Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Michel Waldschmidt

Transcendance dans les variétés de groupe (II)

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 17, nº 1 (1975-1976), exp. nº 2, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_1_A2_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
17e année, 1975/76, n° 2, 7 p.

13 octobre 1975

TRANSCENDANCE DANS LES VARIÉTÉS DE GROUPE (II)

par Michel WALDSCHMIDT

Dans un exposé précédent [6], nous avions étudié les sous-groupes à un paramètre, et nous considérions essentiellement des variétés linéaires ou abéliennes. Nous généraliserons ici certains de ces résultats aux variétés de groupe quelconques, puis aux sous-groupes à plusieurs paramètres. Cet exposé sera consacré à l'étude des valeurs en des points algébriques de sous-groupes analytiques, sans hypothèse de normalisation de ces sous-groupes.

Valeurs en des points algébriques d'homomorphismes analytiques. - Soit G une variété de groupe (c'est-à-dire un groupe algébrique connexe) définie sur le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques ; soit $\varphi : \mathbb{C}^n \longrightarrow G_{\mathbb{C}}$ un homomorphisme analytique ; il existe une application linéaire $\mathfrak{L}$ de $\mathbb{C}^n$ dans l'espace tangent T_G de G à l'origine, telle que $\varphi = \exp_G \circ \mathfrak{L}$. Quand $\mathfrak{L}$ est injective, on dit que φ est un sous-groupe à n paramètres de G.

Nous nous proposons de majorer le rang ℓ sur $\mathbb{Z}$ des sous-groupes Γ de $\overline{\mathbb{Q}}^n$ dont l'image par φ appartient à $G_{\overline{\mathbb{Q}}}$.

1. Sous-groupes à un paramètre.

Quand $n = 1$ et $\mathfrak{L} \neq 0$, φ est un sous-groupe à un paramètre de G. Considérons d'abord le cas d'un groupe linéaire $G = GL_N(\mathbb{C})$; il existe une matrice $M \in M_N(\mathbb{C})$ telle que $\varphi(t) = \exp(Mt)$. Si M est nilpotente, φ est une fonction rationnelle, et $\varphi(a) \in GL_N(\overline{\mathbb{Q}})$ pour tout $a \in \overline{\mathbb{Q}}$. Si M n'est pas nilpotente, M possède une valeur propre $\lambda \neq 0$; pour tout $t \in \mathbb{C}$, $e^{\lambda t}$ est une valeur propre de $\exp(Mt)$; donc si $\varphi(a) \in GL_N(\overline{\mathbb{Q}})$, alors $e^{\lambda a} \in \overline{\mathbb{Q}}$. Si a_1, a_2 sont deux nombres algébriques tels que $\varphi(a_1)$ et $\varphi(a_2)$ appartiennent à $GL_N(\overline{\mathbb{Q}})$, le théorème de Gel'fond-Schneider sur la transcendance de α^β montre que a_1, a_2 sont $\mathbb{Q}$-linéairement dépendants. Autrement dit, avec les notations précédentes :

$$G_{\mathbb{C}} = GL_N(\mathbb{C}) \ ; \quad n = 1 \ ; \quad \varphi \text{ irrationnel} \Longrightarrow \ell \leq 1 .$$

Considérons maintenant une variété abélienne, et, pour commencer, une variété de dimension 1, c'est-à-dire une courbe elliptique $\mathcal{E}$ paramétrée par une fonction $\wp$ de Weierstrass d'invariants g_2, g_3 algébriques :

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2 \wp - g_3 .$$

Quand $\mathcal{E}$ est plongée dans l'espace projectif $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, l'application exponentielle est

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{C}} \\ z &\longmapsto (1 , \wp(z) , \wp'(z)) ; \end{aligned}$$

soit

$$\mathcal{L} : \underset{\sim}{C} \longrightarrow \underset{\sim}{C}$$
$$t \longmapsto \lambda t$$

une application linéaire injective $(\lambda \neq 0)$.

