Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres

Don Zagier

Traces des opérateurs de Hecke

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 17, nº 2 (1975-1976), exp. nº 23, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_2_A1_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
17e année, 1975/76, n° 23, 12 p.

5 avril 1976

TRACES DES OPÉRATEURS DE HECKE

par Don ZAGIER

0. Introduction : énoncé du théorème de trace

Il est aujourd'hui possible de traiter d'une manière élementaire presque toute la théorie des formes modulaires pour $SL_2(\underset{\sim}{Z})$: théorème de dimension, opérateurs de Hecke, existence d'une base de fonctions propres, relation avec les séries de Dirichlet ayant une équation fonctionnelle. Par contre, les textes standards ne contiennent pas la formule de Selberg pour la trace des opérateurs de Hecke, car les démonstrations de ce résultat sortent du cadre de la théorie classique des formes modulaires. La formule de trace a pourtant une grande importance pour les applications; cela provient du fait que la série

$$\sum_{N=1}^{\infty} \mathrm{Tr}(T(N)\,,\, S_k)\ \exp 2\pi i N z$$

(S_k = espace des formes paraboliques de poids k)

est elle-même une forme parabolique, et qu'elle engendre l'espace S_k comme module sur l'algèbre de Hecke. Le but de cet exposé est de donner une démonstration élémentaire de la formule de trace. Cette démonstration utilise en principe les mêmes idées que celles de SELBERG et d'EICHLER (construction d'un "noyau", calcul de la trace comme intégrale), mais les calculs sont beaucoup plus faciles. On peut généraliser la démonstration aux formes modulaires pour $\Gamma_0(n)$, et probablement aux formes modulaires de Hilbert. Les mêmes idées conduisent à la démonstration d'autres identités intéressantes concernant les formes modulaires pour $SL_2(\underset{\sim}{Z})$ et les formes modulaires de "Nebentypus" (voir [2]).

Pour énoncer le théorème de trace, nous avons besoin d'une fonction arithmétique $H(n)$ définie comme suit : pour $n > 0$, $H(n)$ est le nombre de classes d'équivalence (par rapport à $SL_2(\underset{\sim}{Z})$ des formes quadratiques binaires définies positives $ax^2 + bxy + cy^2$ de discriminant $b^2 - 4ac = -n$, les formes équivalentes à un multiple de $x^2 + y^2$ (resp. de $x^2 + xy + y^2$) étant comptées avec la multiplicité $\frac{1}{2}$ (resp. $\frac{1}{3}$) . On pose $H(0) = -\frac{1}{12}$ et $H(n) = 0$ pour $n < 0$. Si $n \equiv 1$ ou 2 (mod 4), alors $H(n) = 0$. On a la table suivante :

n	< 0	0	3	4	7	8	11	12	15	16	19	20	23	24
$H(n)$	0	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1	$\frac{4}{3}$	2	$\frac{3}{2}$	1	2	3	2

Nous définissons aussi un polynôme $p_k(t\,,\,N)$ ($k > 0$ pair) comme le coefficient de x^{k-2} dans le développement en série de puissances de $(1 - tx + Nx^2)^{-1}$, ou encore comme $(\rho^{k-1} - \bar{\rho}^{k-1})/(\rho - \bar{\rho})$, où $\rho + \bar{\rho} = t$, $\rho\bar{\rho} = N$. On a

$$p_2(t\ ,\ N) = 1\ ,\quad p_4(t\ ,\ N) = t^2 - N\ .$$

THEOREME (Formule de trace de Selberg [1]). - Soient $k > 2$ un entier pair, N un entier > 0 . Alors la trace du N-ième opérateur de Hecke sur l'espace des formes paraboliques pour $SL_2(\mathbb{Z})$ de poids k est donnée par

$$\mathrm{Tr}(T(N)\ ,\ S_k) = -\frac{1}{2}\sum_{t=-\infty}^{\infty} p_k(t\ ,\ N)\ H(4N - t^2) - \frac{1}{2}\sum_{dd'=N} \min(d\ ,\ d')^{k-1}\ .$$

(La première somme est en fait finie, $H(4N - t^2)$ étant 0 pour $|t| > 2\sqrt{N}$. La deuxième sommation porte sur les décompositions de N en produit de deux facteurs positifs.)

Exemple. - Pour $k = 4$, il n'y a pas de formes paraboliques non nulles, donc le membre de droite de la formule de trace s'annule, ce qui implique des relations entre les nombres de classes $H(n)$. Par exemple, pour $N = 5$, on trouve

$$\begin{aligned}\Sigma(t^2 - N)\ H(4N - t^2) &= -5H(20) - 8H(19) - 2H(16) + 8H(11) + 22H(4)\\ &= -10 - 8 - 3 + 8 + 11 = -2\ ,\\ \Sigma \min(d\ ,\ d')^3 &= 1^3 + 1^3 = 2\ .\end{aligned}$$

Dans le premier paragraphe, nous donnerons quelques rappels sur les formes modulaires (formes paraboliques, opérateurs de Hecke, produit de Petersson). Dans le paragraphe 2, nous construisons le "noyau" (dans le sens des opérateurs intégraux) de l'application $T(N) : S_k \to S_k$, ce qui permet d'écrire $\mathrm{Tr}(T(N)\ ,\ S_k)$ comme une intégrale. Cette intégrale sera calculée dans le paragraphe 3.

