Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

ETIENNE FOUVRY

Construction d’une suite d’entiers ayant certaines propriétés additives

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 17, nº 1 (1975-1976), exp. nº 13, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1975-1976__17_1_A12_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
17e année, 1975/76, n° 13, 5 p.

5 janvier 1976

CONSTRUCTION D'UNE SUITE D'ENTIERS AYANT CERTAINES PROPRIÉTÉS ADDITIVES

par Etienne FOUVRY

Soit $\mathcal{K}$ une partie de $\underset{\sim}{N}^*$; le but de cet exposé est de résumer la construction d'une suite $\mathcal{A}$ de $\underset{\sim}{N}$, telle que les puissances k-ièmes des éléments de $\mathcal{A}$ forment une base additive si, et seulement si, k appartient à $\mathcal{K}$.

1. Définitions et notations.

Les parties de $\underset{\sim}{N}$ seront notées par des majuscules rondes : $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ... et on appellera : $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$ ... le nombre d'éléments de : $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ ... strictement positifs inférieurs ou égaux à n .

On appelle $\overline{d}\mathcal{A}$ (densité asymptotique supérieure) la limite supérieure de $A(n)n^{-1}$ quand n tend vers $+\infty$.

Si $h \in \underset{\sim}{N}^*$ et $\mathcal{A} \subset \underset{\sim}{N}$, on note $h\mathcal{A} = \{a_{r_1} + \dots + a_{r_h} \; ; \; 1 \leqslant i \leqslant h \; , \; a_{r_i} \in \mathcal{A}\}$. $\mathcal{A}$ est appelée base (resp. base asymptotique), s'il existe h (resp. h et N) tel que $h\mathcal{A} = \underset{\sim}{N}$ (resp. tels que $h\mathcal{A} \supset \{N , N + 1 , \dots\}$) .

Si $\mathcal{A}$ est une base (resp. base asymptotique), la borne inférieure des h définis auparavant est appelée ordre de $\mathcal{A}$.

Si $\mathcal{A}$ est une base, 0 et 1 appartiennent à $\mathcal{A}$, si $\mathcal{A}'$ est une base asymptotique $\mathcal{A}' \cup \{0 , 1\}$ est une base.

Si $\mathcal{A} \subset \underset{\sim}{N}$, on note $\mathcal{A}^{(k)} = \{a^k \; ; \; a \in \mathcal{A}\}$.

Si $\alpha \in \underset{\sim}{R}$, $\{\alpha\}$ est la partie fractionnaire de α , $\|\alpha\|$ est la distance de α à l'entier le plus proche ($\|\alpha\| = \inf(\{\alpha\} \; ; \; 1 - \{\alpha\})$) et $e(\alpha) = \exp(2\pi i\alpha)$.

2. Présentation du résultat.

Si $k \in \underset{\sim}{N}^*$, $\underset{\sim}{N}^{(k)}$ est une base (théorème de Hilbert). On est ainsi amené à se poser les questions suivantes :

Si $\mathcal{A}$ est une base, $\mathcal{A}^{(k)}$ en est-elle une ?

Si $\mathcal{B}$ n'est pas une base, en est-il de même de $\mathcal{B}^{(k)}$?

Suite au problème posé par DRESS d'existence de deux suites $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ telles que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}^{(2)}$ soient des bases, mais que ni $\mathcal{B}^{(2)}$ ni $\mathcal{C}$ n'en soient, DESHOUILLERS, ERDÖS et SARKÖZY, en 1974, [1] construisent $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, avec l'ordre de $\mathcal{B}$ inférieur ou égal à 3 , et celui de $\mathcal{C}^{(2)}$ inférieur ou égal à 6 . Par leur méthode, on peut aussi construire une suite $\mathcal{D}$, telle que $\mathcal{D}$ ne soit pas une base mais, pour tout $k \geq 2$; $\mathcal{Q}^{(k)}$ en soit une.

A la fin de leur article est conjecturé le résultat suivant, que DESHOUILLERS et FOUVRY démontrent en 1975 [2].

THÉORÈME. - *Pour toute partie* $\mathcal{K}$ *de* $\mathbb{N}^*$ *, il existe une suite* $\mathcal{A}$ *d'entiers telle que* $\mathcal{A}^{(k)}$ *soit une base si, et seulement si,* k *appartient à* $\mathcal{K}$.

3. Résumé de la démonstration (Pour une démonstration complète, se reporter à [2]).

La principale étape de la démonstration est d'établir la proposition suivante. Soient $\mathcal{K}$ une partie de $\mathbb{N}^*$, et $\rho = (1+\sqrt{5})/2$.

