

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

RICHARD MASSY

THONG NGUYEN-QUANG-DO

**Extensions non abéliennes de degré  $p^3$  d'un corps de  
nombres : étude locale-globale**

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 17, n° 1 (1975-1976),  
exp. n° 19, p. 1-13

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1975-1976\\_\\_17\\_1\\_A17\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_1_A17_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

EXTENSIONS NON ABÉLIENNES DE DEGRÉ  $p^3$  D'UN CORPS DE NOMBRES :  
ÉTUDE LOCALE-GLOBALE

par Richard MASSY et Thong NGUYEN-QUANG-DO

Introduction.

Soient une extension de groupes finis :

$$(\varepsilon) \quad 1 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

de noyau abélien  $A$ , décrite par une classe de cohomologie  $\varepsilon \in H^2(G, A)$ , et  $K/k$  une extension galoisienne de corps de nombres, dont le groupe de Galois est isomorphe à  $G$ . Le problème de plongement relatif à  $K/k$  et  $\varepsilon$  (en abrégé : problème  $(K/k, \varepsilon)$ ) consiste à chercher une surextension  $\underline{L}/k$ , galoisienne, de groupe de Galois isomorphe à  $E$ , et telle que le passage au quotient  $E \twoheadrightarrow G$  corresponde sur les groupes de Galois à la restriction des automorphismes de  $\underline{L}$  à  $K$ . Autrement dit, l'extension des groupes de Galois est décrite par la même classe  $\varepsilon$ .

Nous nous proposons ici de résoudre le problème de plongement dans le cas où  $E$  est un groupe non abélien d'ordre  $p^3$  ( $p$  étant un nombre premier), et  $\underline{G}$  un quotient de  $E$  de type  $(p, p)$ , en utilisant la théorie de Kummer et des méthodes "globales-locales". Ce problème avait été étudié par R. GILLARD [5], mais résolu seulement de façon partielle.

1. Rappels sur le problème de plongement.

On sait, d'après HOECHSMANN [6], que le problème général de plongement  $(K/k, \varepsilon)$  admet une solution si, et seulement si,  $\text{inf } \varepsilon = 0$ , où  $\text{inf}$  désigne l'inflation :  $H^2(G, A) \xrightarrow{\text{inf}} H^2(\bar{G}, A)$ , et  $\bar{G}$  le groupe de Galois d'une clôture algébrique de  $k$  contenant  $K$ .

Dans le cas particulier où  $G$  et  $A$  sont des  $p$ -groupes (on dira alors qu'il s'agit d'un problème de  $p$ -plongement), on peut prendre pour  $\bar{G}$  le groupe de Galois d'une  $p$ -extension maximale  $\bar{k}$  de  $k$  contenant  $K$ . Dans ce cas, soit  $k'$  (resp.  $K'$ ) le corps obtenu en ajoutant à  $k$  (resp.  $K$ ) les racines  $p$ -ièmes de l'unité. Le groupe  $G' = \text{gal}(K'/k')$  s'identifie canoniquement à  $G$  et on a le théorème de réduction suivant.

THÉORÈME 1. - Pour que le problème de  $p$ -plongement  $(K/k, \varepsilon)$  admette une solution, il faut et il suffit qu'il en soit de même pour le problème  $(K'/k', \varepsilon)$ .

Démonstration. - Voir par exemple [5], théorème 5.

Considérons maintenant le cas encore plus particulier d'un  $p$ -plongement à noyau d'ordre  $p$  (i. e.  $A$  est supposé cyclique d'ordre  $p$  et  $G$  opère trivialement sur  $A$ ).

Pour toute place  $v$  de  $k$ , finie ou non, choisissons un plongement de  $v$  à  $\bar{k}$ , noté aussi  $v$ , correspondant à des groupes de décomposition  $G_v$  et  $\bar{G}_v$  dans  $G$  et  $\bar{G}$ , et à des complétés  $k_v$  et  $K_v$  de  $k$  et  $K$ .

Le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^2(G, A) & \longrightarrow & \prod_v H^2(G_v, A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^2(\bar{G}, A) & \xrightarrow{h} & \prod_v H^2(\bar{G}_v, A) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des produits de restrictions et les flèches verticales des inflations, est commutatif. Pour toute place  $v$ , soit  $\varepsilon_v$  la restriction de  $\varepsilon$  dans  $H^2(G_v, A)$ . La classe  $\varepsilon_v$  est associée à la suite exacte :  $1 \rightarrow A \rightarrow E_v \rightarrow G_v \rightarrow 1$ , où  $E_v$  est l'image réciproque de  $G_v$  dans  $E$ .

D'après [3] (théorème 2, p. 300), la flèche  $h$  est injective ; donc  $\inf_{G \rightarrow \bar{G}} \varepsilon = 0$  si, et seulement si,  $\inf_{G_v \rightarrow \bar{G}_v} \varepsilon_v = 0$ . Cette deuxième condition sera appelée condition locale en  $v$ , associée au problème  $(K/k, \varepsilon)$ .

On a ainsi montré le "principe local-global" suivant :

THÉOREME 2. - Pour que le problème de  $p$ -plongement  $(K/k, \varepsilon)$ , à noyau d'ordre  $p$ , admette une solution, il faut et il suffit que toutes les conditions locales associées soient vérifiées.

Remarque. - Si  $G_v$  et  $E_v$  ont même rang (= nombre minimal de générateurs), la condition locale en  $v$  est vérifiée si, et seulement si, ([6], 2.3) le problème de plongement local  $(K_v/k_v, \varepsilon_v)$  admet une solution.

Il reste maintenant à étudier les conditions locales, ce qu'on va faire par la théorie de Kummer puisque, d'après le théorème 1, on peut supposer que  $k$  contient le groupe  $\mu_p$  des racines  $p$ -ièmes de 1. Si  $G$  est d'ordre  $p^2$ , de type  $(p, p)$ , la condition locale en une place décomposée est très simple (voir par exemple [5], 2). On se limitera donc à examiner les places non décomposées, en utilisant la remarque ci-dessus.

