Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Gérald Tennenbaum

Sur la répartition des diviseurs

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 17, nº 2 (1975-1976), exp. nº G14, p. G1-G5

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_2_A17_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de Théorie des nombres)
17e année, 1975/76, n° G14, 5 p.

23 février 1976

SUR LA RÉPARTITION DES DIVISEURS

par Gérald TENNENBAUM

1. Historique

En relation avec le problème des suites primitives, (c'est-à-dire telles qu'aucun terme n'en divise un autre), BESICOVITCH a montré en 1934 [1] que, si l'on note d_α la densité naturelle de l'ensemble des entiers ayant un diviseur entre a et $2a$, alors

$$\liminf_{a\to\infty} d_a = 0 .$$

E, 1935, ERDÖS montre dans [2] que $\lim_{a\to\infty} d_a = 0$, et sa démonstration (voir [4], page 256) montre en fait la relation

$$d_a = O(1/\log\log a) .$$

En 1960, ERDÖS publie, en russe, un article [3] consacré à une estimation asymptotique de la quantité

$$A(x) = \operatorname{card}\{n \leqslant x \; ; \; n = uv \; , \; u \; , \; v \leqslant \sqrt{x}\} \; ;$$

il démontre que, pour tout $\varepsilon > 0$ et $x \geqslant x_0(\varepsilon)$, on a

$$\frac{x}{(\log x)^{\alpha+\varepsilon}} < A(x) < \frac{x}{(\log x)^{\alpha-\varepsilon}} \quad \text{avec} \quad \alpha = 1 - \frac{\log(e \log 2)}{\log 2} = 0{,}0860 \ldots ,$$

et il annonce que les mêmes méthodes permettent une estimation du même type pour d_a ; cependant, aucune démonstration n'est donnée, et le résultat annoncé est inexact.

Nous montrons en fait que l'on a, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $a \geqslant \alpha_0(\varepsilon)$,

$$\frac{1}{(\log a)^{\alpha+\varepsilon}} < d_a < \frac{c}{(\log a)^{\alpha}\sqrt{\log\log a}} ,$$

où c est une constante absolue.

2. Principe des démonstrations.

(a) Borne supérieure. - Posons

$$\Omega_a(n) = \sum_{p^\beta \| n, p<a} \beta ,$$

$$\Pi_{a,\nu}(x) = \sum_{n\leqslant x, \Omega_a(n)=\nu} 1 .$$

On montre par récurrence que

(1) $$\Pi_{a,\nu}(x) \ll \frac{x}{\log a} \frac{(\log\log a)^{\nu}}{\nu\,!}$$

lorque $\nu \ll \log\log a$ et lorsque x est assez grand par rapport à a.

On pose ensuite

$$\mathrm{card}\{n \leqslant x \ ; \ n = uv \ ; \ a \leqslant u \leqslant 2a\} = v_a(x) = v_a^1(x) + v_a^2(x) ,$$

où les entiers n comptés dans $v_a^1(x)$ (resp. $v_a^2(x)$) sont tels que

$$\Omega_a(n) \leqslant \frac{\log\log a}{\log 2} \quad (\text{resp. } \Omega(n) > \frac{\log\log a}{\log 2}) .$$

On a alors

(2) $$v_a^1(x) \leqslant \sum_{(i+j)\leqslant(\log\log a/\log 2)} \Pi_{a,i}(2a)\, \Pi_{a,j}(x/a)$$

(3) $$v_a^2(x) \leqslant \sum_{i>(\log\log a/\log 2)} \Pi_{a,i}(x) \leqslant c \sum_{i>(\log\log a/\log 2)} \frac{x}{\log a} \frac{(\log\log a)^i}{i\,!} + R_2(x)$$

où les n de $R_2(x)$ sont tels que $\Omega_a(n) \geqslant m \log\log a$.

Pour m suffisamment grand (m absolue) on peut majorer $R_2(x)$ par $x/\log a$.

On montre, grâce à un exercice de [5], le lemme suivant :

LEMME 1. – <u>Pour</u> $0 < b < 1 < a$, <u>on a</u>

(i) $$\sum_{n\geqslant ax} \frac{x^n}{x\,!} = O(e^{ax}\, a^{-ax}\, x^{-1/2}) ,$$

(ii) $$\sum_{n\leqslant bx} \frac{x^m}{n\,!} = O(e^{bx}\, b^{-bx}\, x^{-1/2}) .$$

On peut donc, grâce à la majoration (1), estimer les quantités (2) et (3).

