Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Khyra Gérardin

Quotient d'Hadamard de séries rationnelles à plusieurs variables non commutatives

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 17, nº 1 (1975-1976), exp. nº 5, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_1_A5_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres (Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
17e année, 1975/76, n° 5, 11 p.

3 novembre 1975

QUOTIENT D'HADAMARD DE SÉRIES RATIONNELLES À PLUSIEURS VARIABLES NON COMMUTATIVES

par Khyra GÉRARDIN

Le but de cet exposé est d'étendre un résultat de Martine PATHIAUX, concernant le quotient d'Hadamard de 2 séries rationnelles à une variable, au quotient d'Hadamard de séries rationnelles à plusieurs variables non commutatives.

Rappelons les notations : Soient X un ensemble fini appelé alphabet, et X^* le monoïde libre qu'il engendre. Pour tout $f \in X^*$, $|f|$ désigne la longueur du mot f, c'est-à-dire le nombre d'éléments de X qui interviennent dans l'écriture de f, si $f \in XX^*$. Si $f = \varepsilon$ le mot vide de X^*, on dit que $|f| = 0$. Lorsque $|X| = 1$, alors $X^* = \underset{\sim}{N}$.

Dans ce cas, on a le théorème suivant :

THÉORÈME 1 [3]. - <u>Soit</u> $a = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ <u>une série rationnelle à coefficients entiers algébriques</u>. <u>Soient</u> P_1, P_2 <u>deux polynômes à coefficients entiers algébriques</u>. <u>Soient</u> μ_1, μ_2 <u>deux entiers algébriques</u>. <u>Si</u>

$$b_n = \frac{a_n}{P_1(n)\mu_1^n - P_2(n)\mu_2^n}$$

<u>est un entier algébrique pour tout</u> $n \geq 0$, <u>alors la série</u> $\sum_n b_n X^n$ <u>est rationnelle</u>.

Si $|X| \geq 2$, soit $a = \sum_{f \in X^*} (a, f) f$ une série rationnelle sur X, pour tout $f \in X^*$, (a, f) est le coefficient de f dans le développement de la série a.

On suppose que (a, f) est un entier algébrique pour tout $f \in X^*$. Soient P_1 et P_2 deux polynômes à coefficients entiers algébriques. Soient μ_1 et μ_2 deux entiers algébriques. Si

$$(b, f) = \frac{(a, f)}{P_1(|f|)\mu_1^{|f|} - P_2(|f|)\mu_2^{|f|}}$$

est un entier algébrique pour tout $f \in X^*$, on a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 1'. - <u>La série</u> $b = \sum_{f \in X^*} (b, f) f$ <u>est rationnelle</u>.

<u>Démonstration</u>. - Soit $K = \underset{\sim}{Q}(\zeta)$ une extension algébrique de degré s, contenant les coefficients de a, les coefficients des polynômes P_1, P_2, ainsi que μ_1, μ_2. Si $x \in K$, $x = x^{(1)}, x^{(2)} \ldots x^{(s)}$ sont les conjugués de x sur $\underset{\sim}{Q}$.

Ceci permet de déterminer les cas suivants :

<u>1er cas</u> : $|\mu_1| \neq |\mu_2|$

<u>2e cas</u> : μ_2/μ_1 est une racine de l'unité.

<u>3e cas</u> : $|\mu_2^{(\nu)}| = |\mu_1^{(\nu)}|$, $\forall\ \nu \in (1 , 2 , \ldots , s)$, et μ_2/μ_1 n'est pas une unité.

<u>Premier cas</u> : $|\mu_1| \neq |\mu_2|$.

(A) Les polynômes P_1 et P_2 sont de degré nul, c'est-à-dire $P_1 = c_1$, $P_2 = c_2$, et $|\mu_1| > |\mu_2|$. Soit

$$(b , f) = \frac{(a , f)}{c_1 \mu_1^{|f|} - c_2 \mu_2^{|f|}} ,$$

$$(b , f) = \frac{(a , f)}{c_1 \mu_1^{|f|}[1 - (c_2/c_1)(\mu_2/\mu_1)^{|f|}]} = \frac{(a , f)}{c_1 \mu_1^{|f|}} \sum_{r\geq 0} (\frac{c_2}{c_1})^r (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{r|f|} .$$