## 2. Etude kummérienne du $p$ -plongement à noyau d'ordre $p$ .

Soit  $p$  un nombre premier. Dans toute cette section,  $\underline{K}$  désignera un corps de caractéristique différente de  $p$ , contenant le groupe  $\mu_p$  des racines  $p$ -ièmes de l'unité. Les raisonnements seront facilités par le langage géométrique suivant.

2.1. Langage géométrique. - Désignons par  $\Gamma_{\underline{K}}$  l'espace vectoriel  $K^*/K^{*p}$  sur le corps premier  $\underline{\mathbb{F}}_p$ . Si  $\underline{L}/\underline{K}$  est une extension abélienne élémentaire finie de  $\underline{K}$

(i. e. une extension abélienne finie dont le groupe de Galois est d'exposant  $p$ ), appelons  $P(L/K)$  l'ensemble des points de  $\Gamma_K$  représentés par des éléments  $a \in K^*$  tels que  $K(\sqrt[p]{a}) \subset L$ . D'après la théorie de Kummer, l'application

$$\underline{L} \longmapsto P(L/K)$$

induit une bijection  $\pi_K$  de l'ensemble des extensions abéliennes élémentaires de degré  $p^m$  de  $K$  ( $m \geq 1$ ), sur l'ensemble des sous-espaces de dimension  $m$  de  $\Gamma_K$ .

Cas local. - Si  $\underline{K}$  est un corps  $\ell$ -adique, i. e. une extension de degré  $n$  d'un corps  $\mathbb{Q}_\ell$  de nombres  $\ell$ -adiques, on sait ([3], p. 137) que  $\dim \Gamma_K = \alpha n + 2$ , où  $\alpha = 1$  ou  $0$  suivant que  $\ell = p$  ou  $\ell \neq p$ . De plus, le symbole de puissance  $p$ -ième (ou symbole de Hilbert) permet de définir une application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Gamma_K \times \Gamma_K \longrightarrow \mathbb{F}_p,$$

bilinéaire, antisymétrique, non dégénérée, que nous ferons abondamment intervenir dans la section 3, en utilisant librement les résultats et le vocabulaire du livre d'ARTIN [1]. En particulier, deux éléments  $x$  et  $y$  de  $\Gamma_K$  sont orthogonaux si, et seulement si,  $x$  est une norme de  $K(\sqrt[p]{y})$  à  $K$ .

2.2. Prolongement à noyau d'ordre  $p$ . - Soit  $G$  un  $p$ -groupe d'automorphismes de  $K$ , dont le corps fixe est  $k$  (alors  $k$  contient aussi  $\mu_p$ ). Le groupe  $G$  opère de façon naturelle sur  $\Gamma_K$ .

THÉOREME 3. - Les extensions galoisiennes de degré  $p$  de  $K$  qui sont galoisiennes sur  $k$ , s'identifient par la bijection  $\pi_K$  aux droites du  $\mathbb{F}_p$ -sous-espace vectoriel  $\Gamma_K^G$  des vecteurs de  $\Gamma_K$  laissés fixes par  $G$ .

Démonstration. - C'est un exercice facile de théorie de Galois que de montrer qu'une extension galoisienne de degré  $p$ ,  $\underline{L} = K(\sqrt[p]{a})$ ,  $a \in K^*$ , est galoisienne sur  $k$  si, et seulement si,  $a^{-1} \cdot \sigma a \in K^{*p}$  pour tout  $\sigma \in G$ . La traduction en langage géométrique est immédiate.

Un sous-espace remarquable de  $\Gamma_K^G$  est le sous-espace  $\eta(\Gamma_k)$ , où  $\eta = \eta_{K/k}$  est l'homomorphisme de  $\Gamma_k$  dans  $\Gamma_K$  induit par l'injection canonique de  $k^*$  dans  $K^*$ . Il intervient de la façon suivante.

### 2.3. Interprétation cohomologique.

THÉOREME 4. - On a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \Gamma_K^G / \eta(\Gamma_k) \simeq H^1(G, K^{*p}) \xrightarrow{\psi} H^2(G, \mu_p) \xrightarrow{\varphi} H^2(G, K^*).$$

Les extensions galoisiennes de degré  $p$  de  $K$  qui sont galoisiennes scindées sur  $k$  (i. e. telles que l'extension des groupes de Galois correspondants est scindée) s'identifient par  $\pi_K$  aux droites de  $\eta(\Gamma_k)$ .

Définition. - Les classes de cocycles de  $\text{Ker } \varphi$  seront appelées admissibles pour  $K/k$ .

Démonstration. - Considérons les deux suites exactes de  $G$ -modules :

$$1 \longrightarrow K^{*p} \longrightarrow K^* \longrightarrow \Gamma_K \longrightarrow 1 \quad \text{et} \quad 1 \longrightarrow \mu_p \longrightarrow K^* \longrightarrow K^{*p} \longrightarrow 1.$$

Nous en déduisons les suites exactes de cohomologie :

$$1 \longrightarrow k^* \cap K^{*p} \longrightarrow k^* \longrightarrow \Gamma_K^G \longrightarrow H^1(G, K^{*p}) \longrightarrow 1,$$

$$\text{i. e. } H^1(G, K^{*p}) \simeq \Gamma_K^G / \eta(\Gamma_K) \quad \text{et}$$

$$1 \longrightarrow H^1(G, K^{*p}) \xrightarrow{\psi} H^2(G, \mu_p) \xrightarrow{\varphi} H^2(G, K^*) \longrightarrow \dots$$

La dernière suite exacte montre que, pour qu'une classe de cocycles  $\varepsilon \in H^2(G, \mu_p)$  soit admissible pour  $K/k$ , il faut et il suffit que le problème de plongement  $(K/k, \varepsilon)$  admette une solution. On peut expliciter  $\text{Ker } \varphi = \text{Im } \psi$ .

Soit  $a \in K^*$  représentant un élément de  $\Gamma_K^G$ . Pour tout  $\sigma \in G$ , choisissons  $x_\sigma \in K^*$  tel que  $a^{-1} \cdot \sigma a = x_\sigma^p$ . L'application de  $G \times G$  dans  $\mu_p$ , définie par  $a(\sigma, \tau) = x_\sigma \cdot \sigma(x_\tau) \cdot x_{\sigma\tau}^{-1}$  est un 2-cocycle (vérification facile), dont la classe dans  $H^2(G, \mu_p)$  dépend seulement de la classe de  $a$  dans  $\Gamma_K^G / \eta(\Gamma_K)$ .

