MICHEL WALDSCHMIDT

# Une mesure de transcendance de $e^{\pi}$

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 17, n° 2 (1975-1976), exp. n° G4, p. G1-G5

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_2_A10_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de théorie des nombres)
17e année, 1975/76, n° G4, 5 p.



3 novembre 1975

# UNE MESURE DE TRANSCENDANCE DE $e^{\pi}$

par Michel WALDSCHMIDT

## 1. Introduction.

La transcendance du nombre $e^{\pi}$, conjecturée par D. HILBERT en 1900, a été démontrée dès 1929 par A. O. GEL'FOND [4]. Trois ans plus tard, J. F. KOKSMA et J. POPKEN [6] montraient que, pour tout nombre algébrique $\alpha$, et pour tout $\varepsilon > 0$,

$$|e^{\pi} - \alpha| \gg_{D,\varepsilon} \exp\{-(4 + \varepsilon)(\log H)^2 (\log\log H)^{-1}\} ,$$

où $H \geqslant 3$ est la hauteur de $\alpha$ (maximum des valeurs absolues des coefficients du polynôme minimal de $\alpha$ sur $\underset{\sim}{Z}$), $D$ le degré de $\alpha$, et où le symbole $\gg_{D,\varepsilon}$ (notation de VINOGRADOV) signifie $\geqslant C(D, \varepsilon)$, avec une constante $C$ ne dépendant que de $D$ et $\varepsilon$. (Ainsi $\gg$ correspond à une constante absolue).

En 1949, A. O. GEL'FOND (cf. [5]), grâce à ses travaux sur l'indépendance algébrique, obtint une mesure de transcendance pour les nombres de la forme $a^b$, d'où l'on déduit (quand $a = e^{i\pi}$ et $b = -i$) :

$$\log|e^{\pi} - \alpha| \gg_{\varepsilon} -D^3(1 + \log D)^{-3} S(\log S)^{2+\varepsilon} ,$$

où $S \geqslant 2$ est défini par $S = D + \log H$. Ce résultat a été raffiné par P. L. CIJSOUW [3] en 1972 :

$$|e^{\pi} - \alpha| \gg \exp\{-10^{15} D^2 S(\log S)^2\} .$$

En 1973, A. BAKER déduisit de sa minoration de $|\beta \log \alpha_1 - \log \alpha_2|$, dans le cas $\beta = -i$, $\log \alpha_1 = i\pi$, $\alpha_2 = \frac{p}{q}$, la meilleure mesure d'irrationnalité actuellement connue pour $e^{\pi}$ :

$$\log|e^{\pi} - \frac{p}{q}| \gg -(\log q)(\log\log q) .$$

Plus généralement, on déduit du théorème principal de [1] la minoration (pour $H \geqslant 3$)

$$\log|e^{\pi} - \alpha| \gg_D -(\log H)(\log\log H) .$$

Le calcul de la constante en fonction de $D$ conduit malheureusement à de grandes valeurs ; ainsi le théorème 1 de [2] donne

$$\log|e^{\pi} - \alpha| \geqslant -(33\, D)^{400} (\log H)(\log\log H) .$$

S'il est clair que l'exposant de $D$ peut être amélioré, il ne semble pas qu'actuellement cette méthode permette d'obtenir une aussi bonne dépendance en $D$ que dans le résultat de CIJSOUW. Néanmoins une combinaison de la méthode de SCHNEIDER et de certaines idées de [2] permet de montrer [7]

$$\log|e^{\pi} - \alpha| \gg -10^{10} D^3 \log D)^{-3} S(\log S)^2 .$$

Le théorème de [7] a été écrit pour une situation plus générale, et clairement peut-être raffiné dans le cas particulier de $e^{\pi}$ pour conduire, au moins, au résultat de CIJSOUW, mais maintenant il semble difficile d'obtenir ainsi une dépendance en $H$ aussi bonne que BAKER !