Or, pour tout $r \geq 1$, on a :

$$(b , f) = \frac{(a , f)}{c_1 \mu_1^{|f|}} [1 + (\frac{c_2}{c_1})(\frac{\mu_2}{\mu_1})^{|f|} + \ldots + (\frac{c_2}{c_1})^{r-1} (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{(r-1)|f|}]$$
$$+ \frac{(a , f)}{c_1 \mu_1^{|f|}} \times (\frac{c_2}{c_1})^r \times (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{r|f|} \times 1/(1 - \frac{c_2}{c_1} (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{|f|}) .$$

Pour tout $r \geq 1$, la série de terme général

$$\frac{(a , f)}{c_1 \mu_1^{|f|}} \times [1 + (\frac{c_2}{c_1})^{|f|} + \ldots + (\frac{c_2}{c_1})^{r-1} \times (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{(r-1)|f|}]$$

est rationnelle. En effet, c'est une combinaison linéaire de produits de Hadamard de séries rationnelles [4].

Examinons la série de terme général :

$$\frac{(a , f)}{c_1 \mu_1^{|f|}} \times (\frac{c_2}{c_1})^r \times (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{r|f|} \times 1/(1 - \frac{c_2}{c_1} (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{|f|})$$
$$= \frac{(a , f)}{c_1 \mu_1^{|f|} - c_2 \mu_2^{|f|}} \times (\frac{c_2}{c_1})^r \times (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{r|f|} .$$

Soit

$$c = \sum_{f\in X^*} \frac{(a , f)}{c_1 \mu_1^{|f|} - c_2 \mu_2^{|f|}} \times (\frac{c_2}{c_1})^r \times (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{r|f|} f .$$

On désignera par D_f le déterminant de Hankel associé à la série c et au mot de la manière suivante : Sur X^* , on adopte l'ordre suivant $g \leq f$ si $|g| < |f|$, ou si $|g| = |f|$, alors g précède g lexicographiquement.

Etant donné un mot de X^* , on notera D_f le déterminant de Hankel associé à la série c et au mot f le déterminant, dont les lignes et les colonnes sont indexées par les mots g , $g \in X^*$ et $g \leq f$. L'élément (g , h) de ce déterminant est le coefficient du mot gh dans la série c . Or ce coefficient n'est autre que

$$\frac{(a\ ,\ gh)}{c_1\ \mu_1^{|g|+|h|} - c_2\ \mu_2^{|g|+|h|}} \times \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^r \times \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{r(|g|+|g|)} .$$

On peut écrire simplement le terme proportionnel à cet élément, que nous noterons $(D_f)_{(g,h)}$.

Soit D'_f le déterminant dont les éléments $(D'_f)_{(g,h)}$ sont :

$$(D'_f)_{(g,h)} = \frac{(a\ ,\ gh)}{c_1\ \mu_1^{|g|+|h|} - c_2\ \mu_2^{|g|+|h|}} \times \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{r[\,|g|+|h|\,]} .$$

L'idée de la démonstration est de montrer que $D'_f \longrightarrow 0$, lorsque $|f| \longrightarrow \infty$.

D'_f étant un entier algébrique, on en déduit que $D'_f = 0$ à partir d'un certain mot f . Donc la série c est rationnelle [1]. D'où la série b est rationnelle comme somme de séries rationnelles.

Soit $p = |f|$. Supposons $X = (x\ ,\ y)$; d'où $|X^n| = 2^n$, $\forall\ n \geq 0$. Soit q le nombre de mots g tels que

$$g \leqslant f \quad \text{et} \quad |g| = |f| = p .$$

Dans le déterminant D'_f , on peut mettre en facteur, dans chaque ligne d'indice g , le coefficient $(\mu_2/\mu_1)^{r|g|}$, et, dans chaque colonne d'indice g , le coefficient $(\mu_2/\mu_1)^{r|g|}$. On a donc

$$D'_f = \left(\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{r[\,2+n2^n+\ldots+(p-1)2^{p-1}\,]} \times \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{r\times p\times q}\right)^2 \times D''_f ,$$

où D''_f est le déterminant de Hankel associé à la série de terme général $(a\ ,\ gh)/(c_1\ \mu_1^{|g|+|h|} - c_2\ \mu_2^{|g|+|h|})$, or $(a\ ,\ gh)/(c_1\ \mu_1^{|g|+|h|} - c_2\ \mu_2^{|g|+|h|})$ est un entier algébrique pour tout couple $(g\ ,\ h)$.

