Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Daniel Barsky

Fonction génératrice et congruences (application aux nombres de Bernoulli)

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 17, nº 1 (1975-1976), exp. nº 21, p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_1_A19_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres (Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
17e année, 1975/76, n° 21, 16 p.

8 mars 1976

FONCTION GÉNÉRATRICE ET CONGRUENCES (APPLICATION AUX NOMBRES DE BERNOULLI)

par Daniel BARSKY

RÉSUMÉ. - On montre que la fonction génératrice des nombres de Bernoulli généralisés relatifs au caractère χ,

$$F_\chi(X) = \sum_{n\geqslant 0} B_{n,\chi} X^n ,$$

est, pour tout nombre premier p, un élément analytique au sens de KRASNER sur un quasi-connexe de $\underset{\sim}{C}_p$ contenant l'idéal maximal de $\underset{\sim}{C}_p$. On détermine les parties singulières de F_χ relatives aux différents trous du quasi-connexe. Ceci permet, via le théorème de Mittag-Löffler p-adique, de retrouver la théorie de KUBOTA et LÉOPOLDT sur les fonctions L p-adiques des corps de nombres abéliens totalement réels. Puis on étudie la fonction génératrice

$$J_\chi(X) = \sum_{n\geqslant 1} n^{-1} B_{n,\chi} X^{n-1} ,$$

on montre que, si χ n'est pas le caractère trivial (resp. si χ_0 est le caractère trivial), J_χ (resp. $J_{\chi_0}(X) - uJ_{\chi_0}(uX)$, où $u \in \underset{\sim}{Z}_p$ et $u \equiv 1 \bmod(p)$) est encore un élément analytique sur un quasi-connexe de $\underset{\sim}{C}_p$ contenant son idéal maximal. Ceci permet de montrer, via le théorème de Mittag-Löffler p-adique, que les fontions L p-adiques sont liées à l'algèbre d'Iwasawa. La méthode employée est en fait une interprétation p-adique de la méthode de Kummer. Elle se généralise aisément.

<u>Notations</u>. - Soit p un nombre premier, $\underset{\sim}{N}$, $\underset{\sim}{Z}$, $\underset{\sim}{Q}$, $\underset{\sim}{Z}_p$, $\underset{\sim}{Q}_p$ ont leur signification habituelle [1], $\underset{\sim}{C}_p$ est le complété de la clôture algébrique de $\underset{\sim}{Q}_p$. La valeur absolue p-adique sur $\underset{\sim}{Z}_p$, $\underset{\sim}{Q}_p$, $\underset{\sim}{C}_p$, notée $|.|$, est normalisée par $|p| = p^{-1}$. On désigne par ε et ρ des nombres réels positifs. On note, si $a \in \underset{\sim}{C}_p$,

$$B(a , \rho)^- = \{X \in \underset{\sim}{C}_p ; \ |X - a| < \rho\} \quad (\text{resp. } B(a , \rho)^+ = \{X \in \underset{\sim}{C}_p ; \ |X - a| \leqslant \rho\})$$

la boule ouverte (resp. fermée) de centre a et de rayon ρ. On pose

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!} .$$

Si $B \subset \underset{\sim}{C}_p$, on note $H(B)$ (resp. $H_0(B)$) l'ensemble des éléments analytiques sur B (resp. nuls à l'infini si B n'est pas borné), c'est-à-dire le complété pour la norme de la convergence uniforme sur B, notée $\| \ \|_B$, de l'espace des fractions rationnelles de $\underset{\sim}{C}_p(X)$ sans pôles dans B. Si m et n appartiennent

à $\underset{\sim}{N}$, on note (m , n) le plus grand commun diviseur de m et n .

<u>Introduction.</u> — Les nombres de Bernoulli, $B_{n,\chi}$, relatifs au caractère de Dirichlet modulo f , χ , ont pour fonction génératrice de Hurwitz [7],

$$\tilde{F}_\chi(X) = \sum_{n\geq 0} B_{n,\chi} \frac{X^n}{n!} = \sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a) X \exp(aX)}{\exp(fX) - 1} .$$

On note χ_0 le caractère trivial. On a $B_{n,\chi_0} = B_n$, n-ième nombre de Bernoulli ordinaire. On sait que, si $L(s , \chi) = \sum_{n\geq 1} \chi(n) n^{-s}$ est la fonction L complexe attachée au caractère χ , $L(1 - n , \chi) = - B_{n,\chi}/n$ pour tout entier $n \in \underset{\sim}{N}^*$ ($\underset{\sim}{N}^* = \underset{\sim}{N} - \{0\}$) . KUBOTA et LÉOPOLDT, suivis par de nombreux auteurs (cf. [11]), ont montré que, pour tout nombre premier p , la suite

$$n \longrightarrow -(B_{n,\chi}/n)(1 - \chi(p) p^{n-1}) = L_p(1 - n , \chi)$$

est, pour $n \in \underset{\sim}{N}^*$, $n \equiv 0 \mod (p - 1)$, la restriction d'une unique fonction $L_p(s , \chi)$, méromorphe dans le disque $B(1 , \rho)^-$ de $\underset{\sim}{C}_p$, où $\rho = p^{1-1/(p-1)}$ si $\rho > 2$ (resp. $\rho = 4$ si $p = 2$) , avec pour seul pôle simple le point $s = 1$ avec résidu zéro si $\chi \neq \chi_0$ et $1 - p^{-1}$ si $\chi = \chi_0$. Puis ces auteurs ont donné une expression de $L_p(1 , \chi)$ analogue à celle de $L(1 , \chi)$ connuedans le cas complexe. Ultérieurement, IWASAWA a montré que $L_p(s , \chi)$ appartient à "l'algèbre d'Iwasawa" si $\chi \neq \chi_0$ et $(p , f) = 1$, et que $(u^{s-1} - 1) L_p(s , \chi_0)$ appartient à "l'algèbre d'Iwasawa" où $u \in \underset{\sim}{Z}_p$ et $|u - 1| \leq p^{-1}$ [11] et [7].

