Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

DANIEL BERTRAND

Transcendance de valeurs de la fonction gamma

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 17, nº 2 (1975-1976), exp. nº G8, p. G1-G5
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_2_A14_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU (Groupe d'étude de Théorie des nombres) 17e année, 1975/76, n° G8, 5 p.

15 décembre 1975

TRANSCENDANCE DE VALEURS DE LA FONCTION GAMMA

par Daniel BERTRAND

(d'après G. V. ČUDNOVSKIJ [8])

1. Fonctions eulériennes et intégrales abéliennes.

Mis à part le théorème de Lindemann sur la transcendance de $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, c'est le passage des fonctions eulériennes aux périodes de certaines intégrales abéliennes qui est à la base de tous les résultats de transcendance connus jusqu'à présent sur la fonction Γ. Nous en rappelons le principe, sur l'exemple des courbes hyperelliptiques

$$(H_n) : y^2 = 1 - x^n .$$

La surface de Riemann que définit H_n est (pour la projection y) un revêtement de $\underset{\sim}{P}_1(\underset{\sim}{C})$ de degré $d = 2$, ramifié aux racines n-ièmes de l'unité

$$\{\xi_n^k\}_{k=0,\dots,n-1} ,$$

et, lorsque n est impair, en l'infini. L'indice de ramification e_z en ces points est égal à 2. La formule de Riemann-Hurwitz :

$$\chi(H_n) = d\chi(\underset{\sim}{P}_1(\underset{\sim}{C})) - \sum_{z\in \underset{\sim}{P}_1(\underset{\sim}{C})} (e_z - 1)$$

entraîne donc que le genre g de H_n vaut :

(1) $$g = (2 - \chi(H_n))/2 = \text{partie entière de } (n-1)/2 .$$

L'espace des formes différentielles de première espèce sur H_n est engendré par les g formes :

$$\Omega_i = \frac{x^{i-1}}{y}\, dx ; \quad i = 1 , \dots , g ,$$

et l'on peut extraire une base $\{C_h ; h = 1 , \dots , 2g\}$ de l'homologie de H_n en dimension 1, à partir des chemins joignant les points $(\xi_n^k , 0)$ et (∞). La "matrice des périodes" associée à H_n est formée de g lignes et $2g$ colonnes, et s'écrit

$$[\omega_{ih} = \int_{C_h} \Omega_i]_{i=1,\dots,g;h=1,\dots,2g} .$$

On calcule

$$\omega_{ih} = 2\int_{\xi_n^k}^{\infty} x^{i-1}(1 - x^n)^{-1/2}\, dx$$

au moyen de changements de variables. Désignant par $\alpha_j = \alpha_j(h , n)$ des nombres algébriques non nuls, et par B la fonction bêta d'Euler, on obtient :

(2.a) $$\omega_{ih} = \alpha_1 \int_0^1 \frac{x^{i-1}}{\sqrt{1 - x^n}}\, dx = \alpha_2\, B(\frac{i}{n} , \frac{1}{2}) = \alpha_3 \frac{[\Gamma(i/n)]^2}{\Gamma(2i/n)} .$$

(La dernière inégalité se déduit de la formule des compléments, et de la formule de Legendre-Gauss).

De façon générale, nous noterons :

$$\Omega_H = [\omega_{ih}]_{i=1,\dots,g;h=1,\dots,2g}$$

une matrice des périodes associée à une courbe H de genre $g \geq 1$. On suppose H et les Ω_i définis sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Un raisonnement similaire au précédent montre que, pour tout couple (a, b) de nombres rationnels non entiers et de somme non entière, les expressions $B(a, b)$ apparaissent, à des facteurs près, comme coefficients des matrices Ω_H associées à certaines courbes H.

Exemples. – Considérons la courbe elliptique

$$(H_4') : y^2 = 4x^3 - 4x$$

(H_4' est birationnellement équivalente à H_4). On déduit de (2.a) :

$$\omega_{12} = \omega_2 = \frac{\Gamma(1/4)^2}{(8\pi)^{1/2}} ; \quad \omega_1 = i\omega_2 . \tag{2.b}$$

(Cette courbe admet en effet une multiplication complexe par i). De même, la courbe

$$(H_3') : y^2 = 4x^3 - 4 ,$$

qui est birationnellement équivalente à H_3, admet une multiplication complexe par j, et l'on a

$$\omega_2 = \Gamma(1/3)^3/(\pi 2^{8/3}) ; \qquad \omega_1 = j\omega_2 . \tag{2.c}$$

On remarquera que, de façon plus générale, la jacobienne de la courbe H_n est une variété abélienne du "type M.C." de Shimura, admettant $\mathbb{Q}(\xi_n)$ pour corps de multiplications complexes.