PROPOSITION 1. - *Si* η *est un nombre réel strictement positif,* K *un entier strictement positif, et si* $\mathcal{B}(\eta, K) = \{n \; ; \; \forall \ell \leqslant K , \; \ell \notin \mathcal{K} : \; \{\rho n^{\ell}\} \leqslant \eta\}$, $\mathcal{B}^{(k)}_{(\eta,K)}$ *est une base asymptotique d'ordre au plus* 2^{k+1} *, pourvu que* k *soit supérieur ou égal à* 3 *, et appartienne à* $\mathcal{K}$.

Ainsi il existe un entier $N(\eta, K, k)$ tel que

$$\{N(\eta, K, k), N(\eta, K, k)+1, \ldots\} \subset 2^{k+1}\, \mathcal{B}^{(k)}(\eta, K) .$$

D'autre part, on a un critère permettant d'affirmer qu'une suite n'est pas une base.

PROPOSITION 2. - *Si* $\mathcal{A}$ *est une suite d'entiers telle qu'il existe* α *irrationnel avec la propriété* $\lim_{a\in\mathcal{A},\, a\to+\infty}\{\alpha a\} = 0$ *, la suite* $\mathcal{A}$ *n'est pas une base.*

Ceci s'obtient facilement en montrant par récurrence sur h que $\bar{d} h\mathcal{A} = 0$ (voir [1], où un critère plus général est donné).

Avec l'aide des propositions 1 et 2, on obtient le théorème.

Supposons que $\mathcal{K}$ *ne contienne ni* 1 *ni* 2 : D'après la proposition 1, il existe une suite strictement croissante d'entiers N_u tels que

$$\forall\, k \in [1\,;\,u] \cap \mathcal{K} : \;\; n \geq N_u^k \Longrightarrow n \in (2^k+1)\; \mathcal{B}^{(k)}((1/u), u)$$

(on pose $N_1 = 2$).

La suite $\mathcal{A}$ est construite ainsi :

- elle contient 0 et 1 ,
- $\mathcal{A} \cap [N_u , N_{u+1}[\; = \mathcal{B}((1/u), u) \cap [N_u , N_{u+1}[$ pour $u \geq 1$.

Soit k un entier de $\mathcal{K}$, et $n \geq N_k^k$, il existe donc $u \geq k$ tel que $N_u^k \leqslant n < N_{u+1}^k$. D'après la définition de N_u , n s'exprime en somme de 2^k+1 éléments de $\mathcal{B}^{(k)}(u, (1/u))$, donc en somme de 2^k+1 éléments de $\mathcal{A}^{(k)}$ (on a l'inclusion $\mathcal{B}((1/u), u) \cap [0, N_{u+1}[\; \subset \mathcal{A}$).

Si $k \in \mathcal{K}$, $k \geq 3$; $\mathcal{A}^{(k)}$ est une base d'ordre inférieur ou égal à $\max(2^k+1, N_k^k)$.

Par contre, si $\ell \geqslant 1$, $\ell \notin \mathcal{K}$, $\{\rho a^{\ell}\} \leqslant \frac{1}{u}$ si $a \in \mathfrak{A}$, et $N_u \leqslant a < N_{u+1}$, $u \geqslant \ell$, et $\mathfrak{A}^{(\ell)}$ n'est pas une base (proposition 2).

Le théorème est démontré si $\mathcal{K}$ ne contient ni 1 , ni 2 .

Si $\mathcal{K}$ est quelconque : Soit $\mathcal{K}'$ l'ensemble des triples des éléments de $\mathcal{K}$, d'après ce qui précède il existe une suite $\mathfrak{A}'$ correspondant à $\mathcal{K}'$, la suite $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'^{(3)}$ correspond à $\mathcal{K}$, et le théorème est démontré.

Obtention de la proposition 1. - Cette proposition se démontre grâce à la méthode du cercle. On a suivi l'exposé qu'en donne VINOGRADOV [4] dans le cas du problème de Waring, aussi on suppose $k \geqslant 3$.

Soit $\ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_{K^*}$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et K n'appartenant pas à $\mathcal{K}$.

N est un entier (suffisamment grand), et on pose

$$P = [N^{1/k}] \ , \quad s = 2^k + 1 \ , \quad S(\alpha) = \sum_{n \in \mathfrak{B}, n \leqslant P} e(\alpha n^k) \ , \text{ où } \mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\eta \ , K)$$

$$S(a \ , q) = \sum_{u=0}^{q-1} e(au^k/q) \ , \quad I(z) = \int_0^P e(zx^k)\, dx \ , \quad M = P^{a_3} \ , \quad \tau = P^{k-a_1} \ ,$$

$$Q = P^{a_2} \quad \text{avec} \quad 0 < a_3 < 1 \ , \quad a_1 > 0 \ , \quad a_2 > 0 \ .$$

$$\mathfrak{M}(a,q) = [(a/q) - (1/\tau) \ , (a/q) + (1/\tau)] \quad \text{avec} \quad (a,q) = 1 \ , \quad 1 \leqslant a \leqslant q \leqslant Q \ .$$

Si $\alpha \in \mathfrak{M}(a \ , q)$, on écrit $\alpha = (a/q) + z(\alpha)$.