Nous montrerons que

$$\begin{aligned} F_\chi(X) &= \sum_{n\geq 0} B_{n,\chi} X^n \\ &= - f^{-1} \sum_{a=1}^{f} \chi(a) \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{n! X^n f^n}{(1 - aX)(1 - (a + f)X) \dots (1 - (a + nf)X)} . \end{aligned}$$

Nous en déduirons immédiatement que F_χ est un élément analytique sur un quasi-connexe de $\underset{\sim}{C}_p$ contenant $B(0 , 1)^-$. En étudiant la décomposition de F_χ en somme de ses parties singulières relatives aux différents trous du quasi-connexe (théorème de Mittag-Löffler p-adique [1] ou [10]) nous montrerons que

$$G_\chi(X) = \sum_{n\geq 0} B_{n,\chi}(1 - \chi(p) p^{n-1}) X^n$$

est un élément analytique, pour tout entier k , sur

$$\Omega_{p,k} = \underset{\sim}{C}_p - \bigcup_{i=1}^{p-1} \bigcup_{n=0}^{p^k-1} B(i + pn , p^{-k-1})^+ ,$$

nul à l'infini. Ce résultat nous redonnera grâce au théorème de Mittag-Löffler p-adique le fait que $L_p(1 - n , \chi) = -n^{-1} B_{n,\chi}(1 - \chi(p) p^{n-1})$ est la restriction, pour $n \equiv 0 \mod (p - 1)$, d'une fonction méromorphe sur $B(1 , \rho)^-$ n'ayant qu'un

pôle simple en 1 avec résidu zéro si $\chi \neq \chi_0$ (resp. résidu $1 - p^{-1}$ si $\chi = \chi_0$) . Nous montrerons ensuite que si $\chi \neq \chi_0$, $(p , f) = 1$,

$$J_\chi(X) = \sum_{n\geq 1} L_p(1 - n , \chi)X^{n-1} = f^{-1} \sum_{n\geq 0} a_n \frac{n!X^n}{(1 - X) \dots (1 - nX)} ,$$

où $a_n \in \underset{\sim}{C}_p$ et $|a_n| \leq 1$, respectivement que, si $u \in \underset{\sim}{Z}_p$ et $|u - 1| \leq p^{-1}$,

$$uJ_{\chi_0}(uX) - J_{\chi_0}(X) = \sum_{n\geq 1}(u^n - 1)L_p(1 - n , \chi_0)X^{n-1}$$
$$= \sum_{n\geq 0} a_n \frac{n!X^n}{(1 - X) \dots (1 - nX)} ,$$

où a_n dépend de u et $a_n \in \underset{\sim}{Z}_p$. Ce qui nous redonnera le fait que $L_p(s , \chi)$, si $\chi \neq \chi_0$ et $(f , p) = 1$ appartient à "l'algèbre d'Iwasawa" généralisée (resp. que $(u^{s-1} - 1)L_p(s , \chi_0)$ appartient à "l'algèbre d'Iwasawa").

La méthode employée pour obtenir ces résultats est en fait une interprétation p-adique de la méthode de KUMMER [9]. Elle est fondée sur un analogue formel de la transformation de Laplace et sur le théorème de Mittag-Löffler p-adique ([1] ou [10]) qui remplace l'intégrale de Cauchy pour les fonctions de variable complexe. Cette méthode est en fait très proche de la méthode des mesures p-adiques de Katz. Elle peut s'employer dans d'autres cas, par exemple : nombres de Bell [4] et nombres de Bernoulli-Hurwitz [5].

1. Fonction génératrice des nombres de Bernoulli.

Soit χ un caractère de Dirichlet de conducteur $f_\chi = f$. On sait que [7]

$$\tilde{F}_\chi(X) = \sum_{n\geq 0} B_{n,\chi} \frac{X^n}{n!} = \sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a)Xe^{aX}}{e^{fX} - 1} .$$

Transformons le troisième membre ; il vient

$$\tilde{F}_\chi(X) = f^{-1} \sum_{a=1}^{f} \chi(a)\, e^{aX}(e^{fX} - 1)^{-1} \log(1 - (1 - e^{fX}))$$
$$= - f^{-1} \sum_{a=1}^{f} \chi(a)\, e^{aX} \sum_{n\geq 1} \frac{(1 - e^{fX})^{n-1}}{n} ,$$

la dernière série convergeant X-adiquement. Considérons le $\underset{\sim}{C}_p$-endomorphisme, $\mathcal{L}$, de $\underset{\sim}{C}_p[[X]]$ continu pour la topologie X-adique et défini par

$$\tilde{f}(X) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{X^n}{n!} \in \underset{\sim}{C}_p[[X]]$$

(une telle série s'appellera une série de Hurwitz),

$$f(X) = \mathcal{L}(\tilde{f})(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \quad (\text{cf. } [4]) .$$

Remarquons que, si $k \in \underset{\sim}{C}_p$,

$$\mathcal{L}(e^{kX}) = (1 - kX)^{-1} ,$$

si $\tilde{f}(X) = \sum_{n\geq 1} a_n (X^n/n!)$, alors

$$\mathcal{L}(\tilde{\frac{f}{X}})(X) = \sum_{n\geq 1} n^{-1} a_n X^{n-1} .$$

On a donc

$$\mathcal{L}(\tilde{F}_\chi)(X) = \sum_{n\geq 0} B_{n,\chi} X^n = F_\chi(X)$$

et

$$F_\chi(X) = - f^{-1} \sum_{a=1}^{f} \chi(a) \sum_{n\geq 1} \mathcal{L}(n^{-1} e^{aX}(1 - e^{fX})^{n-1}) ,$$

car $\mathcal{L}$ est continue X-adiquement. Donc

$$F_\chi(X) = - f^{-1} \sum_{a=1}^{f} \chi(a) \sum_{n\geq 0} (n + 1)^{-1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (1 - (a + kf)X)^{-1} ,$$

soit finalement

$$(1) \quad F_\chi(X) = - f^{-1} \sum_{a=1}^{f} \chi(a) \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n + 1} \frac{n! X^n f^n}{(1 - aX)(1 - (a + f)X) \dots (1 - (a + nf)X)} ,$$

PROPOSITION 1. — <u>Pour tout nombre premier</u> p , $F_\chi(X) = \sum_{n\geq 0} B_{n,\chi} X^n$ <u>est un élément analytique sur</u> $B(0 , 1)^- \subset \mathbb{C}_p$.

C'est évident sur la formule (1). En effet,

$\inf_{X\in B(0,1)^-} |(1 - aX) \dots (1 - (a + nf)X)| = 1$ et $\lim_{n\to\infty} |(n + 1)^{-1} f^n n!| = 0$,

donc $F_\chi \in H(B(0 , 1)^-)$.

Nous allons montrer que F_χ est un élément anlytique sur des quasi-connexes stricement plus grands que $B(0 , 1)^-$.

LEMME 1. — <u>Soit</u> $X \in \mathbb{C}_p$, $|X| \geq 1$, <u>tel que</u> $p^{-k} \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} |(1 - nX)| < p^{-k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, <u>alors</u>

$$\left|\frac{n! X^n}{(1 - X) \dots (1 - nX)}\right| \leq |[n/(p^k |X|)]!\, |p^k |X| ,$$

<u>où</u> $[\rho]$ <u>est le plus grand entier inférieur ou égal à</u> ρ .