Il est bien connu que, si (ω_1 , ω_2) est une base du réseau des périodes de $\wp$, on a $\wp'(\omega_1/2) = \wp'(\omega_2/2) = 0$, donc $\wp(\omega_1/2)$ et $\wp(\omega_2/2)$ sont algébriques. De plus, si $\wp$ admet une multiplication complexe, alors ω_2/ω_1 est algébrique ; choisissons $\lambda = \omega_1$, $a_1 = 1/2$, $a_2 = \omega_2/2\omega_1$; dans ce cas, on a donc $\ell \geq 2$. En fait, dans ce cas particulier, on peut déduire d'un théorème de Schneider ([5], théorème 16) $\ell \leq 2$; et on déduit de ce même théorème $\ell \leq 1$ quand $\mathcal{E}$ est une courbe elliptique sans multiplication complexe.

Dans l'exposé précédent ([6], théorème 1), nous avions démontré l'inégalité $\ell \leq 2$ pour tout sous-groupe à un paramètre d'une variété abélienne. Le schéma de la démonstration était le suivant : considérons une coordonnée projective f de φ , non constante ; à cause de la périodicité de la fonction théta de la variété abélienne, la fonction f est transcendante (sur $\underset{\sim}{C}(z)$) ; comme f est méromorphe dans $\underset{\sim}{C}$, d'ordre 2 , et prend aux points de Γ des valeurs algébriques (ou infinies), on est ramené à utiliser un critère de transcendance ([6], critère 2) dont voici un énoncé approximatif.

CRITÈRE C_1. - *Soient Γ un sous-groupe de $\overline{\underset{\sim}{Q}}$, de rang ℓ sur $\underset{\sim}{Z}$, et f une fonction méromorphe dans $\underset{\sim}{C}$, transcendante, d'ordre inférieur ou égal à ρ ; on suppose $f(\Gamma) \subset \overline{\underset{\sim}{Q}} \cup \{\infty\}$; sous certaines hypothèses techniques, on a $\ell \leq \rho$.*

En utilisant les majorations $\ell \leq 1$ et $\ell \leq 2$, obtenues dans les cas linéaire et abélien respectivement, nous allons démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 1. - *Soit $\varphi : \underset{\sim}{C} \longrightarrow G_{\underset{\sim}{C}}$ un sous-groupe irrationnel à un paramètre d'une variété de groupe G définie sur $\overline{\underset{\sim}{Q}}$. Soit Γ un sous-groupe de $\overline{\underset{\sim}{Q}}$, de rang ℓ sur $\underset{\sim}{Z}$, tel que $\varphi(\Gamma) \subset G_{\overline{\underset{\sim}{Q}}}$. Alors $\ell \leq 2$.*

Démonstration. - Soit L un sous-groupe linéaire maximal de G tel que G/L soit une variété abélienne A définie sur $\overline{\underset{\sim}{Q}}$, notons $\pi : G \longrightarrow A$ et $\pi^* : T_G \longrightarrow T_A$ les homomorphismes canoniques :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\pi} & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \exp_L} & & \uparrow{\scriptstyle \exp_G} & & \uparrow{\scriptstyle \exp_A} & & \\
0 & \longrightarrow & T_L & \longrightarrow & T_G & \xrightarrow{\pi^*} & T_A & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Si $\mathcal{L}(\underset{\sim}{C}) \subset T_L$, alors $\varphi(\underset{\sim}{C}) \subset L$, $\varphi(\Gamma) \subset L_{\overline{\underset{\sim}{Q}}}$, et on a $\ell \leq 1$.

Si $\mathcal{L}(\underset{\sim}{C})$ n'est pas contenu dans T_L , alors $\pi^* \circ \mathcal{L}$ n'est pas nul, donc $\exp_A \circ \pi^* \circ \mathcal{L}$ est un sous-groupe à un paramètre de A , et on a $\ell \leq 2$.