On va démontrer que $D'_f \longrightarrow 0$ lorsque $p \longrightarrow \infty$. Or

$$D'_f = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{r[\,2^{2p}(p-2)^2+4+(p-2)\times 2^{p+1}+2pq\,]} \times D''_f .$$

Evaluons D''_f : Posons, pour tout $g \in X^*$,

$$(b\ ,\ g) = (d\ ,\ g) + (c\ ,\ g) ,$$

où $(b\ ,\ g)$ est le coefficient de g dans la série b , et, par définition,

$$(d\ ,\ g) = \frac{(a\ ,\ g)}{c_1\ \mu_1^{|g|}} \times \left[1 + \left(\frac{c_2}{c_1}\right)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{|g|} + \ldots + \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{r-1} \times \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{(r-1)|g|}\right] .$$

Or $(D''_f)_{(g,h)} = (d\ ,\ gh) + (c\ ,\ gh)$. D''_f est donc la somme de D'_f et de D'''_f (où D'''_f est le déterminant de Hankel associé à la série $\sum_{g\in X^*}(d\ ,\ g)g$) et d'une somme de déterminants dont une colonne au moins est une colonne de D''_f , et une colonne au moins est une colonne de D'''_f .

La fonction déterminant étant continue, on écrit qu'elle est continue au voisinage du point dont les coordonnées sont les colonnes de D'''_f .

La série $\sum_{g\in X^*}(d\ ,\ g)g$ étant rationnelle, on a :

$$D'''_f = 0 \quad \text{pour} \quad |f| \quad \text{assez grand.}$$

Or on a vu que $D'_f \longrightarrow 0$ très vite lorsque $|f| \longrightarrow \infty$.

Les déterminants, dont une colonne au moins est une colonne de D''_f et une au moins une colonne de D'''_f, ont une somme qui tend très vite vers 0 lorsque $|f| \longrightarrow \infty$. D'où

$$D''_f \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad |f| \longrightarrow \infty .$$

Or la série $b = \sum_{f \in X^*} (b\ ,\ f)f$ est à coefficients entiers algébriques. D'où

$$D''_f = 0 \quad \text{pour} \quad |f| \quad \text{assez grand.}$$

Donc la série $b = \sum_{f \in X^*} (b\ ,\ f)f$ est rationnelle. Ce qui démontre le théorème 1' dans le cas où le degré des polynômes P_1 et P_2 est 0.

(B) <u>Les polynômes</u> P_1 <u>et</u> P_2 <u>sont de degré non nul, et</u> $|\mu_1| > |\mu_2|$: Soit

$$(b\ ,\ f) = \frac{(a\ ,\ f)}{P_1(|f|)\mu_1^{|f|} - P_2(|f|)\mu_2^{|f|}} .$$

On démontre que la série de terme général $(b\ ,\ f) \times P_1(|f|) \times \mu_1^{|f|}$ est rationnelle.

On suppose qu'on peut lui associer une représentation inversible. Le théorème de Cantor permet de conclure [2]. Soit

$$(b',f) = (b,f) \times (P_1(|f|)\mu_1^{|f|}) = (a,f)/[1 - (P_2(|f|)/P_1(|f|)) \times (\mu_2/\mu_1)^{|f|}] .$$

Sauf au plus pour un nombre fini de termes $f \in X^*$, on a :

$$|(P_2(|f|)/P_1(|f|)) \times (\mu_2/\mu_1)^{|f|}| > 1 .$$

D'où, en éliminant ces termes $f_0\ ,\ \ldots\ ,\ f_n$ tels que $|f_i| \leqslant n$, on peut écrire

$$\begin{aligned}(b',f) &= (a,f)/[1 - \frac{P_2(|f|)}{P_1(|f|)} \times (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{|f|}] \\ &= (a,f) \times [1 + \frac{P_2(|f|)}{P_1(|f|)} \times (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{|f|} \times 1/(1 - \frac{P_2(|f|)}{P_1(|f|)} \times (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{|f|})] \\ &= (a,f) + \frac{P_2(|f|)}{P_1(|f|)} \times (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{|f|} \times (a,f)/[1 - \frac{P_2(|f|)}{P_1(|f|)} \times (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{|f|}] .\end{aligned}$$

De la même manière que précédemment on démontre que le déterminant de Hankel de la série de terme général

$$\frac{P_2(|f|)}{P_1(|f|)} \times (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{|f|} \times (a\ ,\ f)/[1 - \frac{P_2(|f|)}{P_1(|f|)} \times (\frac{\mu_2}{\mu_1})^{|f|}]$$

tend vers 0 très vite lorsque $|f| \longrightarrow \infty$.

Soit D_f le déterminant de Hankel dont les lignes et les colonnes sont indexées par les mots $(g\ ,\ h)$, où $g \leqslant f$ et $h \leqslant f$.