2. Esquisse historique.

Après avoir obtenu le premier résultat de transcendance sur les fonctions elliptiques de Weierstrass, SIEGEL [1] annonçait, dès 1932 :

(3.a) L'un au moins des $2g^2$ coefficients de la matrice Ω_H est transcendant. Par conséquent, en vertu de (1) et (2.a) :

(3.b) Pour tout entier $n \geq 3$, l'un au moins des $[(n-1)/2]$ nombres

$$(\Gamma(i/n))^2(\Gamma/2i/n) \qquad (i = 1, \dots, [(n-1)/2])$$

est transcendant.

Le résultat de SIEGEL a été considérablement amélioré par SCHNEIDER : le théorème 2 de [2] (non-algébricité des périodes des intégrales abéliennes de première et deuxième espèces) entraîne :

(4.a) Pour tout indice $i = 1 , \dots , g$, l'un au moins des $2g$ nombres ω_{ih} $(h = 1 , \dots , 2g)$ est transcendant.

On déduit de (4.a) (voir le calcul (2.a)) et du théorème de Lindemann :

(4.b) Pour tout couple (a , b) de nombres rationnels non entiers , $B(a , b)$ est transcendant.

Il convient ici de rappeler qu'un raisonnement à une variable permet de montrer, pour toute fonction abélienne, convenablement normalisée, la non-algébricité de chacune de ses périodes (à g composantes) (voir [4]). En particulier :

(5) Pour tout indice $h = 1 , \dots , 2g$, l'un au moins des g nombres ω_{ih} $(i = 1 , \dots , g)$ est transcendant.

(Signalons que MASSER, COATES et LANG ont donné de nombreuses améliorations de ce dernier énoncé, mais uniquement pour les variétés abéliennes du "type M.C.") de shimura.

Dans le cas des courbes elliptiques (ou, plus précisément, du produit $H_3' \times H_4'$), les méthodes de BAKER ont permis à COATES de montrer [6] :

(6) Le nombre $\beta_1 \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma(1/4)^2 + \beta_2 \pi^{-1} \Gamma(1/3)^3 + \beta_3 \pi$, où β_1 , β_2 et β_3 désignent des nombres algébriques, est nul ou transcendant.

3. Indépendance algébrique.

Comme l'a remarqué MASSER, le résultat suivant (7), qui est dû à ČUDNOVSKIJ [8], permet de résoudre le problème de la transcendance de $\Gamma(1/4)$ et de $\Gamma(1/3)$. Nous considérons une fonction elliptique de Weierstrass $\wp$, d'invariants g_2 et g_3 algébriques. Soient $\{\omega_1 , \omega_2\}$ un couple de périodes fondamentales de $\wp$, $\{\eta_1 , \eta_2\}$ les pseudo-périodes qui leur sont associées.

Alors :

(7) Deux des nombres $\omega_1 , \omega_2 , \eta_1 , \eta_2$ sont algébriquement indépendants (sur $\mathbb{Q}$).

Pour la démonstration (qui faisait d'ailleurs l'objet de l'exposé oral), nous renvoyons à [9]. En voici le principe. On suppose que (7) n'est pas vérifié. La relation de Legendre

(8) $$\eta_2 \omega_1 - \eta_1 \omega_2 = 2i\pi$$

entraîne alors que le corps $\mathbb{Q}(\omega_1 , \omega_2 , \eta_1 , \eta_2)$ est une extension algébrique de $\mathbb{Q}(\pi)$. Dans ces conditions, on peut construire une suite $\{P_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{Z}[X]$, de degré $\ll N$, de taille (logarithmique) $\ll N \log N$, tels que :

$$\log|P_N(\pi)| \ll - N^{5/2} .$$

On invoque alors le lemme suivant, dû à FEL'DMAN [3] :

(9) Pour tout élément non nul P de $\underset{\sim}{Z}[X]$, de degré $\ll d$, de taille $\ll h$, on a

$$\log|P(\pi)| \gg - d(1 + d \log d + h) \log(2 + d \log d + h) .$$

D'où contradiction.

Posons, pour conclure ce paragraphe, la <u>conjecture</u> suivante.

(10) Si p n'a pas de multiplication complexe, les nombres ω_1 et ω_2 sont algébriquement indépendants.