$\mathfrak{M} = \bigcup_{1 \leqslant q \leqslant Q} \bigcup_{(a,q)=1} \mathfrak{M}(a \ , q)$, $\mathfrak{m}$ est le complémentaire de $\mathfrak{M}$ dans $[(1/\tau) \ , 1 + (1/\tau)]$. $r(N) = \int_{1/\tau}^{1+(1/\tau)} (S(\alpha))^s\, e(-\alpha N)\, d\alpha$ est le nombre de représentations de N en somme d'éléments de $\mathfrak{B}^{(k)}(\eta \ , K)$.

(a) Evaluation de la contribution des arcs majeurs :

Pour évaluer $r_1(N) = \int_{\mathfrak{M}} (S(\alpha))^s\, e(-\alpha N)\, d\alpha$, il faut un lemme renseignant sur la répartition des éléments de $\mathfrak{B}$ dans les progressions arithmétiques.

LEMME 1. - *Si a et b sont deux entiers* $(a > 0)$, *il existe deux constantes* $\delta > 0$ *et* c $(0 < c < 1)$ *telles que :*

$$\mathrm{Card}\{n \ ; \ n \in \mathfrak{B} \ , \ n \leqslant V \ , \ n \equiv b \pmod{a}\} = \eta^{K^*}(V/a) + O((V/a)^{1-\delta}) \ ,$$

où le O *est uniforme pour a et b inférieurs à* V^c .

Ce résultat s'obtient par utilisation d'un théorème d'Erdös-Turan-Koksma (cf. [3], p. 116) qui permet de majorer dans $\underset{\sim}{R}^{K^*}$ la discrépence de la suite

$$x_n = (\rho(an+b)^{\ell_1} \ ; \ \dots \ , \ \rho(an+b)^{\ell_{K^*}}) \ .$$

On est amené à évaluer des sommes du type : $\sum_{n=1}^{[V/a]} e(P(n))$, où $P(n)$ est un polynôme de degré $r \leqslant K$; dont le premier coefficient est $ma^r \rho$ $(m \in \underset{\sim}{Z})$, mais $\rho = (1+\sqrt{5})/2$, par son développement en fractions continues qui ne comporte que des 1 , on peut prendre $\tau = 1$ dans le théorème I de Vinogradov ([4], page 101) ; ou du type

$$\left|\sum_{n=1}^{[V/a]} e(\rho h_1 na)\right| \leqslant \frac{1}{\|\rho h_1 a\|} \ll \frac{1}{|h_1 a|} \quad (h_1 \text{ entier}).$$

car ρ est racine d'une équation du 2e degré.

Lorsque ce lemme est établi, en supposant $a_2 \leqslant c$, on reprend le traitement classique du problème de Waring, on obtient

$$r_1(N) = \eta^{sK^*} \int_{-\infty}^{+\infty} e(-zN)(I(z))^s \, dz \sum_{q\leqslant Q} \sum_{(a,q)=1} \left(\frac{S(a,q)}{q}\right)^s e\left(\frac{-aN}{q}\right)$$
$$+ O(P^{sa_4-k+a_1+2a_2} + P^{s-k-1+a_4} + P^{s-k-sa_{1/k}+a_1})$$

pourvu que $a_1 + a_3 < 1$, $2a_2 + a_1 < k$, $a_4 = \sup(a_1 + a_3, 2 - a_3 + \delta(a_2 - 1))$.

Pour un certain choix de a_1, a_2, a_3, le terme reste est $\ll N^{(s/k)-1-\gamma}$ où $\gamma > 0$, et par les évaluations classiques.

$$\sum_{q\leqslant Q} \sum_{(a,q)=1} \left(\frac{S(a,q)}{q}\right)^s e\left(\frac{-aN}{q}\right) \gg 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (I(z))^s e(-zN) \, dz = \frac{\Gamma(1 + (1/k))^s}{\Gamma(s/k)} N^{(s/k)-1} + O(N^{(s/k)-k-(1/k)}) .$$

On a ainsi le lemme 2.

LEMME 2. - Pour N suffisamment grand, $r_1(N) \gg N^{(s/k)-1}$.

(b) Contribution des arcs mineurs :

$r_2(N) = \int_{\mathfrak{m}} (S(\alpha))^s e(-\alpha N) \, d\alpha$.

$|r_2(N)| \leqslant \max_{\alpha\in\mathfrak{m}} |S(\alpha)| \int_0^1 |S(\alpha)|^{2^k} d\alpha$.

On montre le lemme suivant (lemme de Hua généralisé).