2.4. Cas particulier important. - C'est le cas où  $G$  est cyclique. Dans ce cas, on peut expliciter les groupes de cohomologie, et la suite exacte du théorème 4 devient

$$1 \longrightarrow \Gamma_K^G / \eta(\Gamma_K) \xrightarrow{\psi} \mu_p \xrightarrow{\varphi} k^* / Nk^*,$$

où  $N$  désigne la norme de  $K$  à  $k$ .

La description précédente de  $\psi$  montre que, pour qu'une extension galoisienne de degré  $p$ ,  $\underline{L} = K(\sqrt[p]{a})$ ,  $a \in K^*$ , soit cyclique (resp. galoisienne scindée) sur  $k$ , il faut et il suffit que  $a^{-1} \cdot \sigma a = x^p$ ,  $x \in K^*$  avec  $Nx \neq 1$  (resp.  $Nx = 1$ ).

2.5. Cas local. - Si  $k$  est une extension de degré  $n_0$  d'un corps  $\mathbb{Q}_\ell$  de nombres  $\ell$ -adiques, on peut préciser le théorème 4.

THÉORÈME 5. -  $\dim \Gamma_K^G = \alpha n_0 + 2 - \beta + r - d$ , où :

$$\alpha = 1 \quad (\text{resp. } 0) \quad \text{si } \ell = p \quad (\text{resp. } \ell \neq p)$$

$$\beta = 1 \quad (\text{resp. } 0) \quad \text{si } \text{Im } \varphi \neq 0 \quad (\text{resp. } \text{Im } \varphi = 0)$$

$$d = \dim H^1(G, \mu_p) = \text{nombre minimal de générateurs de } G$$

$$r = \dim H^2(G, \mu_p) = \text{nombre minimal de relations de } G \quad (\text{considéré comme pro-}p\text{-groupe}).$$

Démonstration. - Par le corps de classes, on sait que  $H^2(G, K^*)$  est cyclique. Comme  $H^2(G, \mu_p)$  est d'exposant  $p$ ,  $\text{Im } \varphi$  est de dimension au plus égale à 1. D'autre part, par la théorie de Kummer,  $\text{Ker } \eta$  correspond, par la bijection  $\pi_K$ ,

à la sous-extension abélienne élémentaire maximale de  $K/k$ . La formule du théorème 5 s'obtient immédiatement en prenant la somme alternée des dimensions dans la suite exacte du théorème 4.

En particulier, si  $G$  est cyclique,  $\dim \Gamma_K^G / \eta(\Gamma_K) = 1$  ou  $0$  suivant que  $\mu_p \subset NK^*$  ou non.

### 3. Résultats locaux.

Soit  $p$  un nombre premier. Dans toute cette section,  $K/k$  désignera une extension galoisienne de corps  $\mathbb{F}$ -adiques, contenant le groupe  $\mu_p$  des racines  $p$ -ièmes de l'unité, et dont le groupe de Galois est abélien de type  $(p, p)$ . Il correspond à cette extension, par la bijection  $\pi_K$ , un plan  $P(K/k)$ . On va chercher quelles conditions doit vérifier ce plan pour que  $K/k$  se plonge dans une sur-extension non abélienne de degré  $p^3$ .

(Une grande partie des démonstrations, celle qui est d'ordre purement algébrique, reste valable pour un corps  $k$  quelconque, de caractéristique  $\neq p$ .)

3.1. Rappels sur les groupes d'ordre  $p^3$ . - Si  $p \neq 2$ , il existe, à isomorphisme près, deux groupes non abéliens d'ordre  $p^3$ , engendrés par générateurs et relations de la façon suivante :

Type  $E_1$  :  $r^p = s^p = t^p = 1$ ,  $rsr^{-1}s^{-1} = t$ ,  $rt = tr$ ,  $st = ts$ .

Les  $(p+1)$  sous-groupes d'ordre  $p^2$  sont de type  $(p, p)$ .

Type  $E_2$  :  $s^p = t^{p^2} = 1$ ,  $sts^{-1}t^{-1} = t^p$ .

Parmi les  $(p+1)$  sous-groupes d'ordre  $p^2$ , un et un seul est de type  $(p, p)$ . Si  $p = 2$ , il existe, à isomorphisme près, deux groupes non abéliens d'ordre 8.

Type  $E_1^!$  (ou diédral) :  $s^2 = t^4 = 1$ ,  $sts^{-1} = t^{-1}$ .

Parmi les trois sous-groupes d'ordre 4, un et un seul est cyclique.

Type  $E_2^!$  (ou quaternionien) :  $t^4 = 1$ ,  $s^2 = t^2$ ,  $sts^{-1} = t^{-1}$ .

Les trois sous-groupes d'ordre 4 sont cycliques.

Dans tous les cas ( $p = 2$  ou  $p \neq 2$ ), le seul sous-groupe normal d'ordre  $p$  est le centre, confondu avec le groupe de Frattini.

Enfin, un groupe abélien non élémentaire d'ordre  $p^3$  sera dit de type  $E_0$ . Parmi ses  $(p+1)$  sous-groupes d'ordre  $p^2$ , un et un seul est de type  $(p, p)$ .

3.2. Comparaison des prolongements ( $p \neq 2$ ). - Une extension galoisienne  $L/k$  dont le groupe de Galois est de type  $E_i$  (resp.  $E_j^!$ ) sera dite extension de type  $E_i$  (resp.  $E_j^!$ ).

## THÉOREME 6.

(i) S'il en existe, les extensions de  $k$  contenant  $K$  de type  $E_1$  (resp. de type  $E_0$ , non cycliques sur une sous-extension donnée de  $K$  de degré  $p$ ) s'identifient par  $\pi_K$  aux droites engendrées par les vecteurs d'une certaine classe non triviale du quotient  $\Gamma_K^G/\eta(\Gamma_k)$  ( $\eta = \eta_{K/k}$ ).