Nous montrons ici comment la méthode de SCHNEIDER seule permet de démontrer l'énoncé de CIJSOUW. Ainsi, quatre méthodes auront été utilisées pour démontrer une mesure de transcendance de $e^{\pi}$, successivement

- les séries d'interpolation [4] et [6],
- la méthode de transcendance de GEL'FOND [5] et [3],
- la méthode de BAKER [1] et [2],
- la méthode de SCHNEIDER, que nous exposons ici.

La démonstration de [7] utilise d'abord la fonction auxiliaire de la méthode de SCHNEIDER, puis la technique de réduction de "Sharpening III" de BAKER.

## 2. Théorème et conjecture.

Le théorème que nous allons démontrer est le suivant.

THÉORÈME. - Il existe une constante absolue $C > 0$, effectivement calculable, telle que, pour tout nombre algébrique $\alpha$ de degré $D$ et de hauteur $H$, on ait

$$|e^{\pi} - \alpha| > \exp\{- CD^2 S(\log S)^2\} ,$$

où $S = D + \log H$.

L'ordre de grandeur de $C$ est $10^{10}$, mais il n'est pas intéressant d'expliciter les calculs tant que le terme parasite $(\log S)^2$ n'aura pas disparu. Il serait extrêmement souhaitable d'utiliser la méthode présentée ici pour démontrer le résultat de BAKER, c'est-à-dire essentiellement pour remplacer $(\log S)^2$ par $\log S$, mais de manière surprenante ce problème semble difficile. BAKER a obtenu cette amélioration en introduisant dans sa fonction auxiliaire les polynômes d'interpolation déjà utilisés par FEL'DMAN pour d'autres mesures de transcendance. Il serait naturel, ici, par analogie, d'introduire également des polynômes d'interpolation pour l'anneau des entiers de Gauss. De tels polynômes seraient bien utiles aussi pour résoudre le problème de l'indépendance algébrique de $\pi$ et de $e^{\pi}$, malheureusement leur existence est improbable [8] !

Pour connaître le meilleur résultat possible, il suffit d'utiliser le principe des tiroirs : pour tout entier $H \geq 1$ et tout entier $D \geq 1$, il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{Z}[X]$ de hauteur $\leq H$ et de degré $\leq D$ tel que

$$|P(e^{\pi})| \leq \exp\{- D(\log H + \pi + 1)\} ;$$

en particulier, pour tout entier $H \geq 1$, il existe $p/q \in \mathbb{Q}$ avec $0 < q \leq H$ et

$$|e^{\pi} - \frac{p}{q}| \leq \exp\{- (2 \log H + \pi + 1)\} ,$$

et, plus généralement, pour tout $H \geq 1$ et $D \geq 1$ entiers, il existe un nombre algébrique $\alpha$ de hauteur $\leq H$ et de degré $\leq D$ tel que

$$|e^{\pi} - \alpha| \leq \exp\{-2D(\log H + 2D + \frac{\pi + 1}{2})\} .$$

On peut <u>conjecturer</u> qu'il existe une constante absolue $C_0 > 0$ telle que, pour tout nombre algébrique $\alpha$ de hauteur $H$ et de degré $D$, on ait

$$|e^{\pi} - \alpha| > \exp\{-C_0 D(\log H + D)\} .$$

Pour $D = 1$ cela signifierait

$$|e^{\pi} - \frac{p}{q}| > q^{-C_1} \quad \text{pour} \quad q \geq 2 ,$$

avec une constante absolue $C_1 > 0$, mais même ce problème n'est pas résolu. Il est donc prématuré de conjecturer que $C_1 = 2 + \varepsilon$ convient pour $q \gg_{\varepsilon} 1$, à plus forte raison de demander si $q^{\varepsilon}$ peut alors être remplacé, par exemple, par une puissance convenable de $\log q$.