1. Rappels sur les formes modulaires.

On définit sur le demi-plan complexe supérieur $H = \{z = x + iy \in \mathbb{C}\ ;\ y > 0\}$ une operation effective et proprement discontinue du groupe modulaire $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ par

$$(1)\qquad z \to \gamma z = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (z \in H\ ,\ \gamma = \pm\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \Gamma)\ .$$

Une forme modulaire de poids k pour Γ , k étant un entier positif, est une fonction holomorphe $f : H \to \mathbb{C}$ qui satisfait aux équations fonctionnelles

$$(2)\qquad f(\gamma z) = (cz + d)^k f(z) \qquad (z \in H\ ,\ \gamma = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}))$$

et à la majoration $f(z) = O(1)$ pour $y = \mathrm{Im}(z) \to \infty$. En prenant pour γ la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, on voit que $f \neq 0$ entraîne $k \in 2\mathbb{Z}$. En prenant pour γ la matrice

$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, on voit que $f(z+1) = f(z)$; la fonction f possède donc un développement de Fourier

$$(3) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \quad (\text{où } q = \exp 2\pi i z)$$

(les conditions sur f impliquent qu'il n'y a pas de puissances de q négatives). Si $a_0 = 0$, on appelle f une <u>forme parabolique</u> ; cette condition équivaut à $f(z) = O(\exp(-cy))$ $(y \to \infty,\ c > 0)$, ou encore à $f(z) = O(y^{-k/2})$ $(y \to 0)$.

L'espace vectoriel S_k des formes paraboliques de poids k est de dimension finie. on a

k	<12	12	14	16	18	20	22	24	26	28	...
$\dim S_k$	0	1	0	1	1	1	1	2	1	2	

et $\dim S_k = \dim S_{k-12} + 1$ pour $k > 14$.

Si $f : H \to \mathbb{C}$ est une fonction qui satisfait à l'équation (2), alors la fonction

$$(4) \qquad F(z_1, z_2) = z_2^{-k} f(z_1/z_2) \qquad (z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im}(z_1/z_2) > 0)$$

satisfait aux équations

$$(5) \qquad \begin{cases} F(\lambda z_1, \lambda z_2) = \lambda^{-k} F(z_1, z_2) & (\lambda \in \mathbb{C},\ \lambda \neq 0), \\ F(az_1 + bz_2, cz_1 + dz_2) = F(z_1, z_2) & (\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})), \end{cases}$$

c'est-à-dire que $F(z_1, z_2)$ ne dépend que du <u>réseau</u> (orienté) $L = \mathbb{Z}z_1 + \mathbb{Z}z_2 \subset \mathbb{C}$ engendré par z_1 , z_2 , et F est homogène de degré $-k$. Réciproquement, si F satisfait à (5) , alors la fonction $f(z) = F(z, 1)$ satisfait à (2). Il y a donc une bijection $f \leftrightarrow F$ entre les fonctions $f : H \to \mathbb{C}$ satisfaisant à (2) et les fonctions définies sur les sous-réseaux orientés de rang 2 de $\mathbb{C}$ et homogènes de degré $-k$; la fonction f est une forme parabolique si, et seulement si, f est holomorphe et $F(L) = O(\operatorname{vol}(\mathbb{C}/L)^{-k/2})$.

Nous pouvons définir maintenant les opérateurs de Hecke. Soit $f \in S_k$, F la fonction donnée par (4) , $N > 0$ un entier. Nous définissons une fonction $T(N)F$ sur les réseaux $L \subset \mathbb{C}$ par

$$(T(N)F)(L) = N^{k-1} \sum_{[L:L']=N} F(L') ,$$

où la sommation porte sur l'ensemble fini des sous-réseaux $L' \subset L$ d'indice N . Alors $T(N)F$ est aussi une fonction homogène de degré $-k$ sur les sous-réseaux orientés de $\mathbb{C}$ et correspond à une nouvelle fonction $T(N)f$ satisfaisant à (2). En termes de z ,

$$(6) \qquad (T(N)f)(z) = \sum_{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}} (cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) ,$$

où $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ parcourt un système de représentants de l'ensemble des matrices à coefficients entiers de déterminant N pour l'opération de $SL_2(\underset{\sim}{Z})$ par multiplication à gauche. Cette formule implique que $T(N)f$ est holomorphe, et il est clair que $(T(N)F)(L) = O(\mathrm{vol}(\underset{\sim}{C}/L)^{-k/2})$. On a donc même $T(N)f \in S_k$. Nous avons ainsi défini une application linéaire $T(N) : S_k \to S_k$, appelée N-ième <u>opérateur de Hecke</u>.