Posons $X = m^{-1} + xm^{-1} p^k$, où $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{C}_p - \mathbb{Z}_p$ et $0 < x \leq 1$. Donc $|m^{-1}| = |X|$.

$$(1 - X) \dots (1 - nX) = m^{-n}(m - 1 - xp^k) \dots (m - n - nxp^k) ,$$

or $m - n - nxp^k \geq p^{-k-1} |m|$, donc

$$|(1 - X) \dots (1 - nX)| \geq |X^n| p^{-k} |X|^{-1} p^{-([n/(p|X|)] + \dots + [n/(p^k |X|)])}$$

donc

$$\left|\frac{n!X^n}{(1-X)\dots(1-nX)}\right| \leq p^k|X|\ |[n/(p^k|X|)]!|\ .$$

LEMME 2. - <u>Soit</u> $X \in \underset{\sim}{C}_p$, <u>tel que</u> $\inf_{n\in\underset{\sim}{N}}|(1-nX)| \geq 1$ <u>et</u> $p^r \leq |X| < p^{r+1}$ <u>pour</u> $r \in \underset{\sim}{N}$ (resp. $|X| < 1$), <u>alors</u>

$$\left|\frac{n!X^n}{(1-X)\dots(1-nX)}\right| \leq |[n/p^r]!|\ p^{\theta[n/p^{r+1}]}\ ,$$

<u>où</u> θ <u>est un nombre réel tel que</u> $0 \leq \theta < 1$ (resp. $\left|\frac{n!X^n}{(1-X)\dots(1-nX)}\right| \leq |n!|$) .

On a

$$|(1-X)\dots(1-nX)| \geq |X|^{n-[n/p]}\ |pX|^{[n/p]-[n/p^2]}\dots|p^rX|^{[n/p^r]-[n/p^{r+1}]}\ .$$

D'où le résultat en posant $|X| = p^{r+\theta}$ avec $0 \leq \theta < 1$.

Remarquons que, dans les lemmes 1 et 2, si $k \leq k_0$ et $r \leq r_0$, alors la dépendance de la valeur absolue est de la forme p^{-cn} , où c est une constante réelle positive non nulle.

THÉORÈME 1. - <u>Pour tout nombre premier</u> p , $F_\chi(X) = \sum_{n\geq 0} B_{n,\chi}X^n$ <u>est prolongeable en un élément analytique nul à l'infini sur</u>

$$\mathcal{C}_{p,k} = \underset{\sim}{C}_p - \bigcup_{i=1}^{p-1}\bigcup_{n\geq 0}\bigcup_{m=0}^{p^k-1} B\left(\frac{i+pfm}{p^n}\ ,\ p^{n-1-k}|f|\right)^+ ,\quad k \in \underset{\sim}{N}\ ;$$

autrement dit $F_\chi \in H_0(\mathcal{C}_{p,k})$.

Posons

$$F_\chi(X\ ,\ a) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n(n+1)^{-1}\frac{n!X^n f^n}{(1-aX)\dots(1-(a+nf)X)}\ ,$$

donc $F_\chi(X) = \sum_{a=1}^{f}\chi(a)\,F_\chi(X\ ,\ a)$. Effectuons dans $F_\chi(X\ ,\ a)$ le changement de variable $X = Yf^{-1}(1+aYf^{-1})^{-1}$. Si $X \in \mathcal{C}_{p,k}$ et $|X| \geq 1$, alors

$$f \leq |Y| \leq p^{k+1}|a|$$

et

$$\inf_{n\in\underset{\sim}{N}}|1-nY| = \inf_{n\in\underset{\sim}{N}}\left|\frac{1-(a+nf)X}{1-aX}\right| \geq p^{-k-1}\inf_{1\leq a\leq f}(|a|)\ .$$

On remarque que $|(n+1)^{-1}| \leq p^{\ell(n+1)}$, où $\ell(n+1) = [\frac{\log(n+1)}{\log(p)}]$, et on applique les lemmes 1 et 2. Ce qui prouve que $F_\chi \in H_0(\mathcal{C}_{p,k})$.

On pourrait montrer le théorème 1 (ainsi d'ailleurs que les lemmes 1 et 2) en utilisant les résultats généraux d' ALICE sur les fonctions localement analytiques [2]. En effet, on peut remarquer que

$$(-1)^n\frac{n!X^n f^n}{(1-aX)\dots(1-(a+nf)X)} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(1-(a+kf)X)^{-1}\ ,$$

ce n'est donc pas autre chose que le n-ième coefficient d'interpolation sur la base normale des polynômes $\binom{x}{n}$ de la fonction de $\underset{\sim}{Z}_p$ dans $\underset{\sim}{C}_p$:

$$t \longrightarrow (1 - (a + tf)X)^{-1} .$$

COROLLAIRE 1. - F_χ <u>est une fonction analytique sur</u> $\underset{\sim}{C}_p - \underset{\sim}{Z}_p^{-1}$. <u>En effet,</u>

$$\cup_{k\geq 0} \mathcal{C}_{p,k} = \underset{\sim}{C}_p - \underset{\sim}{Z}_p^{-1} ,$$

<u>et pour tout entier</u> k , F_χ <u>est un élément analytique sur</u> $\mathcal{C}_{p,k}$ [1] ou [10].

Rappelons que, d'après le théorème de Mittag-Löffler p-adique [1] ou [10], tout élément analytique sur un quasi-connexe $\mathcal{C}_p$ s'écrit de manière unique comme la somme de ses parties singulières relatives aux différents trous de $\mathcal{C}_p$. Considérons le quasi-connexe

$$\mathcal{B}_{p,0} = B(0 , 1)^+ - \cup_{i=1}^{p-1} B(i , p^{-1})^+ ,$$

les trous de $\mathcal{B}_{p,0}$ sont les boules $B(i , p^{-1})^+$, pour $1 \leq i \leq p - 1$, et le trou a l'infini $\underset{\sim}{C}_p - B(0 , 1)^+$ que l'on notera $B(\infty , p^{-1})^+$. D'après le théorème 1, F_χ est un élément analytique sur $\mathcal{B}_{p,0}$. Notons $F_{\chi,i,0}$ la partie singulière de F_χ relative au trou $B(i , p^{-1})^+$, $1 \leq i \leq p - 1$ ou $i = \infty$, elle est caractérisée ([1] ou [10]) par le fait que $F_\chi - F_{\chi,i,0}$ est un élément analytique sur $\mathcal{B}_{p,0} \cup B(i , p^{-1})^+$.

COROLLAIRE 2. - <u>Pour tout nombre premier</u> p , <u>la partie singulière de</u> F , <u>relative au trou</u> $B(i , p^{-1})^+$, $1 \leq i \leq p - 1$ <u>ou</u> $i = \infty$, <u>du quasi-connexe</u> $\mathcal{B}_{p,0}$, <u>a pour expression</u>

$$F_{\chi,i,0} = - f^{-1} \sum_{a=1}^{f} \chi(a) \sum_{m\geq 0}(m + 1)^{-1} \sum_k^* \binom{m}{k}(- 1)^k (1 - (a + kf)X)^{-1} ,$$

<u>où</u> $\sum_k^*$ <u>désigne une sommation sur les entiers</u> k <u>tels que</u> $|(a + kf)^{-1} - i| \leq p^{-1}$ <u>si</u> $1 \leq i \leq p - 1$ (resp. sur les entiers k tels que $|a + kf| \leq p^{-1}$ si $i = \infty$) .