## 3. Démonstration du théorème.

Remarquons d'abord que le résultat est trivial pour $S = 1$. Comme les nombres algébriques de degré borné et de hauteur bornée forment un ensemble fini, on peut supposer $S$ suffisamment grand. Plus précisément, nous désignons par $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ des constantes absolues (facilement calculables), et par $\nu$ et $S_0$ des entiers suffisamment grands. Nous supposons qu'il existe un nombre algébrique $\alpha$ de degré $D$ et de hauteur $H$, avec $S = D + \log H \geq S_0$, vérifiant

$$|e^{\pi} - \alpha| < \exp(-\nu^7 \Delta) ,$$

avec $\Delta = D^2 S(\log S)^2$. Nous obtiendrons une contradiction, ce qui démontrera le théorème.

On définit des entiers $K$, $L$, $M$, $N$ par

$$K = [\nu^5 DS \log S] ,$$

$$L = [\nu^2 D \log S] ,$$

$$M = [\nu^3 D \log S] ,$$

$$N = [\nu^3 DS \log S] .$$

Ce choix est fait de telle manière que les quantités

$$LN , \ DK \log N , \ LMS$$

soient à peu près égales à $\nu^5 \Delta$ (à un facteur multiplicatif 4 près), tandis que

$$M.N \ \text{et} \ K.L$$

valent à peu près $\nu^6 \Delta$ et $\nu^7 \Delta$ respectivement (majorer $\log N$ par $3 \log S$, en supposant $S_0$ suffisamment grand par rapport à $\nu$).

La remarque essentielle est la suivante : Si

$$a_{k,\ell,d} \qquad (0 \leqslant k < K\ ,\quad 0 \leqslant \ell < L\ ,\quad 0 \leqslant d < D)$$

sont des entiers rationnels vérifiant

$$\log \max_{k,\ell,d} |a_{k,\ell,d}| \leqslant \nu^5 \Delta\ ,$$

alors la valeur de la fonction

$$F(z) = \Sigma_k\ \Sigma_\ell\ \Sigma_d\ a_{k,\ell,d}\ \alpha^d\ z^k\ e^{\ell\pi z}$$

en un point

$$z = m + ni \qquad (1 \leqslant m \leqslant \gamma_1\ M\ ,\quad 1 \leqslant n \leqslant \gamma_1\ N)\ ,$$

pour $m$ et $n$ entiers rationnels, est proche du nombre algébrique

$$\Phi_{m,n} = \Sigma_k\ \Sigma_\ell\ \Sigma_d\ a_{k,\ell,d}(-1)^{\ell n}(m + ni)^k\ \alpha^{\ell m+d}\ ;$$

plus précisément

$$|F(m + ni) - \Phi_{m,n}| < |e^\pi - \alpha|\ \exp(\gamma_2\ \nu^5\ \Delta) < \exp\{-\tfrac{1}{2}\ \nu^7\ \Delta\}\ .$$

Nous effectuons la démonstration en 4 étapes.

1° On choisit les entiers rationnels $a_{k,\ell,d}$ non tous nuls, de telle manière que

$$\Phi_{m,n} = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant m < M\ ,\quad 0 \leqslant n < N\ .$$

Pour cela on doit résoudre un système de $MN$ équations où $DKL$ inconnues $a_{k,\ell,d}$, dont les coefficients sont

$$(-1)^{\ell n}(m + ni)^k\ \alpha^{\ell m+d}\ .$$

En utilisant une version raffinée du lemme de Siegel ([3] lemmes 4.8, 4.9 et [7] lemme 4), on obtient

$$0 < \max|a_{k,\ell,d}| < \exp(\gamma_3\ \nu^4\ \Delta) < \exp(\nu^5\ \Delta)\ .$$

2° D'après un résultat de TIJDEMAN ([3], lemme 4. 13), il existe des entiers $m_0$, $n_0$, avec $0 \leqslant m_0 \leqslant \gamma_1\ M$ , $0 \leqslant n_0 \leqslant \gamma_1\ N$ , tels que

$$|F(m_0 + n_0\ i)| > \exp\{-\gamma_4\ \nu^6\ \Delta\}\ .$$

Pour cela, on utilise la minoration

$$\max_{k,\ell} |\Sigma_d\ a_{k,\ell,d}\ \alpha^d| > \exp\{-\gamma_5\ \nu^5\ \Delta\}$$

qui découle du lemme 4.6 de [3] (ou du lemme 3 de [7]). On peut en fait choisir $\gamma_1 = 2$ ; le terme principal qui intervient ici dans la minoration de Tijdeman est une constante multipliée par $M.N$ ; les autres termes sont majorées essentiellement par $\nu^5\ \Delta$.