On démontre pour ces opérateurs les deux formules suivantes :

(7) $$T(M)\ T(N) = \Sigma_{d|(M,N)}\ d^{k-1}\ T(MN/d^2) \qquad (M\ ,\ N > 0)\ ,$$

(8) $$(T(N)f)(z) = \Sigma_{n=1}^{\infty}(\Sigma_{d|(N,n)}\ d^{k-1}\ a_{Nn/d^2})\ q^n \qquad (N > 0\ ,\ f \in S_k\ ,\ f = \Sigma a_n\ q^n)\ .$$

La formule (7) implique que les $T(N)$ engendrent une algèbre commutative $\underset{\sim}{T}$ (appelée <u>algèbre de Hecke</u>) d'opérateurs sur S_k. La formule (8) implique que, pour une fonction propre f de $T(N)$ à valeur propre λ, le N-ième coefficient de Fourier de f est λ fois le premier coefficient (λa_1 = coefficient de q^1 en $T(N)f = a_N$). En particulier, si f est une fonction propre de <u>tous</u> les $T(N)$, avec valeurs propres λ_N, alors $a_N = \lambda_N\ a_1$ pour tout N. On a donc $a_1 \neq 0$ (si $f \neq 0$), et on ne perd pas en généralité si on suppose $a_1 = 1$; la fonction f sera alors appelée <u>fonction propre normalisée</u> pour l'algèbre $\underset{\sim}{T}$.

<u>Exemple</u>. – L'espace S_{12} est engendré par la fonction

$$\Delta(z) = q\ \Pi_{n=1}^{\infty}(1 - q^n)^{24} = \Sigma_{n=1}^{\infty}\ \tau(n)\ q^n$$

($\tau(n)$ = fonction τ de Ramanujan). Puisque $\dim S_{12} = 1$, cette fonction est forcément une fonction propre (normalisée) de $\underset{\sim}{T}$, avec $T(N)\Delta = \tau(N)\Delta$, et on déduit de (7) ou de (8) l'identité (conjecturée par RAMANUJAN en 1916)

$$\tau(m)\ \tau(n) = \Sigma_{d|(m,n)}\ d^{11}\ \tau(mn/d^2)\ .$$

L'espace S_k peut être muni d'un produit scalaire non dégénéré, appelé le <u>produit de Petersson</u>, de la façon suivante : si $f\ ,\ g : H \to \underset{\sim}{C}$ sont des fonctions satisfaisant à (2), l'expression $f(z)\ \overline{g(z)}\ y^k$ (où $y = \mathrm{Im}(z)$) est invariante par rapport à Γ, ce qui découle facilement de la formule

(9) $$\mathrm{Im}\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = (ad - bc)\ \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz + d|^2} \qquad (z \in \underset{\sim}{C}\ ,\ a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ d \in \underset{\sim}{R})\ .$$

Cette formule implique également que l'élément de volume

(10) $$dV = \frac{dxdy}{y^2} \qquad (x + iy = z \in H)$$

est Γ-invariant. Il s'ensuit que, pour $f\ ,\ g \in S_k$, l'intégrale convergente

(11) $$(f\ ,\ g) = \int_F f(z)\ \overline{g(z)}\ y^k\ dV$$

(où F est n'importe quel domaine fondamental pour l'opération (1), par exemple celui donné par $|z| \geqslant 1$, $|x| \leqslant \frac{1}{2}$)) est indépendante du choix de F . Alors $(\, , \,)$ est une forme hermitienne définie positive ou produit scalaire sur l'espace S_k , ce qui donne à S_k la structure d'un espace de Hilbert de dimension finie. On montre que les opérateurs $T(N)$ sont des opérateurs hermitiens par rapport au produit scalaire $(\, , \,)$. Ceci implique que les fonctions propres normalisées forment une base pour S_k . Nous noterons cette base

$$\{f\alpha(z)\} \quad (\alpha = 1 \, , \, \ldots \, , \, r \, , \text{ où } r = \dim S_k) \, ,$$

avec

$$f_\alpha(z) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^\alpha q^n \, , \quad \lambda_1^\alpha = 1 \, , \quad T(N)f_\alpha = \lambda_N^\alpha f_\alpha \, . \tag{12}$$

Remarquons que ces fonctions propres forment une base orthogonale par rapport au produit de Petersson, c'est-à-dire que $(f_\alpha \, , \, f_\beta) = 0$ pour $\alpha \neq \beta$.

2. Construction du "noyau" $\omega_N(z \, , \, z')$.

Nous fixons un entier pair $k \geqslant 4$. Pour chaque entier $N > 0$, soit

$$\omega_N(z \, , \, z') = \textstyle\sum_{ad-bc=N} (czz' + dz' + az + b)^{-k} \qquad (z \, , \, z' \in H) \, , \tag{13}$$

où la sommation s'étend sur les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients entiers et de déterminant N . On peut également écrire ω_N sous la forme

$$\omega_N(z \, , \, z') = \textstyle\sum_{ad-bc=N} (cz + d)^{-k} \left(z' + \frac{az + b}{cz + d}\right)^{-k} \, . \tag{14}$$

D'après la formule (9), on a $\operatorname{Im}\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) > 0$ pour $z \in H$, $ad - bc > 0$. L'expression $z' + \frac{az + b}{cz + d}$ ne s'annule donc jamais, et chaque terme de (14) est holomorphe en z , z' . On vérifie que la série est absolument convergente, car $k \geqslant 4$. La fonction $\omega_N(z \, , \, z')$ est donc holomorphe en z , z' . On vérifie à partir de (14) qu'elle est une forme parabolique par rapport à z (et bien sûr aussi par rapport à z' , puisque l'expression (13) est symétrique en z , z').

THÉORÈME.