LEMME 3. - Soient k un entier strictement positif, et ε un nombre réel strictement positif, il existe une constante C ne dépendant que de k et de ε telle que pour tout entier ν $(0 < \nu \leqslant k)$ et toute suite (c_n) de nombres complexes de module plus petit que 1, on ait

$$\int_0^1 \left|\sum_{1\leqslant n\leqslant P} c_n e(\alpha n^k)\right|^{2^\nu} d\alpha \leqslant CP^{2^\nu-\nu+\varepsilon} .$$

Il suffit de prendre $\nu = k$, $c_n = 1$ ou 0 suivant que n appartient ou n'appartient pas à $\mathfrak{B}$, et on a

$$\int_0^1 |S(\alpha)|^{2^k} d\alpha \ll_\varepsilon N^{(s/k)-1-(1/k)+\varepsilon} .$$

Si on montre le lemme suivant :

LEMME 4. - Il existe une constante $a > 0$ telle que $\max_{\alpha\in\mathfrak{m}} |S(\alpha)| \ll N^{(1/k)-a}$.

On en déduira que $r_2(N) \ll N^{(s/k)-1-b}$ où $b > 0$, donc $r(N) > 0$ pour N suffisamment grand, et la proposition 1 sera démontrée.

Soit χ la fonction périodique de période 1, dont la restriction à $[0, 1[$ est la fonction caractéristique de $[0, \eta]$.

Ainsi $S(\alpha) = \sum_{n=0}^{P} \chi(\rho n^{\ell_1}) \dots \chi(\rho n^{\ell_{K^*}}) e(\alpha n^k)$.

Le développement de χ en série de Fourier n'est pas absolument convergent, aussi on approche χ par une fonction χ_Δ , périodique de période 1 , continûment dérivable vérifiant les 4 propriétés suivantes (on suppose $0 < \Delta < \eta < 1 - \Delta$)

(i) $\chi_\Delta(x) = 1$ si $\Delta/2 \leq x \leq \eta - (\Delta/2)$

(ii) $\chi_\Delta(x) = 0$ si $\eta + (\Delta/2) \leq x \leq 1 - (\Delta/2)$

(iii) $0 \leq \chi_\Delta(x) \leq 1$ pour tout x

(iv) $\chi_\Delta(x) = \eta + \sum_{-\infty, m\neq 0}^{+\infty} c_m e(mx)$ avec $|c_m| \ll m^{-2} \Delta^{-1}$.

Une telle fonction χ_Δ existe (cf. [4], page 32).

En appliquant le lemme 1 avec $\Delta \gg P^{-\delta}$:

$$S(\alpha) = \sum_{n=0}^{P} \chi_\Delta(\rho n^{\ell_1}) \dots \chi_\Delta(\rho n^{\ell_{K^*}}) e(\alpha n^k) + O(P\Delta) .$$

D'où $S(\alpha) = \sum_{m \in \underset{\sim}{Z}^{K^*}} t_m \sum_{n=0}^{P} e(P_m(n))$ où $m = (m_1 , \dots , m_{K^*}) \in \underset{\sim}{Z}^{K^*}$,

$$t_m = c_{m_1} \dots c_{m_{K^*}} , \quad P_m(n) = \alpha n^k + m_{K^*} \rho n^{\ell_{K^*}} + \dots + m_1 \rho n^{\ell_1} .$$

Or $\alpha \in \mathbf{m}$, donc α peut s'écrire $\alpha = (a/q) + (\theta/q^2)$ avec $P^{a_2} < q < P^{k-a_1}$. D'après le théorème I, page 101 de [4],

$\sum_{n=0}^{P} e(P_m(n)) = O(P^{1-\gamma})$, où $\gamma > 0$ et O uniforme en $m \in \underset{\sim}{Z}^{K^*}$ et $\alpha \in \mathbf{m}$.

D'où $S(\alpha) = O(P^{1-\gamma} \Delta^{-K^*} + P\Delta)$; en prenant $\Delta = P^{-b}$ avec $2b = \min(\delta , (\gamma/K^*))$, on obtient l'évaluation du lemme 4.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DESHOUILLERS (J. M.), ERDÖS (P.) and SÄRKÖZY (A.). - On additive bases, Acta Arithmetica, Warszawa, t. 30, 1976, p. 121-132.

[2] DESHOUILLERS (J. M.) and FOUVRY (E.). - On additive bases, II (à paraître).

[3] KUIPERS (L.) and NIEDERREITER (H.). - Uniform distribution of sequences. - New York, J. Wiley and Sons, 1974 (Pure and applied Mathematics, Wiley-Interscience).

[4] VINOGRADOV (I. M.). - The method of trigonometrical sums in the theory of numbers. - London, Interscience publishers, 1965.

(Texte reçu le 15 janvier 1976)

Etienne FOUVRY
Ecole Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
75230 PARIS CEDEX 05