En effet, on reconnaît dans la quantité $\sum_k^* \binom{m}{k}(- 1)^k (1 - (a + kf)X)^{-1}$ le n-ième coefficient d'interpolation [2] sur la base normale des polynômes $\binom{x}{n}$ de la fonction de $\underset{\sim}{Z}_p$ dans $\underset{\sim}{C}_p$: $t \longrightarrow f_\chi(t) = (1 - (a + tf)X)^{-1} \Psi_i(t)$ où $\Psi_i(t)$ est la fonction caractéristique de la boule de $\underset{\sim}{Z}_p$ de centre $(1 - ia)^{-1} fi$ si $|(1 - ia)^{-1} fi| \leq 1$ et $1 \leq i \leq p - 1$ (resp. la fonction identiquement nulle si $|(1 - ia)^{-1} fi| > 1$) et de rayon $|pf^{-1}|$, si $i = \infty$, c'est la fonction caractéristique de la boule de $\underset{\sim}{Z}_p$ de centre $- af^{-1}$ et de rayon $|pf^{-1}|$ ($|a| \leq |f|$) . Il est clair que cette fonction $f_\chi(t)$ est analytique sur toute boule de centre $x \in \underset{\sim}{Z}_p$ et de rayon $|pf^{-1}|$. Elle est donc localement analytique au sens d'AMICE [2], de rayon d'analyticité locale $|pf^{-1}|$, en outre

$$\sup_{t\in B(0,1)^+} \sup_{X\in B(0,1)^-} |f_\chi(t)| = 1$$

(ici $t \in \mathbb{C}_p$ car on peut prolonger de manière évidente $f_\chi(t)$ sur $B(0\ ,\ 1)^+ \subset \mathbb{C}_p$).
Alors, d'après un résultat général d'AMICE [2] :

$$\|\Sigma_k^* \binom{m}{k}(-1)^k (1 + (a + kf)X)^{-1}\|_{B(0,1)^-} \leq |[m|pf^{-1}|]!\ |pf^{-1}|^{m/p} .$$

D'après les inégalités de Cauchy [1], si

$$\Sigma_k^* \binom{m}{k}(-1)^k (1 - (a + kf)X)^{-1} = P_m(X)/Q_m(X) ,$$

alors $P_m(X) \in (pf^{-1})^{m/p}\ ([m|pf^{-1}|]!)\mathbb{Z}_p[X]$. Comme, pour $1 \leq i \leq p - 1$ ou $i = \infty$,

$$\|Q_m\|_{\mathbb{C}_p - B(i,p^{-1})^+} \geq |pf^{-1}|^{-[m/p]} ,$$

on en déduit que

$$\lim_{m\to\infty} \|(-1)^m (m + 1)^{-1} P_m Q_m^{-1}\|_{\mathbb{C}_p - B(i,p^{-1})^+} = 0 .$$

Donc la fonction

$$F_{\chi,i,0}(X) = - f^{-1} \Sigma_{a=1}^f \chi(a) \Sigma_{m\geq 0} (m + 1)^{-1} \Sigma_k^* \binom{m}{k}(-1)^k (1 - (a + kf)X)^{-1}$$

appartient à $H_0(\mathbb{C}_p - B(i\ ,\ p^{-1})^+)$, en outre il est facile de voir que $F_\chi - F_{\chi,i,0}$ se prolonge analytiquement sur $B(i\ ,\ p^{-1})^+$. Donc, d'après l'unicité de la décomposition en parties singulières du théorème de Mittag-Löffler p-adique, on en déduit que $F_{\chi,i,0}$ est la partie singulière de F_χ relative au trou $B(i\ ,\ p^{-1})^+$.

On pourrait par le même raisonnement donner les parties singulières de F_χ relatives aux trous du quasi-connexe $\mathbb{C}_{p,k}$.

COROLLAIRE 3 (Von STAUDT - CLAUSEN). -- B_n <u>est p-entier si</u> $p - 1$ <u>ne divise pas</u> n <u>et</u> $pB_n \equiv (-1)^p \mod (p)$ <u>si</u> $p - 1$ <u>divise</u> n .

En effet, compte tenu de ce que $(p - 1)! \equiv - 1 \mod (p)$ et

$$(1 - X) \ldots (1 - (p - 1)X) \equiv 1 - X^{p-1} \mod (p\mathbb{Z}[X]) ,$$

$$\begin{aligned} F_{\chi_0}(X) &= \Sigma_{n\geq 0} B_n X^n \\ &= \Sigma_{n=2}^{p-2} (-1)^n (n + 1)^{-1} \frac{n!X^n}{(1 - X) \ldots (1 - (n + 1)X)} \\ &\quad + (-1)^p X^{p-1}(1 - X^{p-1})^{-1} \\ &\quad + (-1)^{2p-1} 2^{-1} X^{2p-1}(1 - X^{p-1})^{-2} \mod (p\mathbb{Z}[X]) . \end{aligned}$$

D'où le résultat.

On peut aussi obtenir à partir de la fonction génératrice F_{χ_0} d'autres con-

gruences classiques sur les nombres de Bernoulli.

2. Etude de la fonction génératrice des nombres de Bernoulli.

Nous allons donner une autre forme pour les parties singulières de F_χ relatives aux trous de $\mathbb{C}_{p,k}$ qui nous redonnera la théorie de KUBOTA et LÉOPOLDT.

On a l'identité évidente suivante

$$\tilde{F}_\chi(X) = \sum_{a=1}^{f} \chi(a)\, Xe^{aX}(e^{fX} - 1)^{-1} = \sum_{a=1}^{p^k f} \chi(a)\, Xe^{aX}(e^{p^k fX} - 1)^{-1}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

On en déduit facilement que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\tilde{F}_\chi(X) - p^{-1}\chi(p)\,\tilde{F}_\chi(pX) = \sum_{a=1}^{p^k f}{}' \chi(a)\, Xe^{aX}(e^{p^k fX} - 1)^{-1},$$

où $\sum_a'$ désigne une sommation sur les indices a tels que $(a, p) = 1$.

Après transformation de Laplace formelle, il vient

$$(2) \qquad G_\chi(X) = F_\chi(X) - p^{-1}\chi(p)\, F_\chi(pX) = \sum_{n\geq 0} B_{n,\chi}(1 - \chi(p)\, p^{n-1})\, X^n$$

$$= -p^{-k} f^{-1} \sum_{a=1}^{p^k f}{}' \chi(a) \sum_{n\geq 0} (-1)^n (n+1)^{-1} \frac{n!\, X^n p^{kn} f^n}{(1 - aX) \dots (1 - (a + p^k fn)X)}.$$

Montrons que G_χ est un élément analytique, nul à l'infini, sur

$$\mathcal{D}_{p,h} = \mathbb{C}_p - \bigcup_{i=1}^{p-1} \bigcup_{n=0}^{p^h - 1} B(i + pn, p^{-h-1})^+, \qquad h \in \mathbb{N}.$$

On peut supposer, sans perte de généralité, que $|f| = 1$ pour le lemme 3 seulement.