Soit q le nombre de termes f_i tels que $f_i \leqslant f$ et $|f_i| = |f| = p$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que

$$\left|\frac{P_2(|f|)}{P_1(|f|)} \times \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{|f|}\right| < 1 , \quad \forall\, f \in X^* .$$

D'où

$$D_f = \left(\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) \times \ldots \times \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{|f|}\right)^2 \times D'_f = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{(2^{2p}(p-2)^2+4+(p-2)\times 2^{p+1}+2p\varsigma)} \times D'_f ,$$

où D'_f est le déterminant de Hankel jusqu'à "l'ordre f " de la série de terme général

$$(a , g)/\left[1 - \frac{P_2(|g|)}{P_1(|g|)}\right] \times \frac{P_2(|g|)}{P_1(|g|)} .$$

D'où $D_f \longrightarrow 0$ très vite lorsque $|f| \longrightarrow \infty$.

De la même manière que précédemment on montre que le déterminant de Hankel D''_f jusqu'à "l'ordre f " de la série de terme général

$$(a , g) + \frac{P_2(|g|)}{P_1(|g|)} \times \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{|g|} \times (a , g)/\left[1 - \frac{P_2(|g|)}{P_1(|g|)} \times \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{|g|}\right]$$

tend vers 0^- très vite lorsque $|f|$ croît.

Comme D''_f est un entier algébrique, on a donc

$$D''_f = 0 \quad \text{pour} \quad |f| \quad \text{assez grand.}$$

Donc la série de terme général (b' , g) est rationnelle. On suppose qu'on peut associer une représentation inversible à la série de terme général $(b,g)P_1(|g|)$. Donc la série de terme général (b , g) est rationnelle.

<u>Deuxième cas</u> : μ_1/μ_2 <u>est une racine de l'unité</u>.

On énonce un certain nombre de lemmes faciles à démontrer :

Soit m un entier, $m \geqslant 1$, alors pour tout $i \in [0 , 1 , \ldots , m-1]$ on a le lemme suivant :

LEMME 1. - <u>La série</u> $\sum_{|f|\equiv i \pmod m} f$ <u>est rationnelle</u>.

LEMME 2. - <u>Soit</u> $a = \sum_{f\in X^*}(a , f)f$ <u>une série rationnelle, alors pour tout</u> $i \in [0 , 1 , \ldots , m-1]$, <u>la série</u> $a_i = \sum_{|f|\equiv i \pmod m} f$ <u>est rationnelle</u>.

Démontrons le théorème 1' dans le cas où μ_2/μ_1 est une racine de l'unité. Soit

$$\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^m = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^i \neq 1 , \quad \forall\, 0 \leqslant i \leqslant m-1 .$$

On démontre que pour tout i , $0 \leqslant i \leqslant m-1$, la série

$$\sum_{|f|\equiv i \pmod m}(b , f)f = \sum_{\substack{f\in X^* \\ |f|\equiv i \pmod m}} \frac{(a , f)f}{P_1(|f|)\mu_1^{|f|} - P_2(|f|)\mu_2^{|f|}}$$

est rationnelle : on en déduit que la série $\sum_{f\in X^*}(b\ ,\ f)f$ est rationnelle comme somme de m séries rationnelles.

Soit i , $0 \leqslant i \leqslant m-1$, et soit f un mot tel que $|f| \equiv i \pmod m$.

$$P_1(|f|)\mu_1^{|f|} - P_2(|f|)\mu_2^{|f|} = \mu_1^{|f|} \times [P_1(|f|) - P_2(|f|) \times (\frac{\mu_2}{\mu_1})^i]$$
$$= R_i(|f|) ,$$

où $R_i(|f|)$ est un polynôme, d'où, si $|f| \equiv i \pmod m$, on a

$$(b\ ,\ f) \times R_i(|f|) = (a_i\ ,\ f) .$$

La série $\sum_{|f|\equiv i \pmod m}(a\ ,\ f)f$ est rationnelle. On suppose qu'on peut lui associer une représentation inversible, d'où la série $\sum_{|f|\equiv i \pmod m}(b\ ,\ f)f$ est rationnelle.

Or $\sum_{f\in X^*}(b\ ,\ f)f = \sum_{0\leqslant i\leqslant m-1} \sum_{|f|\equiv i \pmod m}(b\ ,\ f)f$ est rationnelle comme somme de m séries rationnelles, ce qui démontre le théorème 1' dans le cas où $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ est une racine de l'unité.