4. Applications.

Dans [7], MASSER a démontré :

(11) Si p admet une multiplication complexe, l'espace vectoriel engendré par 1, ω_1, ω_2, η_1, η_2 et π sur $\overline{\underset{\sim}{Q}}$ est de dimension ≤ 4 (et en fait égale à 4).

On déduit de la conjonction de (7), (8) et (11) :

(12) Si p admet une multiplication complexe, les nombres ω_1 et π sont algébriquement indépendants.

Reprenant alors, pour les courbes H_3' et H_4', les expressions (2.b) et (2.c), on obtient :

(13) <u>Les nombres</u> $\Gamma(1/4)$ <u>et</u> $\Gamma(1/3)$ <u>sont transcendants</u>.

<u>Remarque</u>. - On peut démontrer (13) sans faire appel à (8) et (11), qui expriment dans ce cas des résultats classiques. Considérons en effet les nombres :

$$\eta_1^*(\tau) = \omega_2 \, \eta_1(\omega_1 , \omega_2) = \textstyle\sum_n \sum_m' \tau/(m\tau + n)^2$$

$$\eta_2^*(\tau) = \omega_2 \, \eta_2(\omega_1 , \omega_2) = \textstyle\sum_m \sum_n' 1/(m\tau + n)^2 .$$

On a $\eta_2^*(- 1/\tau) = \tau\eta_1^*(\tau)$. D'autre part, η_2^*, qui est lié à la fonction P de Ramanujan, est "presque modulaire" de poids 2, en ce sens que

$$\eta_2^*(- 1/\tau) = \tau^2 \, \eta_2(\tau) + 2i\pi\tau .$$

Ces relations entraînent, dans le cas de la courbe H_4', avec $\tau = \omega_1/\omega_2 = i$,

$$\eta_2 = \pi/\omega_2 \ ; \qquad \eta_1 = \pi/\omega_1 \ ;$$

(2.b) et (7) permettent alors de conclure. Le même raisonnement s'applique à l'étude de H_3'.

Pour terminer, nous signalerons que le résultat de ČUDNOVSKIJ résoud, en l'améliorant, une conjecture de SIEGEL. On déduit de [1] que, lorsque τ est un nombre imaginaire quadratique non congru à i ou j modulo $SL_2(\underset{\sim}{Z})$, le nombre $\pi j'(\tau)$ est transcendant. Dans [5], SIEGEL demande s'il en est de même du nombre $j'(\tau)$. Les résultats de [7] permettent de répondre par l'affirmative. Mais (7) entraîne que, sous les mêmes hypothèses, les nombres π et

$$j'(\tau) = 18 \frac{\omega_1^2}{2i\pi} \frac{g_3}{g_2} j(\tau)$$

sont algébriquement indépendants.

BIBLIOGRAPHIE

[1] SIEGEL (C. L.). - Über die Perioden elliptischer Funktionen, J. reine und ang. Math., t. 167, 1932, p. 62-69.

[2] SCHNEIDER (T.). - Zur Theorie der Abelschen Funktionen und Integrale, J. reine und ang. Math., t. 183, 1941, p. 110-128.

[3] FEL'DMAN (N. I.). - Approximation de certains nombres transcendants, I [en russe], Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., t. 15, 1951, p. 53-74.

[4] LANG (S.). - Transcendental points on group varieties, Topology, London, t. 1, 1962, p. 313-318.

[5] SIEGEL (C. L.). - Bestimmung der elliptischen Modulfunktion durch eine Transformationsgleichung, Abh. math. Seminar Univ. Hamburg , t. 27, 1964, p. 32-38.

[6] COATES (J.). - Linear relations between $2\pi i$ and the periods of two elliptic curves, "Diophantine approximations and its applications" [Ed. C. F. Osgood], p. 77-99. - New York, Academic Press, 1973.

[7] MASSER (D. W.). - Elliptic functions and transcendence. - Berlin, Springer-Verlag, 1975 (Lecture Notes in Mathematics, 437).

[8] ČUDNOVSKIJ (G. V.). - Algebraic independence of constants connected with the functions of analysis (8 pages manuscrites, 1975).

[9] WALDSCHMIDT (M.). - Les travaux de G. V. Čudnovskij sur les nombres transcendants, Séminaire Bourbaki, 28e année, 1975/76, n° 488, 19 p.

(Texte reçu le 17 décembre 1976)

Daniel BERTRAND
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
Plateau de Palaiseau
92128 PALAISEAU CEDEX