LEMME 3. - <u>Si</u> $(a, p) = 1$ <u>et si</u> $k \geq h$,

$$\left\| (-1)^n (n+1)^{-1} \frac{X^n f^n p^{kn}(n!)}{(1 - aX) \dots (1 - (a + p^k fn)X)} \right\|_{\mathcal{D}_{p,h}} \leq \left| \frac{f^n (n!)\, p^{(k-h)n}}{n+1} \right| p^h.$$

<u>Si</u> $(a, p) = 1$ <u>et si</u> $k < h$,

$$\left\| (-1)^n (n+1)^{-1} \frac{X^n f^n p^{kn}(n!)}{(1 - aX) \dots (1 - (a + p^k fn)X)} \right\|_{\mathcal{D}_{p,h}} \leq \left| \frac{f^n (n!)}{(n+1)([n/p^k]!)} \right| p^h.$$

La démonstration est immédiate. Donc, dans tous les cas,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| (-1)^n (n+1)^{-1} \frac{X^n f^n p^{kn}(n!)}{(1 - aX) \dots (1 - (a + p^k fn)X)} \right\|_{\mathcal{D}_{p,h}} = 0.$$

Comme le degré du numérateur est inférieur strictement à celui du dénominateur, on en déduit que G_χ est nul à l'infini sur $\mathbb{C}_{p,h}$.

THÉORÈME 2. - <u>Pour tout nombre premier</u> p, <u>pour tout entier</u> $h \in \mathbb{N}$,

$$G_\chi(X) = F_\chi(X) - p^{-1}\chi(p)\,F_\chi(pX) = \sum_{n\geq 0} B_{n,\chi}(1-\chi(p)\,p^{n-1})X^n$$

<u>appartient à</u> $H_0(\mathcal{D}_{p,h})$ <u>et</u> $\|G_\chi\|_{\mathcal{D}_{p,h}} \leq p^{2h+1}|f^{-1}|$.

C'est immédiat d'après la formule (2) et les inégalités du lemme 3. On peut aussi montrer la dernière inégalité en remarquant que

$$(-1)^n \frac{n!X^n f^n p^{kn}}{(1-aX)\dots(1-(a+p^k fn)X)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}(-1)^j (1-(a+p^k fj)X)^{-1}.$$

Ce théorème est le résultat-clef pour l'étude des nombres de Bernoulli. Grâce au théorème de Mittag-Löffler nous obtiendrons les résultats de KUBOTA et LÉOPOLDT.

PROPOSITION 2. - <u>Pour tout nombre premier</u> p,

$$p^{-1}\chi(p)\,F_\chi(Xp) = -\frac{1}{pf}\sum_{a=1}^{f}\chi(ap)\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{n!X^n p^n f^n}{(1-aX)\dots(1-(a+pfn)X)}$$

$$= -f^{-1}\sum_{a=1}^{f}\chi(a)\sum_{n\geq 0}(n+1)^{-1}\sum_k^{*}\binom{n}{k}(-1)^k(1-(a+kf)X)^{-1},$$

où $\sum_k^*$ désigne une sommation sur les entiers $k \equiv -af^{-1} \bmod (p)$ si $|a| \leq |f|$ (sinon sommation vide).

La première égalité est évidente, la seconde provient de la proposition 1 et de l'unicité de la décomposition en parties singulières du théorème de Mittag-Löffler p-adique.

THÉORÈME 3. - <u>Pour tout nombre premier</u> p, <u>la suite</u> $n \longrightarrow B_{n,\chi}(1-\chi(p)\,p^{n-1})$ est, pour $n \equiv j \bmod (p-1)$, $0 \leq j \leq p-1$, <u>la restriction d'une fonction</u> $g_{j,\chi}(s)$ <u>analytique sur le disque</u> $B(0,\rho_p)^- \subset \mathbb{C}_p$, <u>où</u> $\rho_p = p^{1-1/(p-1)}$ <u>si</u> $p > 2$ (resp. $\rho_2 = 4$).

Si $\chi \neq \chi_0$ ou si $j \neq 0$, $g_{j,\chi}(0) = 0$, si $\chi = \chi_0$ et $j = 0$,

$$g_{0,\chi_0}(0) = 1 - p^{-1}.$$

Puisque $G_\chi \in H_0(\mathcal{D}_{p,0})$, le théorème de Mittag-Löffler p-adique permet d'écrire de manière unique :

$$G_\chi(X) = \sum_{i=1}^{p-1} G_{i,\chi}(X),$$

où $G_{i,\chi} \in H_0(\mathbb{C}_p - B(i, p^{-1})^+)$, $G_\chi - G_{i,\chi}$ se prolonge analytiquement sur $B(i, p^{-1})^+$ et en outre :

$$\sup_i \|G_{i,\chi}\|_{\mathbb{C}_p - B(i,p^{-1})^+} = \|G_\chi\|_{\mathcal{D}_{p,0}}.$$

La formule (2) permet même de donner une expression explicite des $G_{i,\chi}$.

Comme $G_{i,\chi} \in H_0(\underset{\sim}{C}_p - B(i\ ,\ p^{-1})^+)$, elle possède une représentation unique sur $\underset{\sim}{C}_p - B(i\ ,\ p^{-1})^+$ sous la forme

$$G_{i,\chi}(X) = \sum_{n\geq 1} \lambda_{i,n}\ i^{n-1}(1 - i^{-1}\ X)^{-n}\ .$$

Donc d'après les inégalités de Cauchy et le théorème de Mittag-Löffler, on a

$$\|G_{i,\chi}\|_{\underset{\sim}{C}_p - B(i,p^{-1})^+} = \sup_{n\geq 1} |\lambda_{i,n}| p^n \leq p|f^{-1}|\ ;$$

donc $|\lambda_{i,n}| \leq p^{-n+1}\ |f^{-1}|$.

Donc, en développant,

$$B_{n,\chi}(1 - \chi(p)\ p^{n-1}) = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{m\geq 1} i^{-n}\ \lambda_{i,m}\binom{m+n-1}{m-1}\ .$$

Considérons la suite de fonctions

$$m \longrightarrow f_{i,m}(s) = (i^{-(p-1)})^s\ \lambda_{i,m}\binom{(p-1)s+m-1}{m-1} \quad \text{où} \quad 1 \leq i \leq p-1\ .$$

Pour chaque m fixé, c'est une fonction analytique sur la boule $B(0\ ,\ \rho_p)^-$ si $p > 2$ (resp. sur $\underset{\sim}{C}_2$), où $\rho_p = p^{1-1/(p-1)}$ si $p > 2$, respectivement $\rho_2 = 4$ (cf. [2]). Cette suite de fonctions analytiques converge simplement vers zéro si $\lim_{m\longrightarrow\infty} |\lambda_{i,m}\binom{s+m-1}{m-1}| = 0$, car $|i^{-(p-1)s}| \leq 1$. Il suffit que

$\lim_{m\longrightarrow\infty} p^{-m+1}\ |s|^{m-1}\ |(m-1)!| = 0$ et donc que $|s| < \rho_p$. Si $|s| \leq \rho < \rho_p$, la convergence est uniforme sur $B(0\ ,\ \rho)$, et par conséquent d'après des résultats généraux [1] sur les limites uniformes de fonctions analytiques, on en déduit que $f_i(s) = \sum_{m\geq 1} f_{i,m}(s)$ est une fonction analytique sur $B(0\ ,\ \rho_p)$. On en déduit que la suite

$$r \longrightarrow B_{(p-1)r+j,\chi}(1 - \chi(p)\ p^{(p-1)r+j}) \quad \text{où} \quad r \in \underset{\sim}{N} \quad \text{et} \quad 0 \leq j \leq p-1\ ,$$

est la restriction à $\underset{\sim}{N}$ de la fonction $g_{j,\chi}(s) = \sum_{i=1}^{p-1} i^{-j}\ f_i(s)$ qui est analytique sur $B(0\ ,\ \rho_p)$. Le reste du théorème découle des propriétés élémentaires de $B_{0,\chi}$ [7].