(i) <u>La fonction</u> $C_k^{-1} N^{k-1} \omega_N(z \, , \, -\overline{z'})$, <u>avec</u>

$$C_k = \frac{(-1)^{k/2} \pi}{2^{k-3}(k-1)} \, , \tag{15}$$

<u>est le "noyau" de l'application</u> $T(N) : S_k \to S_k$, <u>c'est-à-dire que, pour toute fonction</u> $f \in S_k$, <u>le produit de Petersson de</u> $f(z)$ <u>et de</u> $\omega_N(z \, , \, z')$ <u>est donné par</u>

$$(f(z) \, , \, \omega_N(z \, , \, z')) = C_k \, N^{-k+1} (T(N)f)(-\overline{z'}) \, . \tag{16}$$

(ii) On a l'identité

(17) $$C_k^{-1}\, N^{k-1}\, \omega_N(z\ ,\ z') = \sum_{\alpha=1}^{r} \frac{\lambda_N^{\alpha}}{(f_\alpha\ ,\ f_\alpha)}\ f_\alpha(z)\ f_\alpha(z')\ ,$$

où $f_\alpha(z)$ $(\alpha = 1\ ,\ \dots\ ,\ r = \dim S_k)$ est la base donnée en (12).

(iii) La trace de l'opérateur de Hecke $T(N)\ :\ S_k \to S_k$ est donnée par

(18) $$\mathrm{Tr}(T(N)\ ,\ S_k) = C_k^{-1}\, N^{k-1} \int_F \omega_N(z\ ,\ -\bar{z})\ \mathrm{Im}(z)^k\ dV\ ,$$

où F est un domaine fondamental pour H/Γ et dV l'élément de volume (10).

Démonstration. — Supposons d'abord $N = 1$. Si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\underset{\sim}{Z})$, alors on déduit des équations (2) et (9) que

$$(c\bar{z} + d)^{-k}\ f(z)\ y^k = f(\gamma z)\ \mathrm{Im}(\gamma z)^k \qquad (y = \mathrm{Im}(z))\ ,$$

ce qui implique, d'après (14), que

$$f(z)\ \overline{\omega_1(z\ ,\ z')}\ y^k = 2 \sum_{\gamma\in\Gamma} (\overline{z'} + \gamma\bar{z})^{-k}\ f(\gamma z)\ \mathrm{Im}(\gamma z)^k$$

(le facteur 2 provient du fait que chaque $\gamma \in \Gamma$ est représenté par deux matrices de $SL_2(\underset{\sim}{Z})$). On trouve donc pour le produit de Petersson de $f(z)$ et de $\omega_1(z\ ,\ z')$:

$$(f(z)\ ,\ \omega_1(z\ ,\ z')) = 2 \int_F \sum_{\gamma\in\Gamma} (\bar{z}' + \gamma\bar{z})^{-k}\ f(\gamma z)\ \mathrm{Im}(\gamma z)^k\ dV\ .$$

On peut échanger l'ordre de l'intégration et de la sommation. Ceci donne, en tenant compte de l'invariance par Γ de l'élément de volume dV,

(19) $$\begin{aligned}(f(z)\ ,\ \omega_1(z\ ,\ z')) &= 2 \sum_{\gamma\in\Gamma} \int_{\gamma F} (\overline{z'} + \bar{z})^{-k}\ f(z)\ \mathrm{Im}(z)^k\ dV \\ &= 2 \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - iy + \overline{z'})^{-k}\ f(x + iy)\ y^{k-2}\ dx\ dy\ .\end{aligned}$$

(La dernière égalité provient du fait que $H = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma F$, les différentes régions γF étant disjointes à des ensembles de mesure nulle près.) Le fait que $f(z)$ soit holomorphe et suffisamment petit à l'infini implique que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - iy + \overline{z'})^{-k}\ f(x + iy)\ dx = \frac{2\pi i}{(k-1)!}\ f^{(k-1)}(2iy - \bar{z}')$$

(formule de Cauchy). Le membre de droite de (19) est donc égal à

$$\begin{aligned}&\frac{4\pi i}{(k-1)!} \int_0^{\infty} y^{k-2}\ f^{(k-1)}(2iy - \bar{z}')\ dy \\ &= \frac{4\pi i}{(k-1)!} \int_0^{\infty} \frac{1}{(2i)^{k-2}}\ \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}}\ f'(2ity - \bar{z}')\Big|_{t=1}\ dy \\ &= \frac{4\pi i}{(k-1)!}\ \frac{1}{(2i)^{k-2}}\ \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \int_0^{\infty} f'(2ity - z')\ dy\Big|_{t=1}\end{aligned}$$

$$= \frac{4\pi i}{(k-1)!} \frac{1}{(2i)^{k-2}} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \left(\frac{-f(-\bar{z}')}{2it}\right)\Big|_{t=i}$$

$$= C_k \; f(-\bar{z}') \; ,$$

ce qui démontre la formule (16) dans le cas $N = 1$. (On peut aussi faire ce calcul en utilisant les séries de Poincaré, voir [2].) Le cas général est une conséquence du cas particulier $N = 1$, car on voit facilement que $N^{k-1}\,\omega_N = T(N)\,\omega_1$, où $T(N)$ est l'opérateur de Hecke par rapport à z.