(b) <u>Borne inférieure</u>. – Nous aurons besoin du lemme suivant, dont la démonstration est donnée dans [6]. $\Pi'_{0,a}(x)$ désigne le nombre d'entiers sans facteurs carrés inférieurs ou égaux à x qui n'ont pas de facteurs premiers moindres que a.

LEMME 2. – <u>Soit</u> $P(a) = P = \prod_{p\leqslant a} p$. <u>On a la formule asymptotique</u>

$$\Pi'_{0,a}(x) = \prod_{p\leqslant a} (1 - \frac{1}{p}) \prod_{p>a} (1 - \frac{1}{p^2})x + O(\sqrt{x}\, \varphi(P)) ,$$

<u>où</u> φ <u>désigne la fonction d'Euler</u>.

Le lemme suivant est particulièrement simple :

LEMME 3. – <u>Soient deux familles d'entiers</u>

$$a_1 < \dots < a_t$$
$$a'_1 < \dots < a'_u$$

<u>si</u> S <u>désigne le nombre de quadruplets</u> (i, j, r, s) <u>tels que</u>

$$a_i\, a'_j = a_r\, a'_s$$

et si N désigne le nombre de produits $a_i a'_j$ distincts, alors

$$(t)^2 \leqslant N.S. \quad .$$

Démonstration. – On appelle α_m le nombre de couples (i, j) tels qu'il existe exactement m representations de $a_i a'_j$, alors

$$\sum \alpha_m = N , \qquad \sum m\alpha_m = tu., \qquad \sum m^2 \alpha_m = S ,$$

ce qui donne le résultat par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Le principe de la minoration est alors le suivant : on cherche deux familles d'entiers

$$a \leqslant a_1 < a_2 < \dots < a_t \leqslant 2a$$
$$\frac{x}{4a} < a'_1 < \dots < a'_u \leqslant \frac{x}{2a}$$

telles que, conservant les notations du lemme 3, on ait

(C1) $$S \leqslant tu \log^{\varepsilon} a$$

(C2) $$tu \geqslant x/(\log^{\alpha+\varepsilon} a)$$

pour tout $\varepsilon > 0$, $a \geqslant a_s(\varepsilon)$ et $x > x(a)$.

Si les conditions (C1) et (C2) sont réalisées, le lemme 3 montre alors que

$$N \geqslant \frac{(tu)^2}{S} \geqslant x(\log a)^{-\alpha-2\varepsilon}$$

ce qui montre bien le resultat attendu.

Pour que les conditions (C1) et (C2) puissent être réalisées, nous allons choisir les a_i et les a'_j de façon très particulière :

Si $b_1 < b_2 < \dots$ est la suite finie des entiers sans facteurs carrés qui ont exactement $T = [\log\log a/2D \log 2]$ (avec $D = [\log\log a]$) facteurs premiers dans chaque intervalle

$I(a, i) = [\exp\exp(\frac{i}{D}\log\log a), \exp\exp(\frac{i+1}{D}\log\log a)[$ pour $1 \leqslant i \leqslant D-2$,

et qui n'ont pas d'autres facteurs premiers, alors les a_i seront les entiers de l'intervalle $[a, 2a]$ qui sont de la forme $b_i p_j$ avec p_j premier et les a'_k seront les entiers de l'intervalle $[x/4a, x/2a]$ qui sont de la forme $b_i c_k$ où les c_k sont tous des entiers sans facteurs carrés qui n'ont aucun facteur moindre que $2a$.

On montre dans ces conditions (voir [3] ou [6]) que l'on a

$$\sum \frac{1}{b_j} > (\log a)^{1-(\alpha/2)-\varepsilon} \quad \text{et} \quad b_j \ll a^{\varepsilon}$$

et donc que

$$t = \sum_j \{\Pi(\frac{2a}{b_j}) - \Pi(\frac{a}{b_j})\} \geqslant \frac{a}{\log^{(\alpha/2)+\varepsilon} a} \quad .$$

Mais on a aussi

$$u = \sum_j \{\Pi'_{0,2a}(\frac{x}{2abj}) - \Pi'_{0,2a}(\frac{x}{4abj})\}$$

Pour x assez grand, le lemme 2 montre donc que

$$u \gg \frac{x}{a \log a} \sum \frac{1}{b_j} \geqslant \frac{x}{a(\log a)^{(\alpha/2)+\varepsilon}} ;$$

on a donc

$$tu \geqslant \frac{x}{(\log a)^{\alpha+2\varepsilon}} \quad \text{pour} \quad a \geqslant a_0(\varepsilon) \quad \text{et} \quad x \geqslant x(a) ,$$

ce qui exprime que, pour le choix des a_i et des a'_j, la condition (C2) est réalisée.

