in \mathbb{Q}$, et soit p un nombre premier. Soient $a_1/q_1, a_2/q_2, \dots, a_s/q_s$ les convergents de $p\xi$. Ainsi $s = \Psi(p\xi)$ et $a_s/q_s = p\xi$, $(a_j, q_j) = 1$ pour $j = 1, 2, \dots, s$. On sait que $|p\xi - (a_j/q_j| < 1/q_j^2$.

Soit $A = \{1 \leq n < \Psi(p\xi) ; p \text{ divise } q_n\}$. Comme $(q_n, q_{n+1}) = 1$,

$$\operatorname{card} A \leq [\frac{\Psi(p\xi)}{2}] .$$

Soit

$$B = \{1, 2, \dots, \Psi(p\xi) - 1\} \setminus A .$$

On a

$$\gamma = \operatorname{card} B \geq \Psi(p\xi) - 1 - [\frac{1}{2} \Psi(p\xi)] .$$

Soit $n \in B$. Alors $(q_n, p) = 1$; il existe donc $b_n \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ tel que $a_n \equiv b_n q_n \pmod p$.

Soit $b \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. On définit

$$B(b) = \{n \in B \mid b_n = b\} .$$

Alors $\sum_{b=0}^{p-1} \text{card } B(b) = \text{card } B$.

A tout $n \in B(b)$, on fait correspondre $r_n \in \underset{\sim}{Z}$ tel que $(r_n , q_n) = 1$ et tel que $a_n = bq_n + pr_n$. Ainsi

$$|\xi - \frac{b}{p} - \frac{r_n}{pq_n^2}| < \frac{1}{pq_n^2} .$$

La fraction r_n/q_n apparaît donc comme un convergent de $\xi - b/p$, le m-ième par exemple. Donc

$$c_m(\xi - \frac{b}{p}) \geq p - 1 .$$

L'application $n \mapsto m$, définie de $B(b)$ dans $\Gamma(p - 1 , \xi - b/p)$, est injective donc

$$\text{card } \Gamma(p - 1 , \xi - b/p) \geq \text{card } B(b) .$$

Par sommation sur b , on obtient

$$\sum_{b=0}^{p-1} \text{card } \Gamma(p - 1 , \xi - b/p) \geq \text{card } B \geq \frac{1}{2} \Psi(p\xi) - 1 .$$

Le théorème 1 est alors établi. Le corollaire est immédiat.

4. Trois lemmes.

La démonstration du théorème 2 repose sur trois lemmes. Donnons tout d'abord une définition. Ainsi qu'on l'a dit au paragraphe 2, à tout $\xi \in \underset{\sim}{R}$, on associe la suite des quotients partiels.

$$c(\xi) = (c_1(\xi) , c_2(\xi) , \ldots) \in \underset{\sim}{N}^{\underset{\sim}{N}} .$$

Dans $\underset{\sim}{N}^{\underset{\sim}{N}}$ on définit la distance d :

$$x = (x_1 , x_2 , \ldots)$$

$$y = (y_1 , y_2 , \ldots)$$

$$d(x , y) = (\sup\{n \in \underset{\sim}{N} ; \ x_1 = y_1 , x_2 = y_2 , \ldots , x_n = y_n\})^{-1}$$

ou $+\infty$ si $x_1 \neq y_1$ (voir [3]).

On vérifie aisément que si a/q est un convergent de ξ , alors

$$d(c(\xi) , c(\frac{a}{q})) = (\Psi(\frac{a}{q}) - \varepsilon)^{-1} , \qquad \varepsilon = 0 , 1 .$$

Ce résultat se généralise sans trop de peine.

LEMME 1. - <u>Soit</u> $u > 0$, <u>et soit</u> $\gamma(u) = 1$ <u>si</u> $u \leq 1$ <u>et</u>

$$\gamma(u) = 4 + [\frac{\log u}{\log 2}] \quad \text{si } u > 1 .$$

<u>Si</u> $\Psi(\frac{a}{q}) > \gamma(u)$, <u>alors</u>

$$|\xi - \frac{a}{q}| < \frac{u}{q^2} \Rightarrow d(c(\xi) , c(\frac{a}{q})) \leq (\Psi(\frac{a}{q}) - \gamma(u))^{-1} .$$

La démonstration est laissée au lecteur (voir toutefois [6]).