La partie (ii) du théorème se déduit de la première partie. La fonction ω_N est une forme parabolique de poids k par rapport à chacune des deux variables z, z', elle peut donc s'écrire

$$\omega_N(z\,,\,z') = \sum_{\alpha=1}^{r} \sum_{\beta=1}^{r} c_{\alpha\beta}\, f_\alpha(z)\, f_\beta(z') \; .$$

Appliquons l'équation (16) à $f = f_\gamma$, où f_γ est l'une des fonctions propres normalisées. Alors

$$\begin{aligned}
\lambda_N^\gamma\, f_\gamma(-\overline{z'}) &= (T(N)f_\gamma)(-\overline{z'}) \\
&= C_k^{-1}\, N^{k-1} (f_\gamma(z)\,,\,\omega_N(z\,,\,z')) \\
&= C_k^{-1}\, N^{k-1} \sum_{\alpha,\beta} \bar{c}_{\alpha\beta} (f_\gamma,\, f_\alpha)\, \overline{f_\beta(z')} \; ;
\end{aligned}$$

dans la dernière ligne nous avons tenu compte du fait que $(\;,\;)$ est antilinéaire par rapport au deuxième argument. Puisque $(f_\gamma\,,\,f_\alpha) = 0$ pour $\alpha \neq \gamma$, la sommation double se réduit à une sommation simple. D'autre part, $f_\gamma(-\overline{z'}) = \overline{f_\gamma(z')}$, et les nombres λ_N^γ, C_k et $(f_\gamma\,,\,f_\gamma)$ sont réels ; nous obtenons donc

$$\lambda_N^\gamma\, f_\gamma(z') = C_k^{-1}\, N^{k-1} \sum_{\beta=1}^{r} c_{\gamma\beta} (f_\gamma\,,\,f_\gamma)\, f_\beta(z') \; .$$

L'indépendance linéaire des fonctions f_β implique maintenant que

$$c_{\gamma\beta} = C_k\, N^{-k+1} (f_\gamma\,,\,f_\gamma)^{-1}\, \delta_{\gamma\beta} \; .$$

Enfin, l'énoncé (iii) du théorème est une conséquence immédiate de l'énoncé (ii), parce que le membre de droite de l'équation (18) est égal à

$$\sum_{\alpha=1}^{r} \frac{\lambda_N^\alpha}{(f_\alpha\,,\,f_\alpha)} \int_F f_\alpha(z)\, f_\alpha(-\bar{z})\, y^k\, dV = \sum_{\alpha=1}^{r} \lambda_N^\alpha = \operatorname{Tr} T(N) \; .$$

3. Calcul de l'intégrale ; démonstration de la formule de la trace.

Dans le paragraphe précédent, nous avons démontré l'identité

$$\operatorname{Tr}(T(N)\,,\,S_k) = C_k^{-1}\, N^{k-1} \int_F \sum_{ad-bc=N} \frac{y^k}{(c|z|^2 + d\bar{z} - az - b)^k}\, dV \; ,$$

où C_k est la constante définie par (15). La somme dans cette égalité est invariante par Γ (sinon, l'intégrale ne serait pas indépendante du choix du domaine fondamental F). Si on regarde les termes de cette somme, on constate que remplacer z par γz $(\gamma \in \Gamma)$ revient à remplacer la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ par $\gamma^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\gamma$. Ces deux matrices n'ont pas seulement le même <u>déterminant</u>, mais aussi la même <u>trace</u> ; on peut donc décomposer la somme en morceaux Γ-invariants caractérisés par $a + d =$ constante :

$$\mathrm{Tr}(T(N)\ ,\ S_k) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} I(N\ ,\ t)\ ,$$

avec

$$(20)\qquad I(N\ ,\ t) = C_k^{-1}\, N^{k-1} \int_F \sum_{ad-bc=N,\, a+d=t} \frac{y^k}{(c|z|^2 + d\bar{z} - az - b)^k}\, dV\ .$$

Nous allons démontrer que

$$(21)\quad \tfrac{1}{2}(I(N\ ,\ t) + I(N\ ,\ -t)) = \begin{cases} -\frac{1}{2}p_k(t\ ,\ N)\, H(4N - t^2) & \text{pour } t^2 - 4N < 0\ , \\ \frac{k-1}{24}\, N^{\frac{1}{2}(k-2)} - \frac{1}{4}N^{\frac{1}{2}(k-1)} & \text{pour } t^2 - 4N = 0\ , \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{|t| - u}{2}\right)^{k-1} & \text{pour } t^2 - 4N = u^2 > 0\ , \\ 0 & \text{pour } t^2 - 4N > 0 \text{ non carré} \end{cases}$$

Il est clair que ces formules impliquent la formule de trace énoncée dans l'introduction (les nombres $\left|\frac{t+u}{2}\right|$, $\left|\frac{t-u}{2}\right|$ jouent le rôle de d , d' dans la formule de trace).