(ii) S'il en existe, les extensions de type  $E_2$  de  $k$  contenant  $K$  qui sont non cycliques sur une sous-extension  $k_0/k$  de  $K$  de degré  $p$ , s'identifient par  $\pi_K$  aux droites de  $\Gamma_K^G$  engendrées par les vecteurs d'une certaine classe non triviale du quotient  $\Gamma_K^G/\eta_0(\Gamma_{k_0}^H)$ , où  $\eta_0 = \eta_{K/k_0}$  et  $H = \text{Gal}(k_0/k)$ .

Démonstration. - Soient  $\sigma$  et  $\tau$  deux générateurs de  $G = \text{Gal}(K/k)$ , correspondants aux corps fixes  $k_0 = k(\sqrt[p]{\alpha})$  et  $k_1(\sqrt[p]{\beta})$ ,  $\alpha$  et  $\beta \in k^*$ . D'après le théorème 4, toute extension  $L/K$  de degré  $p$  et abélienne de type  $(p, p)$  sur  $k_0$ , est de la forme  $L = K(\sqrt[p]{a})$ ,  $a \in k_0^*$ . D'après le théorème 3, cette extension est galoisienne sur  $k$  si, et seulement si,  $a^{-1} \cdot \tau a = x^p$ ,  $x \in K^*$ . Comme  $a^{-1} \cdot \tau a \in k_0^*$ , cette condition équivaut à  $a^{-1} \cdot \tau a = \lambda_0^p \beta^i$ ,  $\lambda_0 \in k_0^*$ ,  $i \in \mathbb{F}_p$ . On voit facilement que, pour que  $L/k$  soit abélienne, il faut et il suffit que  $i = 0$ . Dans ce cas, l'extension  $L/k$  est abélienne non élémentaire si, et seulement si, elle est la composée avec  $K$  d'une extension cyclique de degré  $p^2$  de  $k$ , contenant  $k_0$ . Si  $L/k$  est non abélienne, elle est de type  $E_1$  (resp. de type  $E_2$ ) si, et seulement si,  $N_{K/k_1} x = 1$  (resp.  $\neq 1$ ), d'après 2.4. Le reste de la démonstration s'ensuit aisément.

C. Q. F. D.

3.3. Plans prolongeables ( $p \neq 2$ ). - Le plan  $P(K/k)$  correspondant par  $\pi_k$  à l'extension  $K/k$  abélienne de type  $(p, p)$ , est dit prolongeable de type  $E_1$  (resp. de type  $E_2$  ou  $E_0$ , au dessus d'une droite  $D(k_0/k) \subset P(k/k)$  image par  $\pi_k$  d'une extension  $k_0/k$  de degré  $p$ ), s'il existe une extension de  $k$  de type  $E_1$  (resp. de type  $E_2$  ou  $E_0$ , non cyclique sur  $k_0$ ), contenant  $K$ .

## THÉOREME 7.

(i) Un plan est prolongeable de type  $E_0$  au-dessus d'une droite  $D(k_0/k)$  si, et seulement si, cette droite est orthogonale à  $\mu_p$ .

(ii) Les plans prolongeables de type  $E_1$  sont les plans dégénérés.

(iii) Les plans prolongeables de type  $E_2$  au-dessus d'une droite  $D(k_0/k)$  sont les plans hyperboliques (resp. les plans dégénérés) contenant  $D(k_0/k)$  si  $D(k_0/k)$  n'est pas orthogonale à  $\mu_p$  (resp. est orthogonale à  $\mu_p$ ).

Démonstration. - L'assertion (i) résulte immédiatement de la démonstration du théorème 6. Considérons le cas non abélien : une extension  $L = K(\sqrt[p]{a})$ ,  $a \in k_0^*$ , est galoisienne sur  $k$ , non abélienne, non cyclique sur  $k_0$ , si et seulement si

$a^{-1} \cdot \tau a = x^p = \lambda_0^p \beta^i$ ,  $\lambda_0 \in k_0^*$ ,  $i \in \mathbb{F}_p^*$  (notations de la démonstration du théorème 7). Cette condition entraîne, en prenant les normes relativement à  $\tau$ , que  $\beta \in \mu_p \cdot N_{k_0/k} k_0^*$ . L'extension est de type  $E_1$  (resp. de type  $E_2$ ), d'après 2.4, si, et seulement si,  $N_{k/k_1} x = 1$  (resp.  $\neq 1$ ), ce qui équivaut à  $\beta \in N_{k_0/k} k_0^*$  (resp.  $\exists \xi \in \mu_p$ ,  $\xi \neq 1$ , tel que  $\xi^{-1} \beta \in N_{k_0/k} k_0^*$ ).

Remarquons que si  $\alpha$  n'est pas orthogonal à  $\mu_p$ , le quotient  $k^*/Nk_0^*$  est représenté par  $\mu_p$ .

Réciproquement, soit  $\beta = \xi N_{k_0/k} \lambda_0^{-1}$ ,  $\lambda_0 \in k_0^*$ ,  $\xi \in \mu_p$ . Alors

$$N_{k_0/k} \beta = N_{k_0/k} \lambda_0^{-p}$$

d'où, d'après le théorème 90 de Hilbert,  $\beta \cdot \lambda_0^p = a^{-1} \cdot \tau a$ ,  $a \in k_0^*$ .

Le théorème en résulte immédiatement.

Remarque. - Tout plan de  $\Gamma_k$  contient au moins une droite orthogonale à  $\mu_p$  ( $p \neq 2$  ou  $p = 2$ ).

### 3.2 bis. Comparaison des prolongements ( $p = 2$ ).

THÉORÈME 8. - S'il en existe, les extensions de  $k$  de type  $E_0$  (resp. de type  $E_1$  ou  $E_2$ ) contenant  $K$ , non cycliques (resp. cycliques) sur une sous-extension donnée de  $K$  de degré 2, s'identifient par  $\pi_K$  aux vecteurs d'une classe non triviale du quotient  $\Gamma_K^G / \eta(\Gamma_k)$ .

Démonstration. - Soient  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 = \sigma_1 \sigma_2$  les éléments non triviaux de  $G = \text{Gal}(K/k)$ . Soient  $k_i = k(\sqrt{\alpha_i})$  leurs corps fixes respectifs,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2 \in k^*$ ,  $\alpha_3 = \alpha_1 \alpha_2$ .