2. Homomorphismes de $\mathbb{C}^n$ dans $G_{\mathbb{C}}$.

(a) Cas linéaire. - Soit $\varphi : \mathbb{C}^n \longrightarrow GL_N(\mathbb{C})$ un homomorphisme analytique ; on a $\varphi(\overline{t}) = \exp(\mathcal{L}(\overline{t}))$, où $\mathcal{L}$ est une application linéaire de $\mathbb{C}^n$ dans $M_N(\mathbb{C})$:

$$\mathcal{L}(t_1 , \ldots , t_n) = M_1\, t_1 + \ldots + M_n\, t_n \ ;$$

comme φ est un homomorphisme, on a

$$\exp\{(M_i + M_j)t\} = \{\exp(M_i\, t)\}.\{\exp(M_j\, t)\} \ ,$$

d'où on déduit $M_i\, M_j = M_j\, M_i \quad (1 \leq i , j \leq n)$.

Inversement, si $M_1 , \ldots , M_n$ sont des matrices commutant deux à deux, l'application

$$\mathbb{C}^n \longrightarrow GL_N(\mathbb{C})$$

$$(t_1 ,\ldots, t_n) \longmapsto \exp(M_1\, t_1 +\ldots+ M_n\, t_n)$$

est un homomorphisme analytique. Par exemple,

$$(t_1 , t_2) \longmapsto \begin{pmatrix} 2^{t_1+t_2} & t_2\, 2^{t_1+t_2} \\ 0 & 2^{t_1+t_2} \end{pmatrix}$$

est un sous-groupe à deux paramètres de $GL_2(\mathbb{C})$, qui prend des valeurs algébriques en $(1 , 0)$, $(0 , 1)$, ainsi qu'en tous les points $(\alpha , -\alpha)$, $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$. Cet exemple montre qu'aucune majoration de ℓ n'est possible sans hypothèse supplémentaire. On peut faire porter la restriction soit sur l'homomorphisme φ, soit sur le sous-groupe Γ.

Commençons par imposer une condition sur Γ, l'homomorphisme φ étant seulement supposé irrationnel.

LEMME 2. - *Soit $\varphi : \mathbb{C}^n \longrightarrow GL_N(\mathbb{C})$ un homomorphisme analytique non rationnel. Soient $\overline{a}_1 , \ldots , \overline{a}_{n+1}$ des éléments de $\overline{\mathbb{Q}}^n$ tels que, pour tout $\overline{v} \in \mathbb{C}^n$, $\overline{v} \neq 0$, deux des produits scalaires $\overline{v}.\overline{a}_j$, $(1 \leq j \leq n + 1)$ soient $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. Alors les images de $\overline{a}_1 , \ldots , \overline{a}_{n+1}$ par φ n'appartiennent pas toutes à $GL_N(\overline{\mathbb{Q}})$.*

Démonstration. - D'après l'hypothèse, $\overline{a}_1 ,\ldots, \overline{a}_n$ sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendants ; notons $\beta_1 ,\ldots, \beta_n$ les nombres (algébriques) vérifiant

$$\overline{a}_{n+1} = \beta_1\, \overline{a}_1 + \ldots + \beta_n\, \overline{a}_n \ .$$

Montrons que $1 , \beta_1 , \ldots , \beta_n$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants ; sinon il existerait des entiers rationnels $c_0 , c_1 ,\ldots, c_n$, non tous nuls avec

$$c_0 + c_1\, \beta_1 + \ldots + c_n\, \beta_n = 0 \ ;$$

soit $\overline{v} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\overline{v}.a_k = c_k \quad (1 \leq k \leq n)$; par hypothèse, deux des nombres $c_1 ,\ldots, c_n$, $\overline{v}.\overline{a}_{n+1}$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, c'est-à-dire que $\overline{v}.a_{n+1} = - c_0$ est irrationnel ; contradiction.

Ecrivons φ sous la forme

$$\varphi(\overline{t}) = \exp(\textstyle\sum_{k=1}^{n} M_k \, t_k) \, .$$

Comme φ est irrationnel, l'une des matrices M_k a une valeur propre non nulle ; il existe un vecteur propre commun à $M_1, \ldots, M_n$, correspondant à des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ respectivement, avec $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq \overline{0}$.