Pour étudier l'intégrale (20), nous remarquons d'abord qu'il y a une bijection entre l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de déterminant N et de trace t et l'ensemble des formes quadratiques binaires φ de discriminant $|\varphi| = t^2 - 4N$ (le discriminant d'une forme $\varphi(u\ ,\ v) = \alpha u^2 + \beta uv + \gamma v^2$ étant donné par $|\varphi| = \beta^2 - 4\alpha\gamma$), donnée par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \varphi(u\ ,\ v) = cu^2 + (d - a)uv - bv^2\ ,$$

$$\varphi(u\ ,\ v) = \alpha u^2 + \beta uv + \gamma v^2 \to \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(t - \beta) & -\gamma \\ \alpha & \frac{1}{2}(t + \beta) \end{pmatrix}\ .$$

Pour toute forme $\varphi(u\ ,\ v) = \alpha u^2 + \beta uv + \gamma v^2$ et tout $t \in \underset{\sim}{R}$, $z = x + iy \in H$, nous posons

$$(22)\qquad R_\varphi(z\ ,\ t) = \frac{y^k}{(\alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma - ity)^k}\ .$$

Alors

$$(23)\qquad I(N\ ,\ t) = C_k^{-1}\, N^{k-1} \int_F \sum_{|\varphi| = t^2 - 4N} R_\varphi(z\ ,\ t)\, dV\ ,$$

où la sommation porte sur toutes les formes de discriminant $t^2 - 4N$. Un élément

$\gamma \in \Gamma$ transforme une forme quadratique φ en une forme $\gamma\varphi$ de même discriminant, et on vérifie que

(24) $$R_{\gamma\varphi}(z\,,\,t) = R_{\varphi}(\gamma z\,,\,t) \qquad (\gamma \in \Gamma\,,\ z \in H)\,.$$

On a donc, pour chaque discriminant Δ (c'est-à-dire pour chaque entier $\Delta \equiv 0$ ou $1 \pmod 4$), l'égalité

$$\begin{aligned}\sum_{|\varphi|=\Delta} R_{\varphi}(z\,,\,t) &= \sum_{|\varphi|=\Delta \bmod \Gamma} \sum_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_\varphi} R_{\gamma\varphi}(z\,,\,t)\\ &= \sum_{|\varphi|=\Delta \bmod \Gamma} \sum_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_\varphi} R_{\varphi}(\gamma z\,,\,t)\,.\end{aligned}$$

La première sommation porte sur un système de représentants des classes de formes quadratiques de discriminant Δ , et la deuxième sur les classes résiduelles à gauche de Γ par $\Gamma_\varphi = \{\gamma \in \Gamma\ ;\ \gamma\varphi = \varphi\}$, les unités de φ . Pour $\Delta \neq 0$, le nombre de classes $h(\Delta)$ est fini, donc la première sommation est finie, et on a

(25) $$\int_F \sum_{|\varphi|=\Delta} R_{\varphi}(z\,,\,t)\, dV = \sum_{|\varphi|=\Delta \bmod \Gamma} \int_{F_\varphi} R_{\varphi}(z\,,\,t)\, dV\,,$$

où $F_\varphi = \bigcup_{\gamma\in\Gamma/\Gamma_\varphi} \gamma F$ est un domaine fondamental pour l'opération de Γ_φ sur H ; l'argument est le même que celui utilisé dans la démonstration du théorème du §2. Pour $\Delta = 0$, on peut prendre comme système de représentants des formes de discriminant Δ les formes φ_r $(r \in \mathbb{Z})$, où $\varphi_r(u\,,\,v) = rv^2$. Le groupe des unités de φ_r est égal à Γ pour $r = 0$, et à $\Gamma_\infty = \{\pm \begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ ;\ n \in \mathbb{Z}\}$ pour $r \neq 0$, et on trouve

(26) $$\int_F \sum_{|\varphi|=0} R_{\varphi}(z\,,\,t)\, dV = \int_F R_{\varphi_0}(z\,,\,t)\, dV + \int_{F_\infty} \sum_{r\in\mathbb{Z},\, r\neq 0} R_{\varphi_r}(z\,,\,t)\, dV$$

($F_\infty = \{z = x + iy\ ;\ 0 \leq x \leq 1\}$ étant un domaine fondamental pour l'opération de Γ_∞ sur H). Dans ce cas, on n'a pas le droit d'échanger l'ordre de l'intégration et de la sommation dans (26) : on a $\int_{F_\infty} R_{\varphi_r}\, dV = 0$ pour tout r mais l'intégrale de la somme est non nulle, comme on le verra plus bas. Il nous reste à calculer les membres de droite de (25) et de (26) pour $\Delta = t^2 - 4N$. Nous distinguons quatre cas.

<u>1er cas</u> : $\Delta < 0$. - Ici Γ_φ est fini pour chacune des formes φ de l'expression (25) (on sait même que $|\Gamma_\varphi| = 1$, 2 ou 3). Pour une forme

$$\varphi(u\,,\,v) = \alpha u^2 + \beta uv + \gamma v^2 \text{ de discriminant } \Delta\,,$$

on a donc

$$\int_{F_\varphi} R_{\varphi}(z\,,\,t)\, dV = \frac{1}{|\Gamma_\varphi|} \int_H R_{\varphi}(z\,,\,t)\, dV = \frac{1}{|\Gamma_\varphi|} \int_H \frac{y^k}{(|z|^2 - ity - \frac{1}{4}\Delta)^k}\, dV$$

(pour obtenir la dernière égalité nous avons utilisé la substitution $z \to \frac{2z - \beta}{2\alpha}$). Notons I la valeur de cette intégrale. Elle ne dépend que de Δ et de t . Le membre de droite de (25) est donc égal à

$$\sum_{|\varphi|=\Delta \bmod \Gamma} \frac{1}{|\Gamma_\varphi|} I = 2H(-\Delta)I ,$$

où $H(-\Delta)$ est la fonction définie dans l'introduction (le facteur 2 provient du fait que dans la définition de $H(n)$ on ne compte que les formes définies positives, tandis qu'ici on compte toutes les formes, positives ou négatives). Enfin, en utilisant la formule