Avant d'appliquer le théorème 3, remarquons que pour tout  $\sigma \in G$  les applications de  $\Gamma_K$  dans  $\Gamma_k$ , définies par :  $a \longmapsto a^{-1} \cdot \sigma a$  et  $a \longmapsto N_\sigma a = a \cdot \sigma a$ , coïncident.

Une extension quadratique  $L = K(\sqrt{a})$ ,  $a \in K^*$ , est donc galoisienne sur  $k$  si, et seulement si,  $N_\sigma a = x_\sigma^2$ ,  $x_\sigma \in K^*$ , pour tout  $\sigma \in G$ . En tenant compte du fait que, pour  $i = 1, 2, 3$ ,  $N_{\sigma_i} a \in k_i$ , on peut répéter le raisonnement suivant du théorème 6 et obtenir les critères suivants de prolongement, qu'on énonce sous forme de lemme.

LEMME 1. - Pour que  $L = K(\sqrt{a})$ ,  $a \in K^*$ , soit galoisienne sur  $k$ , il faut et il suffit que  $N_{\sigma_1} a = \lambda_1^2 \alpha_1^{\rho_1}$ ,  $N_{\sigma_2} a = \lambda_2^2 \alpha_2^{\rho_2}$ , et  $N_{\sigma_3} a = \lambda_3^2 \alpha_3^{\rho_3}$ , où les  $\lambda_i$  sont des éléments de  $k_i^*$  et les  $\rho_i$  des éléments de  $\mathbb{F}_2$ , pour  $i = 1, 2, 3$ . De plus, l'extension  $L/k$  est :

- abélienne élémentaire si, et seulement si,  $\rho_i = 0$ ,  $\forall i$ .
- abélienne non élémentaire, non cyclique sur  $k_i$  si, et seulement si,  $\rho_i = 0$



et  $\rho_j = 1$  pour tout  $j \neq i$ .

- diédrale, cyclique sur  $k_i$  si, et seulement si,  $\rho_i = 1$  et  $\rho_j = 0$  pour tout  $j \neq i$ .

- quaternionienne si, et seulement si,  $\rho_i = 1$  pour tout  $i$ .

Le théorème s'ensuit sans difficulté.

3.3 bis. Plans prolongeables ( $p = 2$ ). - Un plan  $P(K/k)$  correspondant par  $\pi_k$  à une extension  $K/k$  abélienne de type (2.2) est dit prolongeable de type  $E_2'$  (resp. de type  $E_1'$ , au-dessus d'une droite  $D(k_i/k) \subset P(K/k)$ ; resp. de type  $E_0$ , au-dessus de  $D(k_i/k)$ ) s'il existe une extension de  $k$  contenant  $K$ , de type  $E_2'$  (resp. de type  $E_1'$ , cyclique sur  $k_i$ ; resp. de type  $E_0$ , non cyclique sur  $k_i$ ).

Comme pour  $p \neq 2$ , le plan  $P(K/k)$  est prolongeable de type  $E_0$ , au-dessus d'une droite  $D(k_i/k)$ , si, et seulement si, cette droite est orthogonale à  $-1$ . Pour plus de clarté, nous examinerons séparément les cas diédral et quaternionien.

THÉORÈME 9. - Pour qu'un plan  $P(K/k)$  soit prolongeable de type  $E_1'$  au-dessus de  $D(k_i/k) \subset P(K/k)$ , il faut et il suffit que  $P(K/k)$  soit engendré par deux droites orthogonales  $D(k_j/k)$ ,  $j \neq i$ .

Les plans prolongeables de type  $E_1'$  se divisent en trois classes :

(i) les plans dégénérés orthogonaux à  $-1$  : ce sont les plans  $P(K/k)$  qui possèdent un prolongement de type  $E_1'$  au-dessus de chaque droite  $D(k_i/k)$ ,  $i=1,2,3$ , de  $P(K/k)$ .

(ii) les plans dégénérés non orthogonaux à  $-1$  : ce sont les plans  $P(K/k)$  qui possèdent un prolongement de type  $E_1'$  au-dessus des droites  $D(k_i/k)$ ,  $i \neq j$ , où  $D(k_j/k)$  est la droite de  $P(K/k)$  orthogonale à  $-1$ .

(iii) les plans non dégénérés non orthogonaux à  $-1$  : ce sont les plans  $P(K/k)$  qui possèdent un prolongement de type  $E_1'$  au-dessus de la droite de  $P(K/k)$  qui est orthogonale à  $-1$ .

Démonstration. - Soit  $\langle ., . \rangle$  la forme bilinéaire introduite en 2.1. Nous adoptons les notations du lemme 1.

(a) Soit  $L/k$  une extension diédrale contenant  $K$ . Supposons que  $L$  est non cyclique sur les extensions  $k_1$  et  $k_2$ . La même démonstration que celle du théorème 6 montre que  $L = K(\sqrt{a})$ ,  $a \in k_1^*$  vérifiant  $a^{-1} \cdot \sigma_2 a = x^2 = \lambda_1^2 \alpha_2$ , avec  $\lambda_1 \in k_1^*$  et  $N_{K/k_2} x = 1$ , d'où (mêmes calculs que dans le théorème 7), l'on déduit que  $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 0$ . Pour tout plan  $P(K/k)$ , montrons la propriété suivante :

$P(K/k)$  est engendré par deux vecteurs orthogonaux équivaut à  $P(K/k)$  n'est pas orthogonal à  $-1$ , ou  $P(K/k)$  est orthogonal à  $-1$  et dégénéré.

En effet : si  $P(K/k)$  est orthogonal à  $-1$ , tous ses vecteurs sont isotropes

et il est dégénéré.

Par contre : si  $P(K/k)$  n'est pas orthogonal à  $-1$ , soit par exemple  $\alpha_1$  le seul vecteur non nul du plan qui soit orthogonal à  $-1$ , alors, si  $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 1$ ,

$$\langle \alpha_2, \alpha_1 \alpha_2 \rangle = \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle + \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle = 1 + 1 = 0,$$

et la propriété est ainsi démontrée.