PROPOSITION 3.

$$G_\chi(X) = \sum_{n\geq 0} B_{n,\chi}(1 - \chi(p)\ p^{n-1}) = \lim_{k\longrightarrow\infty} -p^{-k}\ f^{-1} \sum_{a=1}^{p^k f} \chi(a)(1 - aX)^{-1}\ ,$$

<u>la limite étant uniforme sur</u> $\Omega_{p,h}$ <u>pour tout entier</u> $h \geq 0$.

En effet, d'après le théorème 2, on a uniformément sur $\Omega_{p,h}$ et pour tout entier $k \geq 1$:

$$G_\chi(X) = -p^{-k} f^{-1} \sum_{a=1}^{p^k f}{}' \chi(a)(1 - aX)^{-1}$$

$$- \sum_{a=1}^{p^k f}{}' \tfrac{1}{2}\chi(a) \frac{p^f fX}{(1 - aX)(1 - (a + p^k f)X)}$$

$$- p^{-k} f \sum_{a=1}^{p^k f}{}' \chi(a) \sum_{n\geq 2} (-1)^n (n+1)^{-1} \frac{n! X^n p^{kn} f^n}{(1 - aX) \dots (1 - (a + p^k fn)X)} ,$$

rappelons que $\sum_a'$ désigne une sommation sur les a tels que $(a , p) = 1$.

Or, d'après le lemme 3, le troisième terme de la formule précédente converge uniformément sur $\mathcal{O}_{p,h}$ vers zéro, le second terme converge uniformément sur $\mathcal{O}_{p,h}$ vers $\sum_{a=1}^{p^k f}{}' \tfrac{1}{2}\chi(a)(1 - aX)^{-2}$ qui converge uniformément vers zéro sur $\mathcal{O}_{p,h}$ lorsque k tend vers $+\infty$, car

$$\chi(a) = \chi(a + f) \quad \text{et} \quad |(1 - aX)^{-2} - (1 - a' X)^{-2}| \leq |a - a'| \, p^{4h} \quad \text{si} \quad \chi \in \mathcal{O}_{p,h} .$$

On a donc, uniformément sur $\mathcal{O}_{p,h}$,

$$G_\chi(X) = \lim_{k \to \infty} -p^{-k} f^{-1} \sum_{a=1}^{p^k f}{}' \frac{\chi(a)}{1 - aX} .$$

COROLLAIRE. - <u>On a, uniformément en</u> n,

$$B_{n,\chi}(1 - \chi(p) p^{n-1}) = \lim_{k \to \infty} -p^{-k} f^{-1} \sum_{a=1}^{p^k f}{}' \chi(a) a^n .$$

Ceci découle de la proposition 3 et des inégalités de Cauchy sur $B(0 , 1)^-$ appliquées à G_χ. Le lien est donc fait avec la théorie de KUBOTA et LÉOPOLDT [7].

3. Fonctions L p-adiques.

Les résultats de la première partie vont nous servir à montrer l'existence des fonctions L p-adiques des corps de nombres abéliens totalement réels. Puis nous montrerons directement que les fonctions L p-adiques existent et qu'elles sont liées à "l'algèbre d'Iwasawa".

THÉORÈME 4. - <u>Pour tout nombre premier</u> p, <u>il existe une et une seule fonction</u> $L_p(s , \chi)$ <u>méromorphe sur le disque</u> $B(1 , \rho_p)$, <u>où</u> $\rho_p = p^{1-1/(p-1)}$ <u>si</u> $p > 2$, et $\rho_2 = 4$, <u>telle que</u>

(i) $L_p(1 - n , \chi) = -n^{-1} B_{n,\chi}(1 - \chi(p) p^{n-1})$ <u>pour</u> $n \in (p - 1)\mathbb{N}^*$.

(ii) <u>Cette fonction a dans</u> $B(1 , \rho_p)$ <u>un seul pôle simple pour</u> $s = 1$ <u>avec résidu zéro si</u> $\chi \neq \chi_0$, <u>et résidu</u> $1 - p^{-1}$ <u>si</u> $\chi = \chi_0$.

Ceci découle du théorème 3 et du principe de prolongement analytique. Nous allons montrer que $L_p(s , \chi)$, $\chi \neq \chi_0$, et $(f , p) = 1$ (resp. $(u^{s-1} - 1)L_p(s , \chi_0)$

où $u \in \underset{\sim}{Z}_p$ et $|u - 1| \leqslant p^{-1}$) appartient à "l'algèbre d'Iwasawa". Nous utiliserons la définition suivante de "l'algèbre d'Iwasawa" qui est une très légère généralisation de celle de SERRE [11] pour des raisons de commodité.

DÉFINITION 11. - <u>"L'algèbre d'Iwasawa"</u> $\bar{L}$ <u>est l'ensemble des limites uniformes pour</u> $s \in \underset{\sim}{Z}_p$ <u>des combinaisons linéaires finies d'éléments de</u>

$$U_1 = \{u \in \underset{\sim}{Z}_p \; ; \quad |u - 1| \leqslant p^{-1}\} \quad \text{si} \quad p > 2$$

(resp. de $U_2 = \{u \in Z_2 \; ; \quad |u - 1| \leqslant 4^{-1}\}$ si $p = 2$) <u>à coefficients dans</u> A_p <u>anneau des entiers de</u> $\underset{\sim}{C}_p$.

Cette définition équivaut à dire que $g \in \bar{L}$ si, et seulement si, sa fonction génératrice $\sum_{n \geqslant 0} g(n) X^n$ est la limite uniforme sur $B(0 , 1)^- \subset \underset{\sim}{C}_p$ de combinaisons linéaires finies à coefficients dans A_p de fractions rationnelles

$$(1 - uX)^{-1} , \text{ où } u \in U_1 \text{ (resp. } u \in U_2) \text{ si } p > 2 \text{ (resp. } p = 2) .$$

<u>On supposera désormais que le conducteur de</u> χ <u>est premier à</u> p , $(f , p) = 1$.