Supposons $\varphi(\overline{a}_j) \in GL_N(\underset{\sim}{\overline{Q}})$ $(1 \leqslant j \leqslant n+1)$; alors le nombre $\alpha_j = \exp(\overline{\lambda}.\overline{a}_j)$, valeur propre de $\varphi(\overline{a}_j)$, est algébrique. Mais

$$\alpha_{n+1} = \alpha_1^{\beta_1} \ldots \alpha_n^{\beta_n} \, ,$$

ce qui contredit un théorème de BAKER ([1], théorème 2.4).

Nous allons utiliser le lemme 2 pour montrer le résultat suivant, où la restriction ne porte plus sur le sous-groupe Γ, mais sur l'homomorphisme φ.

LEMME 3. - <u>Soit</u> $\varphi : \underset{\sim}{C}^n \longrightarrow GL_N(\underset{\sim}{C})$ <u>un homomorphisme analytique</u> ; <u>on suppose que, pour tout</u> $\overline{\gamma} \in \underset{\sim}{\overline{Q}}^n$, $\overline{\gamma} \neq \overline{0}$, <u>l'homomorphisme</u> $z \longmapsto \varphi(\overline{\gamma}.z)$ <u>de</u> $\underset{\sim}{C}$ <u>dans</u> $GL_N(\underset{\sim}{C})$ <u>est irrationnel. Si</u> $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_\ell$ <u>sont des points</u> $\underset{\sim}{Q}$<u>-linéairement indépendants de</u> $\underset{\sim}{\overline{Q}}^n$, <u>dont les images par</u> φ <u>appartiennent à</u> $GL_N(\underset{\sim}{\overline{Q}})$, <u>alors</u> $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_\ell$ <u>sont</u> $\underset{\sim}{C}$<u>-linéairement indépendants</u> ; <u>en particulier</u> $\ell \leqslant n$.

On remarquera que l'hypothèse faite sur φ implique en particulier

$$\ker \mathfrak{L} \cap \underset{\sim}{\overline{Q}}^n = (0) \, .$$

<u>Démonstration du lemme</u> 3. - Commençons par démontrer l'inégalité $\ell \leqslant n$ par récurrence sur n ; pour $n = 1$, φ est un sous-groupe à un paramètre irrationnel, et nous avons obtenu $\ell \leqslant 1$ au §1 (on peut aussi appliquer le lemme 2 avec $n=1$). Supposons l'inégalité démontrée jusqu'au rang $n-1$. Si $\ell \geqslant n+1$, d'après le lemme 2, il existe $\overline{v} \in \underset{\sim}{C}^n$, $\overline{v} \neq \overline{0}$, tel que le rang sur $\underset{\sim}{Z}$ du sous-groupe de $\underset{\sim}{C}$ engendré par les produits scalaires $\overline{v}.\overline{a}_1, \ldots, \overline{v}.\overline{a}_{n+1}$ soit inférieur ou égal à 1 ; par exemple, si $\overline{v}.\overline{a}_{n+1}$ engendre ce sous-groupe, il existe $r_k \in \underset{\sim}{Q}$ tel que

$$\overline{v}.\overline{a}_k = r_k.\overline{v}.\overline{a}_{n+1} \, ,$$

pour $1 \leqslant k \leqslant n$; les éléments $\overline{a}'_1, \ldots, \overline{a}'_n$ de $\underset{\sim}{\overline{Q}}^n$, définis par

$$\overline{a}'_k = \overline{a}_k - r_k.\overline{a}_{n+1} \quad (1 \leqslant k \leqslant n)$$

sont alors $\underset{\sim}{Q}$-linéairement indépendants, mais $\underset{\sim}{C}$-linéairement dépendants, car orthogonaux à $\overline{v}$. Notons $\overline{a}'_1, \ldots, \overline{a}'_\nu$ (avec $1 \leqslant \nu \leqslant n-1$) une base du $\underset{\sim}{C}$-espace vectoriel engendré par $\overline{a}'_1, \ldots, \overline{a}'_n$; soit $\psi : \underset{\sim}{C}^\nu \longrightarrow GL_N(\underset{\sim}{C})$ l'homomorphisme analytique, défini par

$$\psi(z_1, \ldots, z_\nu) = \varphi(\overline{a}'_1 \, z_1 + \ldots + \overline{a}'_\nu \, z_\nu) \, .$$