Troisième cas : $|\mu_2^{(\nu)}| = |\mu_1^{(\nu)}|$, $\forall\ \nu \in [1\ ,\ \dots\ ,\ s]$ (s étant le degré de l'extension $\mathbb{Q}(\zeta)$).

Etant donnée une série : $c = \sum_{f\in X^*}(c\ ,\ f)f$, on notera :

$$c^{(\nu)} = \sum_{f\in X^*}(c\ ,\ f)^{(\nu)}\ f .$$

Démontrons un lemme préparatoire.

LEMME 3. - La série $c = \sum_{f\in X^*}(c\ ,\ f)f$ est rationnelle si, et seulement si, la série

$$c^{(\nu)} = \sum_{f\in X^*}(c\ ,\ f)^{(\nu)}\ f$$

est rationnelle.

Démonstration. - L'application $A \longrightarrow A'$, où A est l'anneau des entiers algébriques et A' l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\zeta)$, définie par $x \longmapsto x^{(\nu)}$, est un homomorphisme d'anneaux qu'on peut prolonger facilement à l'anneau des matrices $M_N(A)$ sur $M_N(A')$, $\forall\ N \geqslant 1$.

En effet, pour toute matrice M de $M_N(A)$, $M^{(\nu)}$ est la matrice dont les coefficients $(i\ ,\ j)$ s'écrivent $(M_{i,j}^{(\nu)})$, $(M_{i,j})$ étant le coefficient $(i\ ,\ j)$ de la matrice M .

Ceci permet d'éliminer les cas suivants :

$$|\mu_2^{(\nu)}| \neq |\mu_1^{(\nu)}| \quad \text{pour un certain} \quad \nu \in [1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ s]$$
$$|\mu_2^{(\nu)}| = |\mu_1^{(\nu)}| , \quad \forall\ \nu \in [1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ s] ,$$

et μ_2/μ_1 est une unité. Dans ce cas où μ_2/μ_1 est une racine de l'unité, on est

ramené au deuxième cas. Démontrons donc le théorème 1' dans le cas où

$$|\mu^{(\nu)}| = |\mu^{(\nu)}| \ , \quad \forall\ \nu \in [1,2,\ldots,s] \quad \text{et} \quad \mu_2/\mu_1 \quad \text{n'est pas une unité.}$$

L'idée de la démonstration est la suivante : les déterminants de Hankel, associés à la série

$$b = \sum_{f\in X^*} \frac{(a\ ,\ f)f}{P_1(|f|)\mu_1^{|f|} - P_2(|f|)\mu_2^{|f|}} \ ,$$

tendent vers 0 lorsque $|f| \longrightarrow \infty$. Ces déterminants sont des entiers algébriques. Ils sont donc nuls à partir d'une certaine longueur $|f|$. Donc la série b est rationnelle.

Sous ces hypothèses il existe un nombre premier p_1, et $\nu \in [1\ ,\ 2\ ,\ldots,\ s]$, tels que :

$$|\mu_1^{(\nu)}| \neq |\mu_2^{(\nu)}|_{p_1} \qquad [3].$$

Soit $|\mu_2^{(\nu)}/\mu_1^{(\nu)}|_{p_1} = \alpha < 1$. On montre que, pour un certain r, la série de terme général

$$\frac{(a\ ,\ f)^{(\nu)}}{(P_1(|f|)\mu_1^{|f|} - P_2(|f|)\mu_2^{|f|})^{(\nu)}} \times [P_1(|f|)^{(\nu)}]^r$$

est rationnelle. Grâce au théorème de Cantor en variables non commutatives, la série

$$\sum_{f\in X^*} \frac{(a\ ,\ f)^{(\nu)}\ f}{(P_1(|f|)\mu_1^{|f|} - P_2(|f|)\mu_2^{|f|})^{(\nu)}}$$

est rationnelle, et on procède comme dans le deuxième cas.

Pour tout $r \geqslant 1$, on a :

$$\frac{((a\ ,\ f)P_1(|f|)^r)^{(\nu)}}{(P_1(|f|)\mu_1^{|f|} - P_2(|f|)\mu_2^{|f|})^{(\nu)}}$$

$$= (a,f)^{(\nu)} \times \sum_{i=0}^{r-1} [P_2(|f|)\ P_1(|f|)^{r-1-i} \times \mu_2^{|f|} \times \mu_1^{-|f|(i+1)}]^{(\nu)}$$

$$+ (a,f)^{(\nu)} \times ((\frac{\mu_2}{\mu_1})^{r|f|})^{(\nu)} \times \frac{(P_2(|f|))^{(\nu)}}{(P_1(|f|)\mu_1^{|f|} - P_2(|f|)\mu_2^{|f|})^{(\nu)}} \ .$$