La fonction génératrice de Hurwitz des $n^{-1} B_{n,\chi}$ $(n \geqslant 1)$ est

$$\tilde{\tilde{J}}_\chi(X) = \sum_{a=1}^{f} \chi(a) \, e^{aX}(e^{fX} - 1)^{-1} = X^{-1} + \sum_{n \geqslant 1} B_n \frac{X^{n-1}}{n!} \text{ si } \chi = \chi_0$$

$$= \sum_{n \geqslant 1} B_{n,\chi} \frac{X^{n-1}}{n!} \text{ si } \chi \neq \chi_0$$

puisque $\sum_{a=1}^{f} \chi(a) = 0$.

On posera

$$\tilde{J}_\chi(X) = \tilde{\tilde{J}}_\chi(X) \quad \text{si} \quad \chi \neq \chi_0$$

et

$$\tilde{J}_{\chi_0}(X) = \tilde{\tilde{J}}_{\chi_0}(X) - u\tilde{\tilde{J}}_{\chi_0}(Xu) \text{ , où } u \in U_1 \text{ si } p > 2 \text{ et } u \in U_2 \text{ si } p = 2 .$$

Après transformation de Laplace formelle, il vient

$$J_{\chi_0}(X) = \sum_{n \geqslant 1} (1 - u^n) \, n^{-1} B_{n,\chi_0} X^{n-1} \quad \text{et} \quad J_\chi(X) = \sum_{n \geqslant 1} n^{-1} B_{n,\chi} X^{n-1} \text{ si } \chi \neq \chi_0 .$$

PROPOSITION 4. - <u>Pour tout nombre premier</u> p , J_χ <u>est un élément analytique</u> sur $\mathcal{B}_{p,0} = B(0 , 1)^+ - \bigcup_{i=1}^{p-1} B(i , p^{-1})^+$.

Faisons tout d'abord la démonstration pour $\chi \neq \chi_0$.

$$\tilde{J}_\chi(X) = \sum_{a=1}^{f} \chi(a)(e^{aX} - 1)(e^{fX} - 1)^{-1} = \sum_{a=1}^{f} \chi(a) \frac{(e^X - 1 + 1)^a - 1}{(e^X - 1 + 1)^f - 1}$$

$$= \sum_{n \geqslant 0} a_n (e^X - 1)^n \; ;$$

où $a_n \in \underset{\sim}{A}_p$ puisque $(f , p) = 1$. Après transformation de Laplace formelle, il

vient

$$J_\chi(X) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{n!X^n}{(1-X)\dots(1-nX)} ,$$

ce qui, compte tenu des lemmes 2 et 3, démontre la proposition pour $\chi \neq \chi_0$.

Si $\chi = \chi_0$, alors

$$\tilde{J}_{\chi_0}(X) = e^X(e^X-1)^{-1} - ue^{uX}(e^{uX}-1)^{-1}$$

$$= \frac{(1+e^X-1)((e^X-1+1)^u-1) - u(e^X-1+1)^u(e^X-1)}{(e^X-1)((e^X-1+1)^u-1)}$$

$$= \sum_{n\geq 0} a_n(e^X-1)^n ,$$

où a_n dépend de u et $a_n \in \mathbb{Z}_p$, car $(e^X-1+1)^u = \sum_{n\geq 0}\binom{u}{n}(e^X-1)^n$ la convergence ayant lieu X-adiquement, et $\binom{u}{n} \in \mathbb{Z}_p$.

Donc, après transformation de Laplace formelle, il vient

$$J_{\chi_0}(X) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{n!X^n}{(1-X)\dots(1-nX)} .$$

La proposition est démontrée.

Pour montrer que $L_p(s,\chi)$ (resp. $(1-u^{s-1})L_p(s,\chi_0)$) appartient à "l'algèbre d'Iwasawa", on peut, soit utiliser les résultats du paragraphe 2, l'unicité de la décomposition de Mittag-Löffler et les résultats de [6], soit raisonner directement, ce que nous ferons.

Soit alors

$$\tilde{K}_\chi(X) = \tilde{J}_\chi(X) - \chi(p)\tilde{J}_\chi(Xp) = \sum_{a=1}^{\prime pf} \chi(a)\, e^{aX}(e^{pfX}-1)^{-1} ,$$

où $\sum_a'$ désigne une sommation sur les entiers a tels que $(a,p)=1$.

Donc après transformation de Laplace formelle $K_\chi(X) = J_\chi(X) - \chi(p)J_\chi(pX)$. Il est clair que K_χ est un élément analytique sur $\mathcal{B}_{p,0}$. Décomposons, K_χ, par le théorème de Mittag-Löffler, en somme de ses parties singulières relatives aux trous de $\mathcal{B}_{p,0}$. Les trous de $\mathcal{B}_{p,0}$ sont les boules

$$B(i,p^{-1})^+ \text{ pour } 1\leq i\leq p-1 , \text{ et } B(\infty,p^{-1})^+ = \mathbb{C}_p - B(0,1)^+ .$$

Soit $K_{\chi,i}$, $1\leq i\leq p-1$ ou bien $i=\infty$, la partie singulière de K_χ relatives au trou $B(i,p^{-1})^+$, dans la décomposition de Mittag-Löffler. On a

$$K_\chi(X) = K_{\chi,1}(X) + \dots + K_{\chi,p-1} + K_{\chi,\infty}(X) \text{ sur } \mathcal{B}_{p,0} .$$

On tire de la définition de $\tilde{K}_\chi$ que $(e^{pfX}-1)\tilde{K}_\chi(X) = \sum_{a=1}^{\prime pf}\chi(a)\,e^{aX}$ et,

après transformation de Laplace formelle,

$$(1 - pfX)^{-1} K_\chi\left(\frac{X}{1 - pfX}\right) - K_\chi(X) = \sum'_{a=1}^{pf} \chi(a)(1 - aX)^{-1} .$$

L'identité précédente montre que

$$(1 - pfX)^{-1} K_{\chi,\infty}\left(\frac{X}{1 - pfX}\right) - K_{\chi,\infty}(X) = 0 ,$$

LEMME 4.

$$K_{\chi,\infty}(X) = 0 , \qquad K_\chi \in H_0(\underset{\sim}{C}_p - \cup_{i=1}^{p-1} \cup_{m=0}^{p^k-1} B(i + mp , p^{-k-1})^+) .$$

La première égalité s'obtient par dérivation successive de l'idendité précédente, et en prenant la valeur de la dérivée n-ième en zéro. La deuxième affirmation provient de ce que, d'après les lemmes 1 et 2,

$$J_\chi \in H_0(B(0 , 1)^+ - \cup_{i=1}^{p-1} \cup_{m=0}^{p^k-1} B(i + pm , p^{-k-1})^+) ,$$

donc aussi K_χ , et le résultat découle de ce que $K_{\chi,\infty} = 0$.

THÉORÈME 5. - <u>Si le conducteur du caractère</u> χ <u>est premier à</u> p , <u>alors</u> $L_p(s , \chi)$, <u>respectivement</u> $(u^{s-1} - 1) L_p(s , \chi_0)$, <u>appartient à "l'algèbre d'Iwasawa"</u>.