(b) Réciproquement, soit  $P(K/k)$  engendré par deux vecteurs orthogonaux  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . Alors  $\alpha_1 = N_{k_2/k} \lambda_2$ ,  $\lambda_2 \in k_2^*$  d'où, par le même raisonnement que dans le théorème 7, il existe une extension de type  $E_1'$ , non cyclique sur  $k_1$  et  $k_2$ , donc cyclique sur  $k_3$ .

(c-i) Si  $P(K/k)$  est orthogonal à  $-1$  et dégénéré, tous les vecteurs de ce plan sont orthogonaux entre eux, et (b) montre qu'on peut construire, pour tout  $1 \leq i \leq 3$ , une extension de type  $E_1'$ , cyclique sur  $k_i$ . Réciproquement, si  $P(K/k)$  est prolongeable de type  $E_1'$  au-dessus de ses trois droites, (a) montre que  $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 0$ ,  $\langle \alpha_2, \alpha_1 \alpha_2 \rangle = 0$  et  $\langle \alpha_1, \alpha_1 \alpha_2 \rangle = 0$ , d'où visiblement  $P(K/k)$  est dégénéré et orthogonal à  $-1$ .

(c-ii) Si  $P(K/k)$  est dégénéré, non orthogonal à  $-1$ , soit  $\alpha_1$  le seul vecteur non nul de  $P(K/k)$  orthogonal à  $-1$ . Alors  $\alpha_1$  est orthogonal à tout vecteur du plan, donc d'après (b), il existe des prolongements de type  $E_1'$  au-dessus de  $k_2$  et  $k_3$ , et d'après (i), il n'en existe pas au-dessus de  $k_1$ . Réciproquement, si  $P(K/k)$  admet des prolongements de type  $E_1'$  au-dessus de  $k_2$  et  $k_3$  et pas au-dessus de  $k_1$ ,  $P(K/k)$  n'est pas orthogonal à  $-1$ , d'après (a) et (c-i). De plus, d'après (a),  $\alpha_1$  est orthogonal à  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$ . Enfin, d'après le lemme 1, si  $K(\sqrt{a_2})$  et  $K(\sqrt{a_3})$  sont deux extensions de type  $E_1'$  au-dessus de  $k_2$  et  $k_3$ ,  $K(\sqrt{a_2 a_3})$  est de type  $E_0$  au-dessus de  $k_1$ , donc  $\alpha_1$  est orthogonal à  $-1$ .

(c-iii) Si  $P(K/k)$  est non dégénéré, non orthogonal à  $-1$ , soit  $\alpha_1$  le seul vecteur non nul orthogonal à  $-1$ . Alors  $\alpha_1$  ne peut être orthogonal à aucun autre vecteur non nul du plan, sinon celui-ci serait dégénéré. Donc  $\langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle = 0$ , et d'après (b), il existe un prolongement de type  $E_1'$  au-dessus de  $k_1$ . S'il existait un prolongement de type  $E_1'$  au-dessus de  $k_2$  par exemple,  $\alpha_3$  serait orthogonal à  $-1$ , d'après la fin de la démonstration de (c-ii) : impossible. Réciproquement, si  $P(K/k)$  admet un prolongement de type  $E_1'$  au-dessus de  $k_1$ , mais pas au-dessus de  $k_2$  et  $k_3$ , il résulte de (c-i), et de (c-ii) que  $P(K/k)$  est non dégénéré, non orthogonal à  $-1$ .

C. Q. F. D.

**THÉORÈME 10.** - Les plans prolongeables de type  $E_2'$  sont les plans dégénérés orthogonaux à  $-1$  et les plans non dégénérés non orthogonaux à  $-1$ .

Démonstration. - Montrons d'abord un lemme.

LEMME 2. - Tout plan prolongeable de type  $E_2^!$  est prolongeable de type  $E_1^!$ .

En effet, si  $K(\sqrt{a})$  est de type  $E_2^!$  et  $K(\sqrt{a_1})$  est de type  $E_0$  au-dessus de  $k_1$ , alors  $K(\sqrt{aa_1})$  est de type  $E_1^!$  au-dessus de  $k_1$ , d'après le lemme 1, et réciproquement, si  $K(\sqrt{b})$  est de type  $E_1^!$  au-dessus de  $k_1$ ,  $K(\sqrt{a_1 b})$  est de type  $E_2^!$ .

Le théorème 10 résulte immédiatement de ce lemme et du théorème 9.

C. Q. F. D.

Remarque. - Les théorèmes précédents permettent de calculer explicitement le nombre des extensions galoisiennes de degré  $p^3$  d'un corps local dont le groupe de Galois est d'un type donné (voir [7] ou [8]).

3.4. Description des classes admissibles. - Pour tout groupe abélien  $G$ , de type  $(p, p)$ , opérant trivialement sur  $\mu_p$ , on se propose de classifier les éléments de  $H^2(G, \mu_p)$  en utilisant les théorèmes 6 à 10. On considèrera  $H^2(G, \mu_p)$  comme un  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel, dont on sait (ou l'on démontre sans difficulté, en utilisant par exemple la suite exacte de Künneth, [2], p. 373) que la dimension est 3.

L'élément générique de  $H^2(G, \mu_p)$  qui correspond à une extension de groupes de type  $E_i$ ,  $i = 0, 1, 2$  (resp.  $E_j^!$ ,  $j = 1, 2$ ), sera noté  $\varepsilon_i$  (resp.  $\varepsilon_j^!$ ). Remarquons que les  $\varepsilon_0$  sont les classes non nulles de  $H^2(G, \mu_p)$  qui sont représentées par des cocycles symétriques.