Or la série de terme général

$$(a\ ,\ f)^{(\nu)} \times \sum_{i=0}^{r-1} (P_2(|f|) \times P_1(|f|)^{r-1-i} \times \mu_2^{|f|i} \times \mu_1^{-|f|(i+1)})^{(\nu)}$$

est rationnelle comme combinaison linéaire de produits d'Hadamard de séries rationnelles. Examinons la série de terme général

$$(d,f)^{(\nu)} = (a,f)^{(\nu)} \times ((\frac{\mu_2}{\mu_1})^{r(|f|)})^{(\nu)} \times (\frac{P_2(|f|)}{P_1(|f|)\mu_1^{|f|} - P_2(|f|)\mu_2^{|f|}})^{(\nu)} \ .$$

Majorons le coefficient $(d\ ,\ f)^{(\nu)}$. Cela permettra la majoration du déterminant de Hankel associé à la série de terme général $(d\ ,\ f)^{(\nu)}$.

Grâce à la formule du produit pour les valuations, on en déduit que les déterminants de Hankel de la série de terme général $(d\ ,\ f)^{(\nu)}$ sont nuls à partir d'un certain rang. D n la série de terme général $(d\ ,\ f)^{(\nu)}$ est rationnelle. D'où la série de terme général :

$$\left(\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{r|f|}\right)^{(\nu)} \times \frac{((a\ ,\ f) \times P_2(|f|)^r)^{(\nu)}}{(P_1(|f|)\mu_1^{|f|} - P_2(|f|)\mu_2^{|f|})^{(\nu)}}$$

est rationnelle.

Or $(a\ ,\ f)^{(\nu)}$ étant un entier algébrique, $(P_2(|f|))^{(\nu)}$ étant un entier algébrique, on a donc

$$|(a\ ,\ f)^{(\nu)} \times P_2(|f|)^{(\nu)}|_p \leqslant 1$$

pour toute valuation p-adique, où p est un nombre premier.

Démontrons un lemme qui permet la majoration d'un déterminant connaissant la majoration des coefficients de ce déterminant.

Soit $D = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant n}$ où $a_{ij} \in \underset{\sim}{C}$.

LEMME 4. - <u>On a</u> $|D| \leqslant \Pi_{1\leqslant i\leqslant n} [|a_{i,1}| + \ldots + |a_{i,j}| + \ldots + |a_{i,n}|]$.

<u>Démonstration.</u> - Elle se fait par récurrence sur n : Si $n = 1$, alors $|D| = |a_{11}|$, la formule est immédiate. Supposons la formule vraie pour $n - 1$. D'où, en développant le déterminant D par rapport à la 1re ligne, et en notant $A_{j,1}$ le mineur associé au coefficient $a_{1,j}$, on a :

$$D = \Sigma_{1\leqslant j\leqslant n}\ a_{1,j} \times A_{j,1} .$$

Or $A_{j,1}$ est un déterminant d'ordre $n - 1$. On a

$$|A_{j,1}| \leqslant \Pi_{i\geqslant 2} [|a_{i,1}| + \ldots + |a_{i,j-1}| + |a_{i,j+1}| + \ldots + |a_{i,n}|]$$
$$\leqslant \Pi_{i\geqslant 2} [|a_{i,1}| + \ldots + |a_{i,j-1}| + |a_{i,j}| + |a_{i,j+1}| + \ldots + |a_{i,n}|] ,$$

pour tout j , or $D = \Sigma_{1\leqslant j\leqslant n}\ a_{1,j} \times A_{j,1}$.

$$|D| \leqslant \Sigma_{1\leqslant j\leqslant n}\ |a_{1,j}| \times |A_{j,1}| \leqslant (\Pi_{i\geqslant 2}\ |a_{i,1}| + \ldots + |a_{i,n}|)\Sigma_{1\leqslant j\leqslant n}\ |a_{1,j}|$$
$$|D| \leqslant \Pi_{1\leqslant i\leqslant n}\ (|a_{i,1}| + \ldots + |a_{i,n}|) .$$