Les calculs, conduisant à la majoration (C1) de S, sont particulièrement longs et pénibles. On en trouvera une rédaction détaillée dans [6].

3. Problèmes liés.

Si, pour tout entier n, nous définissons

$$\rho_1(n) = \max_{d|n, d^2 \leqslant n} d \quad \text{et} \quad \rho_2(n) = \min_{d|n, d^2 \geqslant n} d$$

les méthodes précédentes permettent une évaluation asymptotique de $\sum_{n\leqslant x} \rho_1(n)$. On obtient ainsi la formule asymptotique valable pour $x \geqslant x_0(\varepsilon)$

$$\frac{x^{3/2}}{(\log x)^{\alpha+\varepsilon}} \leqslant \sum_{n<x} \rho_1(n) \leqslant c \frac{x^{3/2}}{(\log x)^{\alpha} \sqrt{\log \log x}} ,$$

où c est une constante absolue effective.

La minoration est une conséquence directe de la minoration de la quantité $A(x)$ par ERDÖS. La majoration s'obtient en majorant $v_a(x)$ lorsque a est de la forme $\sqrt{x}/2^k$, $k \leqslant (\log \log x)/\log 2$.

Par des méthodes analogues (voir [6]), on obtient en effet que lorsque a est de cette forme, on a

$$v_a(x) \leqslant c \frac{x}{(\log x)^{\alpha} \sqrt{\log \log x}} .$$

De l'inégalité

$$\sum_{n\leqslant x} \rho_1(n) \leqslant x\, v_{\sqrt{x}/2}(x) + \dots + \frac{x}{2^{k-1}} v_{\sqrt{n}/2^k}(x) + \frac{x^{3/2}}{\log x} ,$$

on déduit facilement la majoration annoncée.

Remarque 1 : L'estimation de $\sum_{n\leqslant x} \rho_1(n)$ montre qu'en moyenne $\rho_1(n)$ est proche de $\sqrt{n}/\log^{\alpha} n$. On peut cependant montrer (voir [6]) que, pour tout $\beta \geqslant 0$, la densite des entiers n tels que $\rho_1(n) \gg n/\log^{\beta} n$ est nulle.

Remarque 2 : L'étude de $\sum_{n\leqslant x} \rho_2(n)$ est plus facile que celle de $\sum_{n\leqslant x} \rho_1(n)$. On montre élémentairement la formule asymptotique (voir aussi [6]) :

$$\sum_{n\leq x} \rho_2(n) = \frac{\Pi^2}{12} \frac{x^2}{\log x} + O\left(\frac{x^2}{\log^2 x}\right) .$$

Ce dernier resultat exprime que les nombres n qui sont prépondérants dans cette moyenne sont ceux pour lesquels $\rho_2(n)$ est grand, c'est-à-dire en fait les nombres n qui ont un "grand" facteur premier.

Dans la somme $\sum_{n\leq x} \rho_1(n)$ au contraire ce sont les entiers n qui ont beaucoup de petits diviseurs qui sont importants, et en fin de compte les deux moyennes sont essentiellement constituées par des ensembles disjoints.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BESICOVITCH (A. S.). - On the density of certain sequences, Math. Annalen, t. 110, 1934, p. 336-341.

[2] ERDÖS (P.). - Note on the sequences of integers no one of which is divisible by any other, J. London math. Soc., t. 10, 1935, p. 126-128.

[3] ERDÖS (P.). - Sur une inégalité asymptotique en théorie des nombres [en russe], Vestnik Leningr. Univ., Serija Mat., Mekh. i Astr., 1960, n° 13, p. 41-49.

[4] HALBERSTAM (H.) and ROTH (K. H.). - Sequences. Vol. I. - Oxford, at the Clarendon Press, 1966.

[5] KNUTH (D. E.). - Fundamental algorithms. Vol. 1., 2nd print.-Reading, Addison-Wesley publishing Company, 1969.

[6] TENENBAUM (G.). - Etude asymptotique de fonctions arithmétiques liées aux diviseurs, Thèse 3e cycle, Université de Bordeaux-I, 1976.

(Texte reçu le 18 mai 1976)

Gérald TENNENBAUM
Mathématiques
Université de Bordeaux-I
351 cours de la Libération
33405 TALENCE