3.4.1. Réalisation géométrique de  $H^2(G, \mu_p)$  : Soit  $P(K/k)$  un plan dégénéré, orthogonal à  $\mu_p$ . On voit facilement (théorème 5 et cas particulier 2.4) que  $\dim \Gamma_K^G / \eta(\Gamma_K) = 3$ . On en profite pour identifier  $H^2(G, \mu_p)$  à  $\Gamma_K^G / \eta(\Gamma_K)$  d'où, d'après les théorèmes 6 et 7 (resp. 8 à 10)

(i) La classe nulle et les classes  $\varepsilon_0$  forment un plan de  $H^2(G, \mu_p)$

(ii) Pour tout sous-groupe  $J$  d'ordre  $p$  de  $G$ , la suite :

$$0 \longrightarrow \text{Ker Res}_J \longrightarrow H^2(G, \mu_p) \xrightarrow{\text{Res}_J} H^2(J, \mu_p) \longrightarrow 0,$$

où  $\text{Res}_J$  désigne la restriction à  $J$ , est exacte.

Donc  $\dim \text{Ker Res}_J = 2$ , i. e.  $\text{Ker Res}_J$  est un plan de  $H^2(G, \mu_p)$ .

(iii) Tout plan  $\text{Ker Res}_J$  contient une droite et une seule engendrée par une classe  $\varepsilon_0$ .

L'élément générique non nul de  $\text{Ker Res}_J$  sera noté  $\varepsilon_i(J)$  (resp.  $\varepsilon_j^!(J)$ ). Celui de  $\text{Ker Res}_{J_1} \cap \text{Ker Res}_{J_2}$  sera noté  $\varepsilon_i(J_1, J_2)$  (resp.  $\varepsilon_j^!(J_1, J_2)$ ).

(iv) Les classes  $\varepsilon_1$  (resp.  $\varepsilon_2^!$ ) engendrent une droite de  $H^2(G, \mu_p)$ .

3.4.2. Caractérisation des classes admissibles : Rappelons qu'une classe  $\varepsilon \in H^2(G, \mu_p)$  est dite admissible pour  $K/k$  si le problème de plongement  $(K/k, \varepsilon)$  admet une solution.

THÉOREME 11. - Supposons  $p \neq 2$

(i) Si  $P(K/k)$  est dégénéré, orthogonal à  $\mu_p$ , toute classe est admissible.

(ii) Si  $P(K/k)$  est dégénéré, non orthogonal à  $\mu_p$ , soit  $J_1 = \text{Gal}(k_1/k)$ , où  $D(k_1/k)$  est la droite de  $P(K/k)$  orthogonale à  $\mu_p$ . Les classes admissibles forment un plan de  $H^2(G, \mu_p)$ , confondu avec  $\text{Ker Res}_{J_1}$ . Les classes  $\varepsilon_2(J_1)$  (resp.  $\varepsilon_1$ ) engendrent une droite de ce plan.

(iii) Si  $P(K/k)$  est non dégénéré, non orthogonal à  $\mu_p$ , aucune classe  $\varepsilon_1$  n'est admissible. Soit  $J_1$  défini comme dans (ii). Les classes admissibles forment un plan de  $H^2(G, \mu_p)$ , engendré par les classes  $\varepsilon_2(J)$ ,  $J$  parcourant l'ensemble des sous-groupes d'ordre  $p$  de  $G$  distincts de  $J_1$ . Une telle classe  $\varepsilon_2(J)$  peut être caractérisée comme suit :

Soit  $k_1 = k(\sqrt[p]{\beta})$  le corps fixe de  $J_1$ . Soit  $J_0$  un sous-groupe d'ordre  $p$  de  $G$ , distinct de  $J_1$  de corps fixe  $k_0$ . Soit  $\xi$  l'unique élément de  $\mu_p - \{1\}$  tel que  $\xi^{-1} \beta \in N_{k_0/k} k_0^*$ . Soit  $\tau$  un générateur de  $J_1$ , et soit  $\sigma$  le générateur de  $J_0$  tel que  $(\sqrt[p]{\beta})^{-1} \sigma(\sqrt[p]{\beta}) = \xi$ . Pour qu'une classe  $\varepsilon_2(J_0)$ , décrivant une extension de groupes de type  $E_2$ , scindée par  $J_0$ , soit admissible, il faut et il suffit qu'elle soit représentée par un cocycle  $a$  tel que

$$a(\sigma, \tau) \cdot a(\tau, \sigma)^{-1} = a(\tau^{p-1}, \tau) \cdot a(\tau^{p-2}, \tau) \dots a(\tau, \tau).$$

(iv) Si  $P(K/k)$  est non dégénéré, orthogonal à  $\mu_p$ , aucune classe  $\varepsilon_i$  ( $i=1,2$ ) n'est admissible.

Démonstration. - Les assertions (i), (ii), (iv) sont immédiates à partir des théorèmes 6 et 7. Montrons (iii) :

Soit  $L = K(\sqrt[p]{a})$  une extension de type  $E_2$  au-dessus de  $k_0$ . On a vu (démonstration des théorèmes 7 et 8) qu'on peut prendre  $a \in k_0^*$ , avec  $a^{-1} \cdot \tau a = \lambda_0^p \beta$ ,  $\lambda_0 \in k_0^*$ . D'après 2.3, la classe décrivant l'extension est représentée par un cocycle  $a(\sigma, \tau) = x_\sigma \cdot \sigma(x_\tau) \cdot x_{\sigma\tau}^{-1}$ , et l'on peut prendre  $x_\sigma = 1$ ,  $x_\tau = \lambda_0 \sqrt[p]{\beta}$  (où  $\sqrt[p]{\beta}$  représente une racine  $p$ -ième fixée de  $\beta$ ). Alors

$$a(\sigma, \tau) \cdot a(\tau, \sigma)^{-1} = (\sqrt[p]{\beta})^{-1} \cdot \sigma(\sqrt[p]{\beta}) = \xi.$$

Mais  $\tau$  se prolonge à  $L$  en posant  $(\sqrt[p]{a})^{-1} \cdot \tau(\sqrt[p]{a}) = x_\tau$ ,  $t_K = \tau$ , d'où

$$(\sqrt[p]{a})^{-1} \cdot \tau^p(\sqrt[p]{a}) = x_\tau \cdot \tau(x_\tau) \dots \tau^{p-1}(x_\tau) = N_\tau(x_\tau).$$

Comme  $N_\tau(x_\tau) = N_\tau(\lambda_0) \cdot \beta = \xi$ , on en déduit, en identifiant  $\text{Gal}(L/K)$  à  $\mu_p$  par  $t^p \longmapsto (\sqrt[p]{a})^{-1} \cdot t^p(\sqrt[p]{a})$ , la condition nécessaire :

$$a(\sigma, \tau) \cdot a(\tau, \sigma)^{-1} = t^p = a(\tau^{p-1}, \tau) \cdot a(\tau^{p-2}, \tau) \dots a(\tau, \tau).$$

Cette condition est clairement suffisante (on construit l'extension  $K(\sqrt[p]{a})$  comme dans la démonstration du théorème 7).