LEMME 2. – Soit $k \geq 1$ un entier. Alors

$$\liminf_{\Psi(\xi)\to\infty} \frac{\Psi(k\xi)}{\Psi(\xi)} \geqslant \frac{1}{2(1 + \alpha \log k)} \quad \text{où} \quad \alpha = (2 \log(\frac{1+\sqrt{5}}{2}))^{-1} .$$

La démonstration du lemme se trouve dans [5].

LEMME 3. – Pour presque tout ξ ,

$$\delta\, \Gamma(k , \xi) = \frac{1}{\log 2} \log(1 + \frac{1}{k}) < \frac{1}{k \log 2} .$$

La démonstration est classique, et se trouve par exemple dans [1], page 45.

5. Démonstration du théorème 2.

Soit ξ un nombre irrationnel, et soit $\xi_\nu = A_\nu/Q_\nu$ un convergent de ξ . Pour tout $b \in \mathbb{Z}$,

$$|(\xi + \frac{b}{p}) - (\xi_\nu + \frac{b}{p})| = |\xi - \xi_\nu| \leqslant \frac{1}{Q_\nu^2} = \frac{p^2}{(pQ_\nu)^2} .$$

D'après le lemme 1, les quotients partiels de $\xi + b/p$ et de $\xi_\nu + b/p$ coincident au moins jusqu'à l'ordre $\Psi(\xi_\nu + b/p) - \gamma(p^2)$. D'après le théorème 1,

$$\sum_{a=0}^{p-1} \operatorname{card} \Gamma(p - 1 , \xi_\nu + \frac{a}{p}) \geqslant \frac{1}{2} \Psi(p\xi_\nu) - 1 .$$

On divise les deux membres de l'inégalité par $\Psi(\xi_\nu) = \nu$, et on fait tendre ν vers l'infini. On obtient

$$\sum_{a=0}^{p-1} \delta^* \Gamma(p - 1 , \xi + \frac{a}{p}) \geqslant \frac{1}{2} \liminf_\nu \frac{\Psi(p\xi_\nu)}{\Psi(\xi_\nu)} \geqslant \frac{1}{4(1 + \alpha \log p)} .$$

La seconde partie du théorème découle du lemme 3. Le corollaire est immédiat.

7. Remarque finale.

Notre corollaire du théorème 2 n'est pas sans rappeler un résultat analogue de K. MAHLER [4] relatif au développement décimal. Quel que soit le nombre irrationnel ξ , il existe un entier a , $1 \leq a \leq 10^{21}$ tel que le développement décimal de $a\xi$ contienne une infinité de fois tous les chiffres $0 , 1 , \ldots , 9$. La borne 10^{21} ne peut être remplacée par 10^8 (Le dernier point est trivial : considérer

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} .$$

Le premier multiple de ξ qui contient toutes les décimales une infinité de fois est $a\xi$, où $a = 123456789 > 10^8$). Il va sans dire que le résultat de MAHLER est beaucoup plus difficile que le nôtre.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BILLINGSLEY (P.). - Ergodic theory and information. - New York, J. Wiley and Sons, 1965.

[2] DAVENPORT (H.). - A remark on continued fractions, Michigan math. J., t. 11, 1964, p. 343-344.

[3] ISOBE (K.). - Sur la convergence des fractions continues infinies [en japonais], Mem. Kitami College Techn., t. 4, 1966, p. 109-117.

[4] MAHLER (K.). - Arithmetical properties of the digits of the multiples of an irrational number, Bull. Austral. math. Soc., t. 8, 1973, p. 191-203.

[5] MENDÈS FRANCE (M.). - Sur les fractions continues limitées, Acta Arithm., Warszawa, t. 23, 1973, p. 207-215.

[6] MENDÈS FRANCE (M.). - On a theorem of Davenport concerning continued fraction, Mathematika, t. 23, 1976, p. 136-141.

(Texte reçu le 16 septembre 1976)

Michel MENDÈS FRANCE
Mathématiques
Université de Bordeaux-I
351 cours de la Libération
33405 TALENCE