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x^2 + A)^{-k}\, dx = \frac{\pi}{(k-1)!} \cdot \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots(k-\frac{3}{2})\, A^{-k+\frac{1}{2}} ,$$

qui s'obtient en différentiant $k-2$ fois par rapport à A la formule correspondante pour $k = 2$, on obtient

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\infty} y^{k-2} \int_{-\infty}^{\infty}(x^2 + y^2 - ity - \tfrac{1}{4}\Delta)^{-k}\, dx\, dy \\
&= \frac{\pi}{(k-1)!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots(k-\frac{3}{2}) \int_0^{\infty} (y^2 - ity - \tfrac{1}{4}\Delta)^{-k+\frac{1}{2}}\, y^{k-2}\, dy \\
&= \frac{\pi i^{k-2}}{2(k-1)!} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \int_0^{\infty} (y^2 - ity - \tfrac{1}{4}\Delta)^{-3/2}\, dy \\
&= \frac{\pi i^{k-2}}{2(k-1)!} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}}\Big(\frac{4}{t^2-\Delta}\, \frac{y - \frac{1}{2}it}{\sqrt{y^2 - ity - \frac{1}{4}\Delta}}\Big|_0^{\infty}\Big) \\
&= \frac{\pi i^{k-2}}{2(k-1)!} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}}\Big(\frac{4}{\sqrt{|\Delta|}} \cdot \frac{1}{\sqrt{|\Delta|} - it}\Big) \\
&= \frac{2\pi}{k-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{|\Delta|} - it)^{k-1}} .
\end{aligned}$$

La formule (23) donne alors

$$\begin{aligned}
I(N, t) &= C_k^{-1} N^{k-1} \times 2H(4N - t^2) \times \frac{2\pi}{k-1} \times \frac{1}{\sqrt{4N - t^2}} \times \frac{1}{(\sqrt{4N - t^2} - it)^{k-1}} \\
&= \frac{\rho^{-k-1}}{\rho - \bar{\rho}} H(4N - t^2) ,
\end{aligned}$$

où $\rho = \frac{1}{2}(t + i\sqrt{4N - t^2})$, ce qui démontre la première des formules de (21).

<u>2e cas</u> : $\Delta = 0$. — On utilise maintenant la formule (26). Le premier terme est égal à $(-1)^{k/2}\pi/3t^k$, puisque $R_{\varphi_0}(z, t) = (i/t)^k$ et $\int_F dV = \frac{\pi}{3}$. le deuxième terme est égal à

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\int_0^1 y^{k-2} \sum_{r\in\mathbb{Z}, r\neq 0}(r - ity)^{-k}\, dx\, dy &= \frac{i^{k-2}}{(k-1)!} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \int_0^{\infty} \sum_{r\in\mathbb{Z}, r\neq 0}(r - ity)^{-2}\, dy \\
&= \frac{i^{k-2}}{(k-1)!} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} \int_0^{\infty}\Big(\frac{1}{t^2 y^2} - \frac{\pi^2}{\sinh^2 \pi t y}\Big)\, dy \\
&= \frac{i^{k-2}}{(k-1)!} \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}}\Big(\frac{\pi}{|t|}\Big) = (-1)^{\frac{1}{2}(k-2)} \frac{\pi}{k-1} |t|^{-k+1} .
\end{aligned}$$

Nous avons donc, pour $t = \pm 2\sqrt{N}$,

$$I(N\,,\,t) = C_k^{-1}\,N^{k-1}\int_F \sum_{|\varphi|=C} R_\varphi(z\,,\,t)\,dV = \frac{k-1}{24}\,N^{\frac{1}{2}(k-2)} - \frac{1}{4}N^{\frac{1}{2}(k-1)}\,.$$

C'est la deuxième formule de (21).

3e cas : $\Delta = u^2$, $u > 0$. – Comme dans le cas $\Delta < 0$ on n'a qu'un nombre fini de classes de formes de discriminant Δ , et les Γ_φ sont des groupes finis, donc

$$\int_F \sum_{|\varphi|=\Delta} R_\varphi(z\,,\,t)\,dV = H.I\,,$$

où

$$H = \sum_{|\varphi|=\Delta \bmod \Gamma} \frac{1}{|\Gamma_\varphi|}\,, \qquad I = \int_H \frac{y^k}{(|z|^2 - ity - \frac{1}{4}\Delta)^k}\,dV\,.$$