C. Q. F. D.

Remarque. - La condition (iii) redonne immédiatement celle donnée par GILLARD ([5], théorème 9) dans le cas modérément ramifié.

THÉORÈME 12. - Supposons que  $p = 2$ .

(i) Si  $P(K/k)$  est dégénéré, orthogonal à  $-1$ , toute classe est admissible.

(ii) Si  $P(K/k)$  est dégénéré, non orthogonal à  $-1$ , soit  $J_1 = \text{Gal}(K/k_1)$ , où  $D(k_1/k)$  est la droite de  $P(K/k)$  orthogonale à  $-1$ . Aucune classe  $\varepsilon'_2$  n'est admissible. Les classes admissibles forment un plan, engendré par une classe  $\varepsilon'_1(J_1)$  et une classe  $\varepsilon_0(J_1)$ .

(iii) Si  $P(K/k)$  est non dégénéré, non orthogonal à  $-1$ , soit  $J_1$  comme précédemment, et soient  $J_2, J_3$  les deux autres sous-groupes d'ordre  $2$  de  $G$ . Les classes admissibles forment un plan, dont les trois vecteurs non nuls sont  $\varepsilon_0(J_1)$ ,  $\varepsilon'_1(J_2, J_3)$  et  $\varepsilon'_2$ .

(iv) Dans tout autre cas, aucune classe  $\varepsilon'_j$  ( $j = 1, 2$ ) n'est admissible.

Démonstration. - Immédiate, à partir des théorèmes 8 à 10.

#### 4. Enoncés globaux.

Soit  $p$  un nombre premier. Soit  $K/k$  une extension de corps de nombres contenant le groupe  $\mu_p$  des racines  $p$ -ièmes de l'unité, abélienne de type  $(p, p)$ . On a les critères suivants de plongement (comparer aux résultats de [4]).

THÉORÈME 13. - Supposons  $p \neq 2$ . Soit  $\xi_p$  une racine primitive  $p$ -ième de  $1$ .

(i) Pour que  $K/k$  se plonge dans une surextension galoisienne de type  $E_1$ , il faut et il suffit que  $K = k(\sqrt[p]{\alpha}, \sqrt[p]{\beta})$ ,  $\alpha \in k^*$ ,  $\beta \in k^*$  et  $\beta$  est une norme de  $k(\sqrt[p]{\alpha})$  à  $k$

(ii) Pour que  $K/k = k(\sqrt[p]{\alpha}, \sqrt[p]{\beta})/k$  se plonge dans une surextension galoisienne de type  $E_2$ , non cyclique sur  $k(\sqrt[p]{\alpha})$ , il faut et il suffit que :

- soit,  $\beta$  et  $\xi_p$  sont des normes de  $k(\sqrt[p]{\alpha})$  à  $k$

- soit,  $\beta$  n'est pas une norme de  $k(\sqrt[p]{\alpha})$  à  $k$ , mais il existe  $\xi \in \mu_p$  tel que  $\xi^{-1} \beta$  est une norme de  $k(\sqrt[p]{\alpha})$  à  $k$ .

THÉORÈME 14. - Supposons  $p = 2$ .

(i) Toute extension  $K/k$  qui se plonge dans une surextension quaternionienne, se plonge aussi dans une extension diédrale.

(ii) Pour que  $K/k = k(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})/k$  se plonge dans une surextension diédrale, cy-

clique sur  $k(\sqrt{\alpha\beta})$ , il faut et il suffit que  $\beta$  soit une norme de  $k(\sqrt{\alpha})$  à  $k$ .

(iii) Dans les conditions de (ii), pour que  $K/k$  se plonge dans une surextension quaternionienne, il faut et il suffit que  $-1$  soit une norme de  $k(\sqrt{\alpha\beta})$  à  $k$ .

Démonstration. - Ces deux théorèmes résultent sans difficulté des parties des démonstrations des théorèmes 7 et 9 et des lemmes 1 et 2 qui sont d'ordre purement algébrique. On peut aussi regarder les conditions locales

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARTIN (E.). - Algèbre géométrique. Traduit par H. Lazard. - Paris, Gauthier-Villars, 1962 (Cahiers scientifiques, 27).
- [2] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).
- [3] CASSELS (J. W. S.) and FRÖHLICH (A.) [Editors]. - Algebraic number theory. Proceedings of an instructional conference of the London mathematical Society [1965. Brighton]. - London, Academic Press, 1967.
- [4] DAMEY (P.) et PAYAN (J. J.). - Existence et construction des extensions galoisiennes de degré 8 d'un corps de caractéristique  $\neq 2$ , J. reine und angew. Math., t. 244, 1970, p. 37-54.
- [5] GILLARD (R.). - Plongement d'une extension d'ordre  $p$  ou  $p^2$  dans une surextension non abélienne d'ordre  $p^3$ , J. reine und angew. Math., t. 268/269, 1974, p. 418-426.
- [6] HOECHSMANN (K.). - Zum Einbettungsproblem, J. reine und angew. Math., t. 229, 1968, p. 81-106.
- [7] MASSY (R.). - Les extensions galoisiennes de degré  $p^3$  d'un corps  $\mathbb{Q}$ -adique, Thèse 3e cycle, Math., Paris 1975.
- [8] MASSY (R.) et NGUYEN-QUANG-DO (T.). - Extensions galoisiennes non abéliennes de degré  $p^3$  d'un corps  $\mathbb{Q}$ -adique, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 280, 1975, Série A, p. 1345-1347.

(Texte reçu le 23 février 1976)

Richard MASSY  
46 rue de Kermenguy  
29200 BREST

et

Thong NGUYEN-QUANG-DO  
49 rue Pierre Valette  
92240 MALAKOFF