3° On améliore la minoration de $|F(m_0 + n_0\ i)|$.

Pour cela on utilise la remarque préliminaire :

$$|F(m_0 + n_0\ i)| - \Phi_{m_0,n_0}| < \exp\{-\tfrac{1}{2}\ \nu^7\ \Delta\}\ .$$

En comparant avec la minoration de $|F(m_0 + n_0\ i)|$ obtenue précédemment, on en déduit $\Phi_{m_0,n_0} \neq 0$. On minore maintenant $|\Phi_{m_0,n_0}|$ en utilisant de nouveau le lemme 4.6 de [3] (ou le lemme 3 de [7]) :

$$|\Phi_{m_0,n_0}| > \exp\{-\gamma_6 \nu^5 \Delta\} .$$

On en déduit

$$|F(m_0 + n_0 i)| > \exp\{-\gamma_7 \nu^5 \Delta\} .$$

4° On majore $|F(m_0 + n_0 i)|$. On utilise pour cela les inégalités

$$|F(m + ni)| < \exp\{-\tfrac{1}{2} \nu^7 \Delta\} \qquad (0 \leq m < M , \quad 0 \leq n < N)$$

qui découlent du premier pas et de la remarque préliminaire. On emploie alors une formule d'interpolation (par exemple [3] lemme 4.10, ou [7] lemme 6) sur un disque de rayon $\gamma_8 N$. On obtient

$$|F(m_0 + n_0 i)| < \exp\{ -\gamma_9 \nu^6 \Delta\} .$$

Conclusion. - Les troisième et quatrième pas sont incompatibles, ce qui fournit la contradiction attendue.

Remarque finale. - C'est la relation $e^{i\pi} = -1$ qui nous a permis d'obtenir l'exposant 2 pour le degré, au lieu de 3. La même méthode s'applique à $a^b$, à condition d'assurer $DLN \leq \nu^5 \Delta$ ; mais alors on peut prendre un rayon $\gamma_8 DN$ dans la formule d'interpolation, ce qui donne (cf. [7]) :

$$\log|a^b - \alpha| \gg_{a,b} - D^3(1 + \log D)^{-3} S(\log S)^2 .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAKER (A.). - A central theorem in transcendance theory, "Diophantine approximation and its applications", p. 1-23. - New York, Academic Press, 1973.

[2] BAKER (A.). - The theory of linear forms in logarithms, "Transcendence theory and its applications". - New York, Academic Press, 1977 (à paraître).

[3] CIJSOUW (P. L.). - Transcendence measures. - Amsterdam, Academic Proefschrift, 1972.

[4] GEL'FOND (A. O.). - Sur les nombres transcendants, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 189, 1929, p. 1224-1226.

[5] GEL'FOND (A. O.). - Transcendental and algebraic numbers [Traduit de l'édition russe (Moscou, 1952)]. - New York, Dover Publ., 1960.

[6] KOKSMA (J. F.) und POPKEN (J.). - Zur Transzendenz von $e^\pi$, J. für die reine und angew. Math., t. 168, 1932, p. 211-230.

[7] MIGNOTTE (M.) and WALDSCHMIDT (M.). - Linear forms in two logarithms and Schneider's method (à paraître).

[8] WALDSCHMIDT (M.). - Polya's theorem by Schneider's method, Acta Math. Acad. Sc. Hungar., t. 31, 1978 (à paraître).

Michel WALDSCHMIDT
Mathématiques, Tour 46
Université P. et M. Curie [Paris-VI]
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05

(Texte reçu le 18 décembre 1976)