Pour $\overline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_\nu) \in \overline{Q}^\nu$, $\overline{\beta} \neq \overline{0}$, l'homomorphisme $u \longmapsto \psi(\overline{\beta}.u) = \varphi(\overline{\gamma}.u)$, avec

$$\overline{\gamma} = \beta_1 \, \overline{a}'_1 + \ldots + \beta_\nu \, \overline{a}'_\nu \, ,$$

est irrationnel, car $\overline{\gamma} \neq \overline{0}$.

Comme les composantes de $\overline{a}'_{\nu+1}$ dans la base $\overline{a}'_1 , \ldots , \overline{a}'_\nu$, sont algébriques et ne sont pas toutes rationnelles, ψ prend des valeurs dans $GL_N(\overline{\mathbb{Q}})$ en au moins $\nu + 1$ points $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants de $\overline{\mathbb{Q}}^\nu$, ce qui contredit l'hypothèse de récurrence.

Maintenant que l'on a montré l'inégalité $\ell \leqslant n$, on démontre l'indépendance linéaire sur $\mathbb{C}$ de $\overline{a}_1 , \ldots , \overline{a}_\ell$: si $\overline{a}_1 , \ldots , \overline{a}_\nu$ est une base sur $\mathbb{C}$ du $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par $\overline{a}_1 , \ldots , \overline{a}_\ell$, avec $\nu < \ell$, alors $\nu \leqslant n - 1$, et l'homomorphisme

$$(z_1 , \ldots , z_\nu) \longmapsto \exp(\overline{a}_1 z_1 + \ldots + \overline{a}_\nu z_\nu)$$

de $\mathbb{C}^\nu$ dans $GL_N(\mathbb{C})$ prend des valeurs algébriques en $\nu + 1$ points $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, ce qui contredit le début de la démonstration (c'est-à-dire l'inégalité $\ell \leqslant n$ au rang ν).

(b) Variétés non linéaires. - Considérons d'abord l'exemple suivant. Soit ε une courbe elliptique avec multiplication complexe, dont l'application exponentielle est paramétrée par une fonction $\wp$ de Weierstrass, d'invariants g_2 , g_3 algébriques, et de périodes fondamentales ω_1 , ω_2 . Soit $\varphi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{C}}$ l'homomorphisme défini par $\varphi(t_1 , t_2) = \exp_{\mathcal{E}}(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)$. Cet homomorphisme prend des valeurs algébriques aux points $(1 , 0)$, $(0 , 1)$, et $(\alpha , (\omega_1/\omega_2)\alpha)$, pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ (en particulier $\alpha = 1$ et $\alpha = (\omega_2/\omega_1)$). Dans cet exemple, φ n'est pas un sous-groupe à deux paramètres, mais on obtient une situation analogue en considérant le sous-groupe à deux paramètres de $GL_2(\mathbb{C}) \times \mathcal{E}$:

$$(t_1 , t_2) \longmapsto \left(\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \exp_{\mathcal{E}}(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)\right) .$$

Dans ce cas, aucune majoration de ℓ n'est possible.

Pour obtenir des résultats concernant les variétés non linéaires, nous introduisons la condition (λ) suivante.

Définitions. - Un sous-groupe Γ de $\overline{\mathbb{Q}}^n$ satisfait la condition (λ) (avec λ réel positif) s'il possède une base $(\overline{a}_1 , \ldots , \overline{a}_\ell)$ sur $\mathbb{Z}$ telle que

$$\min\{|k_1 \overline{a}_1 + \ldots + k_\ell \overline{a}_\ell| \ ; \ k_j \in \mathbb{Z} , \ |k_j| \leqslant N\} \gg N^{-\lambda}$$

pour $N \longrightarrow + \infty$.