<u>Cas particulier du lemme</u> 4. - Si K est un corps muni d'une valuation ultramétrique, notée $|\ |_p$, on a la majoration suivante :

$$|D|_p \leqslant \Pi_{1\leqslant i,j\leqslant n}\ \max|a_{i,j}|_p .$$

La démonstration se fait par récurrence sur n : Si $n = 1$, alors $|D|_p = |a_{11}|_p$ La formule est immédiate, or $D = \Sigma_{1\leqslant j\leqslant n}\ a_{1,j} \times A_{j,1}$. $A_{j,1}$ étant un déterminant

d'ordre $n-1$, on a donc

$$|A_{j,1}|_p \leqslant \prod_{\substack{k\neq j\\ 1\leqslant k\leqslant n\\ i\geqslant 2}} \max|a_{i,k}|_p .$$

Or $\max_{1\leqslant k\leqslant n, k\neq j, i\geqslant 2}|a_{i,k}|_p \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n, i\geqslant 2}|a_{i,k}|_p$. D'où

$$|D|_p \leqslant \max|A_{1,j}|_p \; |a_{1,j}|_p$$
$$\leqslant \max|a_{1,j}|_p \times \prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ i\geqslant 2}} \max|a_{i,k}|_p$$
$$|D|_p \leqslant \prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant i\leqslant n}} \max|a_{i,k}|_p .$$

Etudions la série de terme général

$$(c\ ,\ f)^{(\nu)} = \frac{(a\ ,\ f)^{(\nu)} \times P_2(|f|)^r)^{(\nu)}}{(P_1(|f|) \times \mu_1^{|f|} - P_2(|f|) \times \mu_2^{|f|})^{(\nu)}} \times ((\frac{\mu_2}{\mu_1})^{r|f|})^{(\nu)} .$$

On notera $D_f^{(\nu)}$ le déterminant dont les lignes et les colonnes sont indexées par les mots $(g\ ,\ h)$, où :

$$\varepsilon \leqslant g \leqslant f$$

$$\varepsilon \leqslant h \leqslant f$$

ε étant le mot vide de X^* , et le coefficient $(g\ ,\ h)$ de ce déterminant $D_f^{(\nu)}$ étant $D_{g,h}^{(\nu)} = (c\ ,\ gh)^{(\nu)}$.

Supposons $X = (x\ ,\ y)$, $|f| = q+1$. Soit t le nombre de mots $g \in X^*$ tels que

$$g \leqslant f \quad \text{et} \quad |g| = |f| .$$

$(P_1(|f|))^{(\nu)}$, $(P_2(|f|))^{(\nu)}$ sont des entiers algébriques. Il est immédiat qu'à partir d'une certaine longueur $|f|$ on a la relation

$$|(P_1(|f|)\mu_1^{|f|} - P_2(|f|)\mu_2^{|f|})^{(\nu)}|_{p_1} = |(P_1(|f|) \times \mu_1^{|f|})^{(\nu)}|_{p_1}$$

d'où

$$|(c\ ,\ f)^{(\nu)}|_{p_1} \leqslant \frac{\alpha^{r|f|}}{|(P_1(|f|) \times \mu_1^{|f|})^{(\nu)}|_{p_1}} .$$

$P_1(|f|)$ étant un entier algébrique et α étant tel que $0 < \alpha < 1$.

Il existe donc une certaine longueur $|f_0|$ du mot f à partir de laquelle

$$\alpha^{|f|} \times |P_1(|f|)^{(\nu)}|_{p_1}^{-1} \leqslant 1 .$$

D'où, pour tout mot f tel que $|f| \geqslant |f_0|$, on a l'inégalité suivante :

$$|(c\ ,\ f)^{(\nu)}|_{p_1} \leqslant \alpha^{(r-1)|f|} \times |(\mu_1^{(\nu)})^{-|f|}|_{p_1} .$$

Utilisant le lemme 4 en p-adique, on majore la valuation du déterminant $|D_f^{(\nu)}|_{p_1}$ en prenant $q \geq |f_0| + 1$.

$$|D^{(\nu)}|_{p_1} \leq \prod_{\substack{\varepsilon \leq g \leq f \\ \varepsilon \leq h \leq f}} \max |(c\ ,\ gh)^{(\nu)}|_{p_1}$$

$$|D_f^{(\nu)}|_{p_1} \leq (\alpha^{r-1} \times |\mu_1^{(\nu)}|_{p_1}^{-1})^2 \times \ldots \times (\alpha^{r-1} \times |\mu_1^{(\nu)}|_{p_1}^{-1})^{2i} \times \ldots \times (\alpha^{(r-1)(q+1)} \times |\mu_1^{(\nu)}|_{p_1}^{-q-1})^t$$

$$|D^{(\nu)}|_{p_1} \leq [\alpha^{r-1} |\mu_1^{(\nu)}|_{p_1}^{-1}]^{2(-1+(q-1)2^q)+(q+1)t} .$$

Majorons les valeurs absolues de $D_f^{(\sigma)}$, valeurs absolues prises dans $\underset{\sim}{C}$, où $\sigma \in [1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ s]$.