On a $H = u$, car les groupes Γ_φ sont triviaux dans ce cas, et il y a u classes de formes quadratiques binaires de discriminant u^2 . Comme dans le cas $\Delta < 0$, on obtient

$$I = \frac{\pi i^{k-2}}{2(k-1)!}\,\frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}}\left(\frac{4}{t^2-\Delta}\,\frac{y-\frac{1}{2}it}{\sqrt{y^2 - ity - \frac{1}{4}\Delta}}\Bigg|_0^\infty\right),$$

mais, pour $\Delta > 0$, l'expression entre parenthèses est égale à $\frac{-4}{\sqrt{\Delta}}\,\frac{1}{\sqrt{\Delta}+|t|}$ et non à $\frac{4}{\sqrt{|\Delta|}}\,\frac{1}{\sqrt{|\Delta|}+it}$ comme avant. (Le fait que l'intégrale ne dépend ici que de $|t|$ est dû au fait que la valeur de $\sqrt{y^2 - ity - \frac{1}{4}\Delta}$ pour $y = 0$ dépend du signe de t, car il faut choisir la branche de la racine qui est de partie réelle positive pour $y \to \infty$.) On a donc

$$H.I = (-1)^{\frac{1}{2}(k-2)}\,\frac{2\pi}{k-1}\,\frac{1}{(u+|t|)^{k-1}}\,,$$

$$I(N\,,\,t) = C_k^{-1}\,N^{k-1}\,HI = -\frac{1}{2}\left(\frac{|t|-u}{2}\right)^{k-1}\,,$$

et la troisième formule de (21) est démontrée.

4e cas : Δ positif, non carré. – Ici on a toujours un nombre fini de classes de formes quadratiques, mais les groupes des unites sont maintenant des groupes infinis (cycliques). Intuitivement, on a $H = \sum\frac{1}{|\Gamma_\varphi|} = \sum\frac{1}{\infty} = 0$, donc $HI = 0$. Nous affirmons que, pour chaque φ de discriminant Δ ,

(27) $$\int_{F_\varphi} R_\varphi(z\,,\,t)\,dV + \int_{F_\varphi} R_\varphi(z\,,\,-t)\,dV = 0\,.$$

Soit $\varphi(u\,,\,v) = \alpha u^2 + \beta uv + \gamma v^2$ une telle forme, et soient w , w' $(w > w')$ les racines de l'équation $\alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0$. Alors la matrice

$$\gamma = (w - w')^{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} w' & -w \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\underset{\sim}{R})$$

transforme φ en $\gamma\varphi$, avec $\gamma\varphi(u\,,\,v) = \sqrt{\Delta}\,uv$. Le conjugué du groupe $\Gamma\varphi$ par γ opère sur le demi-plan supérieur comme le groupe cyclique infini engendré par $z \to \varepsilon^2 z$, où $\varepsilon > 1$ est l'unité fondamentale de l'ordre de $\underset{\sim}{Q}(\sqrt{\Delta})$ associé à φ .

On peut donc choisir le domaine fondamental F_φ de telle manière que $\gamma^{-1} F_\varphi$ soit une demi-couronne $\{z \; ; \; y > 0 \; , \; r_0 \leq |z| \leq \varepsilon^2 r_0\}$. Alors

$$\int_{F_\varphi} R_\varphi(z\,,\,t)\,dV = \int_{F_\varphi} R_{\gamma\varphi}(\gamma^{-1} z\,,\,t)\,dV \quad \text{(d'après (24))}$$

$$= \iint_{y>0,\, r_0 \leq |z| \leq \varepsilon^2 r_0} (\sqrt{\Delta}\, x - ity)^{-k}\, y^{k-2}\, dx\, dy\ .$$

On écrit $z = x + iy$ en coordonnées polaires : $z = re^{i\theta}$, pour obtenir

$$\int_{F_\varphi} R_\varphi(z\,,\,t)\,dV = \int_0^\pi \int_{r_0}^{\varepsilon^2 r_0} (\sqrt{\Delta}\cos\theta - it\sin\theta)^{-k}\,(\sin\theta)^{k-2}\,\frac{dr}{r}\,d\theta$$

$$= (\log \varepsilon^2) \int_0^\pi (\sqrt{\Delta}\cos\theta - it\sin\theta)^{-k}\,(\sin\theta)^{k-2}\,d\theta\ .$$

Pour démontrer l'égalité (27), il faut donc vérifier que

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sqrt{\Delta}\cos\theta - it\sin\theta)^{-k}\,(\sin\theta)^{k-2}\,d\theta = 0\ ,$$

ce qui se fait facilement en posant $\zeta = e^{i\theta}$, et en utilisant le théorème des résidus.

La dernière formule de (21) découle de (23), (25) et (27). Ceci achève la démonstration de la formule de trace.

BIBLIOGRAPHIE

[1] SELBERG (A.). - Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Ind. Math. Soc., t. 20, 1956, p. 47-87.

[2] ZAGIER (D.). - Modular forms whose Fourier coefficients involve zetafunctions of quadratic fields (à paraître).

(Texte reçu le 30 juillet 1976)

Note ajoutée à la correction des épreuves (Décembre 1976). - L'auteur a appris que la fonction $\omega_N(z,z')$, qu'il a trouvée comme cas spécial d'une certaine forme modulaire de Hilbert (Cf. Modular forms associated to local quadratic fields, Inv. Math., Berlin, t. 30, 1975, p. 1-46), a été introduite antérieurement par H. PETERSSON (Cf. Über eine Metrisierung der ganzen Modulformen, Jahr. Deutschen Math. Verein., t. 49, 1939, p. 49-75), et utilisée par M. KOCHER dans un article non publié (Ein Beweis der Eichler-Selbergschen Spurformel für die Hecke-Operaten) pour donner une démonstration de la formule de trace très analogue à celle donnée ici.

Don ZAGIER
Mathematisches Institut der Universität
10 Wegelerstrasse
D-5300 BONN (Allemagne fédérale)