Un sous-groupe Γ de $\overline{\mathbb{Q}}^n$ de rang ℓ sur $\mathbb{Z}$ est très bien distribué dans $\mathbb{C}^n$ s'il satisfait la condition (λ) pour tout $\lambda > \max\{0 , \frac{\ell}{2n} - 1\}$.

La vérification de la condition de répartition (λ) des points de Γ dans $\mathbb{C}^n$ est en général un problème difficile d'approximation diophantienne quand Γ est un sous-groupe quelconque de $\mathbb{C}^n$ (voir à ce sujet les commentaires à la fin de [2], où est expliqué le lien avec une hypothèse de densité de Γ dans $\mathbb{C}^n$). Mais ici, Γ est formé de points à coordonnées algébriques ; on peut trivialement vérifier (λ) en prenant pour λ le degré sur $\mathbb{Q}$ du corps obtenu en adjoignant à $\mathbb{Q}$ les coordonnées des points $\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_\ell$; on peut aussi déduire des travaux de SCHMIDT sur les systèmes de Roth ([4], §7.3) des conditions nécessaires et suffisantes pour que Γ soit très bien distribué dans $\mathbb{C}^n$.

La condition (λ) intervient dans un lemme de SCHWARZ [2] qui permet de démontrer un critère généralisant C_1 ([7], théorème 5.1). Voici un énoncé approximatif.

CRITERE C_n. - Soient Γ un sous-groupe de $\overline{\mathbb{Q}}^n$, de rang ℓ sur $\mathbb{Z}$, et f une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}^n$, transcendante, d'ordre inférieur ou égal à ρ ; on suppose $f(\Gamma) \subset \overline{\mathbb{Q}} \cup \{\infty\}$; sous certaines hypothèses techniques, si Γ vérifie la condition (λ), alors

$$\lambda \geq \frac{\ell}{2n} - 1 + \frac{\ell - n\rho}{2n(n^2 - 1)} .$$

En particulier, si $\ell > \max\{2n , n\rho\}$, alors Γ n'est pas très bien distribué.

Nous utilisons ce critère pour démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 4. - Soient G une variété de groupe définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, $\varphi : \mathbb{C}^n \longrightarrow G_{\mathbb{C}}$ un homomorphisme irrationnel, et Γ un sous-groupe de $\overline{\mathbb{Q}}^n$, de rang $\geq 2n + 1$ sur $\mathbb{Z}$, tel que $\rho(\Gamma) \subset G_{\overline{\mathbb{Q}}}$. Si

Si Γ vérifie la condition (λ), alors

$$\lambda \geq \frac{n}{2(n^2 - 1)} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n(n^2 - 1)} ;$$

en particulier Γ n'est pas très bien distribué.

Démonstration. - Comme dans la démonstration du théorème 1, il suffit de considérer le cas d'une variété linéaire et celui d'une variété abélienne. Dans chacun de ces deux cas, on peut appliquer le critère C_n, avec respectivement $\rho = 1$ et $\rho = 2$. Dans le cas linéaire, on obtient ainsi $\lambda \geq (1/2(n - 1))$; montrons que l'on a en fait $\lambda \geq 1/(n - 1)$; grâce au lemme 2, il suffit de montrer le résultat suivant.

LEMME 5. - Soient $\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_\ell$ des éléments $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants de $\overline{\mathbb{Q}}^n$, engendrant un groupe Γ vérifiant la propriété (λ) avec

$$\lambda < ((\ell - 1)/2(n - 1)) - 1 .$$

Alors, pour tout $\overline{v} \in \mathbb{C}^n$, $\overline{v} \neq 0$, deux des produits scalaires $\overline{v}.\overline{a}_1, \dots, \overline{v}.\overline{a}_\ell$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants.