Pour tout σ , le lemme 4 permet d'écrire

$$|D_f^{(\sigma)}| \leq \prod_{\substack{\varepsilon \leq g \leq f \\ \varepsilon \leq h \leq f}} [|(c\ ,\ h)^{(\sigma)}| + \ldots + |(c\ ,\ gh)^{(\sigma)}| + \ldots + |(c\ ,\ gf)^{(\sigma)}|]$$

$$|D_f^{(\nu)}|_{p_1} \prod_{\substack{1 \leq \sigma_i \leq s \\ \sigma \neq (\nu)}} |D_f^{\sigma_i}| < (\alpha^{r-1} \times |\mu_1^{(\nu)}|_{p_1}^{-1})^{2(-1+(q-1)\times 2^q)+(q+1)t} \times B ,$$

avec $B = \prod_{1 \leq \sigma_i \leq s} \times \prod_{\varepsilon \leq g \leq f, \varepsilon \leq h \leq f} [|(c\ ,\ g)^{(\sigma_i)}| + \ldots + |(c\ ,\ gf)^{(\sigma_i)}|]$.

En notant $k = 2(-1 + (q-1)2^q) + (q+1)t$, le second membre de l'inégalité s'écrit :

$$\prod_{\varepsilon < h_i < f} |((c,h_1)\ldots(c,h_k))^{\sigma_1}| \ldots |(|c,h_{s_1}| \ldots |c,h_{s_k}|)^{\sigma_s}|\ (\alpha^{r-1} |\mu_1|_{p_1}^{-1})^k ,$$

où $\sigma_1\ \sigma_2 \ldots \sigma_s$ désigne les $\underset{\sim}{Q}$-isomorphismes de $k = \underset{\sim}{Q}(\zeta)$ dans $\underset{\sim}{C}$. Or

$$((c\ ,\ h_1) \ldots (c\ ,\ h_k))^{\sigma_1} \times \ldots \times ((c\ ,\ h_{s_1}) \ldots (c\ ,\ h_{s_k}))^{\sigma_s}$$

est un entier algébrique. Il existe donc un certain entier q et un certain entier r tels que

$$\prod_{\varepsilon \leq h_i \leq f} |((c,h_1)\ldots(c,h_k))^{\sigma_1} \ldots ((c,h_{s_1})\ldots(c,h_{s_k}))^{\sigma_s}|\ |\alpha^{r-1} |\mu_1)_{p_1}^{-1}|^k < 1$$

d'où $|D_f^{(\nu)}|_{p_1}\ |\prod_{1 \leq i \leq s} D_f^{(\sigma_i)}| < 1$ à partir d'une certaine longueur du mot f . Or D_f est un entier algébrique. D'où $|D_f|_p \leq 1$ pour tout nombre premier p . On a donc $\prod_p |D_f|_p \prod_{1 \leq \sigma_i \leq s} |D_f^{\sigma_i}| < 1$ pour tous les nombres premiers p . Donc $D_f = 0$.

La série de terme général $(c\ ,\ f)^{(\nu)}$ est rationnelle. D'où la série de terme général $(a\ ,\ f)/(P_1(|f|)\mu^{|f|} - P_2(|f|)\mu^{|f|})$ est rationnelle. Ceci termine la démonstration du théorème 1' dans tous les cas.

<u>Note</u> : Si $n = |X| \geq 3$, il suffit, dans les majorations données, de remplacer 2 par n , ce qui démontre le théorème 1' dans tous les cas où X est un alphabet fini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] FLIESS (Michel). - Sur certaines familles de séries formelles, Thèse Sc. math. Univ. Paris-VII, 1972.

[2] LAMÈCHE (Khyra GÉRARDIN). - Extension d'un théorème de G. Cantor à des séries rationnelles en variables non commutatives, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272, 1971, Série A, p. 296-298.

[3] PATHIAUX (Martine). - Algèbres de Hadamard de fractions rationnelles, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 267, 1968, Série A, p. 977-979.

[4] SCHÜTZENBERGER (M. P.). - On a theorem of R. Jungen, Proc. Amer. math. Soc., t. 13, 1962, p. 885-890.

(Texte reçu le 4 novembre 1975)

Khyra GÉRARDIN
12 rue Beccaria
75012 PARIS