En effet :

$$K_\chi(X) = \sum_{n\geq 1} n^{-1} B_{n,\chi}(1 - \chi(p) p^{n-1})X^{n-1} = \sum_{n\geq 0} a_n \sum_k^* (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{1}{(1 - kX)} ,$$

où $\sum_k^*$ désigne une sommation sur les k tels que $k \not\equiv 0 \mod (p)$, le troisième membre convergeant uniformément sur le quasi-connexe

$$\mathcal{Q}_{p,k} = \underset{\sim}{C}_p - \cup_{i=1}^{p-1} \cup_{m=0}^{p^k-1} B(i + pm , p^{-k-1})^+ .$$

La démonstration est analogue à celle du corollaire 2 du théorème 1. Décomposons K_χ sur le quasi-connexe $\mathcal{Q}_{p,k}$ en somme de ses parties singulières relatives aux trous du quasi-connexe, il vient

$$K_\chi(X) = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{m=0}^{p^k-1} K_{\chi,i,m}(X) ,$$

où $K_{\chi,i,m} \in H_0(\underset{\sim}{C}_p - B(i + mp , p^{-k-1})^+)$. D'après Mittag-Löffler,

$$\|K_{\chi,i,m}\|_{\underset{\sim}{C}_p - B(i+pm,p^{-k-1})^+} \leq \|K_\chi\|_{\mathcal{Q}_{p,k}} .$$

Or, $\|K_\chi\|_{\mathcal{Q}_{p,k}} \leq p^{k+1}$, comme il découle de la formule donnant K_χ puisque $|a_n| \leq 1$, ou bien d'après le principe du maximum

$$\|K_\chi\|_{\mathcal{Q}_{p,k}} = \|K_\chi\|_{\mathcal{Q}_{p,k}} \cap B(0\ ,\ 1)^+ ,$$

et

$$\|K_\chi\|_{\mathcal{Q}_{p,k}\cap B(0,1)^+} < \|J_\chi\|_{\mathcal{Q}_{p,k}\cap B(0,1)^+} < p^{k+1}$$

la dernière inégalité découlant du lemme 1. Or

$$K_{\chi,i,m} = \sum_{n\geq 1} \lambda_{\chi,i,m,n}(1 - (i + mp)^{-1} X)^{-n} \quad \text{avec} \quad |\lambda_{\chi,i,m,n}| < p^{k+1-n(k+1)} .$$

Donc

$$\|K_{\chi,i,m}(X) - \lambda_{\chi,i,m,1}(1 - (i + pm)^{-1} X)^{-1}\|_{B(0,1)^-} \leq p^{-k-1} \quad \text{et} \quad |\lambda_{\chi,i,m,1}| \leq 1 .$$

On a donc uniformément sur $B(0\ ,\ 1)^-$,

$$K_\chi(X) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{m=0}^{p^k-1} \lambda_{\chi,i,m,1}(1 - (i + pm)^{-1} X)^{-1} ,$$

remarquons que $\lambda_{\chi,i,m,1}$ dépend de k . Donc, d'après les inégalités de Cauchy, $L_p(1 - n\ ,\ \chi)$ est la restriction, pour $n \equiv 0 \mod (p - 1)$, d'une fonction de l'algèbre d'Iwasawa, le principe du prolongement analytique permet de conclure. La démonstration est analogue pour $(u^{s-1} - 1)\ L_p(s\ ,\ \chi_0)$. Le théorème est démontré. Ce théorème démontre, dans le cas $(f\ ,\ p) = 1$, aussi l'existence de la fonction L p-adique associée au caractère χ .

<u>Remarque</u>. - On peut montrer que la mesure μ , associée par KATZ à $L_p(s\ ,\ \chi)$, respectivement à $(u^{s-1} - 1)\ L_p(s\ ,\ \chi_0)$, est la mesure $\nu\varphi_1$, où φ_1 est la fonction caractéristique dans $\underset{\sim}{Z}_p$ de la couronne de $\underset{\sim}{Z}_p$, $U = \{x \in \underset{\sim}{Z}_p\ ;\ |x| = 1\}$, et où ν est la mesure qui a pour coefficient a_n sur les générateurs $\binom{x}{n}^*$ du dual $\mathcal{C}'(\underset{\sim}{Z}_p\ ,\ \underset{\sim}{C}_p)$ de $\mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p\ ,\ \underset{\sim}{C}_p)$, espace des fonctions continues de $\underset{\sim}{Z}_p$ dans $\underset{\sim}{C}_p$, et $(\binom{x}{n}^*\ ,\ \binom{x}{m}) = 0$ si $m \neq n$ et $= 1$ si $m = n$ (si $f \in (\underset{\sim}{Z}_p\ ,\ \underset{\sim}{C}_p)$, $(\nu\varphi_1\ ,\ f) = (\nu\ ,\ \varphi_1 f)$, et $(\nu\ ,\ f)$ désigne la valeur de la mesure ν au point f , $\nu \in \mathcal{C}'(\underset{\sim}{Z}_p\ ,\ \underset{\sim}{C}_p)$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.). - Les nombres p-adiques. - Paris, Presses Universitaires de France, 1975 (Collection SUP "Le Mathématicien", 14).

[2] AMICE (Y.). - Interpolation p-adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-180 (Thèse Sc. math. Paris, 1964).

[3] AMICE (Y.) et FRESNEL (J.). - Fonction zéta p-adiques des corps de nombres abéliens réels, Acta Arithm., Warszawa, t. 20, 1972, p. 353-384.

[4] BARSKY (D.). - Analyse p-adique et nombres de Bell, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique (Amice-Robba), 3e année, 1975/76, n° 8 ; et C.R. Acad. Sc. Paris, t. 282, 1976, Série A, p. 1257-1259.

[5] BARSKY (D.). - Congruences de coefficients de séries de Taylor, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique (Amice-Robba), 3e année, 1975/76, n° 17.

[6] BARSKY (D.). - Prolongement analytique p-adique effectif, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 281, 1975, Série A, p. 749-752.

[7] IWASAWA (K.). - Lectures on p-adic L-functions. - Princeton, Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1972 (Annals of Mathematics Studies 74).

[8] KATZ (N. M.). - The congruences of Clausen - von Staudt and Kummer for Bernoulli-Hurwitz numbers, Math. Annalen, t. 216, 1975, p. 1-4.

[9] KUMMER (E. F.). - Über eine allgemeine Eigenschaft der rationalen Entwicklungscoëfficienten einer bestimmten Gattung analytischer Functionen, J. für die reine und angew. Math., t. 41, 1851, p. 368-372.

[10] ROBBA (P.). - Fonctions analytiques sur les corps valués complets ultramétriques, "Prolongement analytique et algèbres de Banach ultramétriques", Astérisque n° 10, 1973, p. 109-218.

[11] SERRE (J.-P.). - Formes modulaires et fonctions zéta p-adiques, "Modular function of one variable 3", p. 191-268. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 350).

(Texte reçu le 13 septembre 1976)

Daniel BARSKY
Département de Mathématiques
Université de Paris-7
Tour 45-55, 5e étage
2 place Jussieu
75221 PARIS CEDEX 05