Démonstration du lemme 5. - Supposons qu'il existe $\overline{v} \in \mathbb{C}^n$, $\overline{v} \neq \overline{0}$, tel que $\overline{v}.\overline{a}_k = c_k . \overline{v}.\overline{a}_\ell$, $1 \leq k \leq \ell - 1$ avec $c_1, \dots, c_{\ell-1} \in \mathbb{Q}$; le sous-groupe Γ' de $\mathbb{C}^n$, engendré par $\{\overline{a}_k - c_k \overline{a}_\ell , \ 1 \leq k \leq \ell-1\}$, a un rang $\ell - 1$, et vérifie la condition (λ) ; de plus, comme tout élément de Γ' est orthogonal à $\overline{v}$, Γ' peut être plongé dans $\mathbb{C}^{n-1}$; d'après le principe des tiroirs, on obtient

$\lambda \geqslant ((\ell - 1)/2(n - 1)) - 1$. D'où le lemme 5.

Précisons que, dans le cas abélien, quand φ est un sous-groupe à n paramètres (autrement dit, quand $\mathcal{L}$ est injective), on peut améliorer légèrement la conclusion du théorème 4, sous la forme [7] :

$$\lambda \geqslant \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n(n - 1)} .$$

<u>Conclusion</u>. - Soient $\varphi : \underset{\sim}{C}^n \longrightarrow G_{\underset{\sim}{C}}$ un homomorphisme analytique irrationnel de $\underset{\sim}{C}^n$ dans $G_{\underset{\sim}{C}}$, et Γ un sous-groupe de $\overline{\underset{\sim}{Q}}^n$, de rang ℓ sur $\underset{\sim}{Z}$, tel que $\varphi(\Gamma) \subset G_{\overline{\underset{\sim}{Q}}}$. Nous avons obtenu au théorème 4 l'inégalité $\ell \leqslant 2n$ sous certaines hypothèses concernant la répartition des points de Γ dans $\underset{\sim}{C}^n$; il serait intéressant d'obtenir cette inégalité sous une hypothèse concernant seulement φ , la plus naturelle étant : pour tout $\overline{\gamma} \in \overline{\underset{\sim}{Q}}^n$, $\overline{\gamma} \neq \overline{0}$, $z \longmapsto \varphi(\overline{\gamma}.z)$ est irrationnel. Dans ce cas, Daniel BERTRAND conjecture que Γ est discret dans $\underset{\sim}{C}^n$. Comme nous l'avons vu, cela est vrai pour une courbe elliptique $\mathcal{E}$ et un homomorphisme de $\underset{\sim}{C}$ dans $\mathcal{E}$ (cf. §1), ainsi que pour une variété linéaire (cf. lemme 3, ci-dessus). Dans le cas d'une variété abélienne, l'hypothèse sur φ s'écrit $\ker \varphi \cap \overline{\underset{\sim}{Q}}^n = (0)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAKER (Alan). - Transcendental number theory. - Cambridge, Cambridge University Press, 1975.

[2] BOMBIERI (Enrico) and LANG (Serge). - Analytic subgroups of group varieties, Invent. Math., Berlin, t. 11, 1970, p. 1-14.

[3] LANG (Serge). - Introduction to transcendental numbers. - Reading, Addison Wesley Publishing Company, 1966 (Addison Wesley Series in Math.).

[4] SCHMIDT (Wolfgang). - Approximation to algebraic numbers, L'Enseignement mathématique, 2e série, t. 17, 1971, p. 187-253 ; et Genève, L'Enseignement mathématique, 1972 (Monographie de l'Enseignement mathématique, 19).

[5] SCHNEIDER (Théodor). - Einführung in die transzendenten Zahlen. - Berlin, Springer-Verlag, 1957 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 81) ; et Introduction aux nombres transcendants. Traduit de l'Allemand par P. Eymard. - Paris, Gauthier-Villars, 1959.

[6] WALDSCHMIDT (Michel). - Transcendance dans les variétés de groupe, Séminaire Delange,-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 14e année, 1972/73, n° 23, 16 p.

[7] WALDSCHMIDT (Michel). - Propriétés arithmétiques de fonctions de plusieurs variables, Séminaire P. Lelong : Analyse, 14e année, 1974/75, exposé n° 9, p. 106-129. - Berlin, Springer-Verlag, 1976 (Lecture Notes in Mathematics, 524).

(Texte reçu le 13 octobre 1975)

Michel WALDSCHMIDT
Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)
Mathématiques, Tour 45
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05