

# SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

KHYRA GÉRARDIN

## Séries rationnelles

*Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres*, tome 16, n° 2 (1974-1975),  
exp. n° G1, p. G1-G6

[http://www.numdam.org/item?id=SDPP\\_1974-1975\\_\\_16\\_2\\_A5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1974-1975__16_2_A5_0)

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SÉRIES RATIONNELLES

par Khyra GÉRARDIN

1. Rappels sur les algèbres d'un monoïde libre.

Soient  $X = (x_1 \dots x_p)$  un ensemble fini appelé alphabet dont les éléments s'appellent des lettres,  $X^*$  le monoïde libre qu'il engendre. Les éléments de  $X^*$  s'appellent des mots ; on notera  $e$  le mot vide de  $X^*$ . Le produit dans  $X^*$  est la concaténation. Si  $f, g \in X^*$ ,  $f * g$  revient à écrire  $g$  à droite de  $f$ . On notera  $|f|$  la longueur du mot  $f$ , c'est-à-dire le nombre d'occurrences de lettres de  $X$  dans  $f$ . On munit  $X^*$  d'une relation d'ordre de la manière suivante :  $f \leq g$  si  $|f| \leq |g|$  et si  $|f| = |g|$  alors  $f$  précède  $g$  lexicographiquement, étant entendu que  $x_1 < x_{i-1} < x_i < \dots < x_p$ .

Dans le cas où  $p = 1$ , le monoïde libre commutatif est isomorphe à  $\mathbb{N}$  additif. Il est connu que dans ce cas  $X^*$  est cyclique.

Soient  $A$  un anneau commutatif unitaire,  $K$  son anneau de quotients. On notera  $A\langle X \rangle$  l'algèbre large du monoïde libre  $X^*$ . Les éléments de  $A\langle X \rangle$  s'écrivent :

$$a = \sum_{f \in X^*} (a, f) f \quad \text{où } (a, f) \in A, \quad \forall f \in X^*.$$

On définit la somme et le produit dans  $A\langle X \rangle$  de la manière suivante : Si

$$a = \sum_{f \in X^*} (a, f) f \quad b = \sum_{f \in X^*} (b, f) f,$$

alors,

$$a + b = \sum [(a, f) + (b, f)] f.$$

Le produit de Cauchy est défini de la manière suivante :

$$a \times b = \sum_{f \in X^*} \left[ \sum_{gh=f} (a, g) \times (b, h) \right] f.$$

Cette dernière expression a un sens car,  $X^*$  étant un monoïde libre, chaque mot  $f$  n'a qu'un nombre fini de factorisations en produit de deux mots qui le précèdent.

La série 0 est celle dont tous les coefficients sont nuls. La série 1 est celle dont le seul coefficient non nul est le coefficient de l'élément neutre qui est égal à 1. Il est immédiat que  $A\langle X \rangle$  est une algèbre non commutative si  $|X| > 2$ . La sous-algèbre des polynômes se note  $A\langle X \rangle$ .

$$a \in A\langle X \rangle \iff a = \sum (a, f) f;$$

il n'existe qu'un nombre fini de coefficients  $(a, f)$  non nuls.

Si  $(a, e) \neq 0$ , on dit que la série  $a$  est quasi inversible. Sa quasi-inverse  $a^*$  est définie de la manière suivante :

$$a^* = a + a^* a = a + a a^*.$$

Si  $a$  est quasi inversible, on vérifie facilement que  $1 + a$  est inversible dans l'anneau  $A\langle\langle X \rangle\rangle$ . Si  $a = \sum (a, f)f$ , on notera support de  $a$ , ou  $\text{Supp } a$ ,

$$\text{Supp } a = \{f / (a, f) \neq 0\}.$$

Dans  $A\langle\langle X \rangle\rangle$ , on définit aussi le produit d'Hadamard. Si

$$a = \sum (a, f)f \quad b = \sum (b, f)f,$$

alors,

$$a \circ b = \sum [(a, f) \times (b, f)]f.$$

Il est facile de vérifier que, munie du produit Hadamard, l'algèbre  $A\langle\langle X \rangle\rangle$  est une algèbre commutative, non intègre, dont l'élément neutre est la série

$$\sum_{f \in X^*} f.$$

## 2. Propriétés topologiques de $A\langle\langle X \rangle\rangle$ et $A\langle X \rangle$ .

Si  $a, b \in A\langle\langle X \rangle\rangle$ , on définit une distance de la manière suivante :

$$d(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{si } a = b. \\ e^{-i} & \text{où } i \text{ est l'indice du 1er coefficient non nul de } a-b. \end{cases}$$

Munie de cette distance, l'algèbre  $A\langle\langle X \rangle\rangle$  est un espace ultramétrique.

Si  $a$  est une série formelle, on notera l'ordre de la série l'indice du 1er coefficient non nul de  $a$ .

Pour tout  $n \geq 0$ , soit  $\mathcal{A}_n$  l'ensemble des séries formelles d'ordre  $\geq n$ . Si  $a \in \mathcal{A}_n$  et  $b \in A\langle\langle X \rangle\rangle$ , il est immédiat que  $ab$  et  $ba$  appartiennent à  $\mathcal{A}_n$ .  $\mathcal{A}_n$  est un idéal bilatère de  $A\langle\langle X \rangle\rangle$ . Si  $m \geq n$ , on a :  $\mathcal{A}_m \subseteq \mathcal{A}_n$ . Les idéaux  $\mathcal{A}_n$  forment une base de voisinages de 0. L'anneau  $A\langle\langle X \rangle\rangle$ , muni de cette topologie, est complet. L'anneau des polynômes  $A\langle X \rangle$  est partout dense dans  $A\langle\langle X \rangle\rangle$  qui est son complété.

## 3. Définition d'un ensemble rationnellement clos.

Soit  $B$  un sous-ensemble de  $A\langle\langle X \rangle\rangle$ .  $B$  est dit rationnellement clos si,  $\forall a \in B$ ,  $a$  quasi inversible, alors  $a^* \in B$ .  $a^*$  étant bien entendu la quasi-inverse de  $a$ .

## 4. Séries rationnelles $S(1)$ .

On notera  $A^{\text{RAT}}\langle\langle X \rangle\rangle$  la plus petite algèbre de  $A\langle\langle X \rangle\rangle$  qui contienne  $X$ , et qui est rationnellement close.

Caractérisation des séries rationnelles  $S(1)$ .

PROPOSITION. -  $a \in R^{\text{AT}}\langle\langle X \rangle\rangle$  si, et seulement si, il existe un entier  $N \geq 1$ , une représentation  $\mu$  de  $X^*$  dans  $M_N(A)$ , une matrice  $P$  de  $M_N(A)$ , telle que l'on

ait

$$a = \sum_f (a, f) f = \sum_f (\text{Tr } P \mu f) f .$$

Cas particuliers. -  $X = 1 \implies X^* = \mathbb{N}$ .  $A = \mathbb{Z}$ . On a alors la définition habituelle des séries rationnelles. Rappelons la caractérisation usuelle des séries rationnelles, et montrons que les deux propositions coïncident : si  $a = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ ,  $a$  est une série rationnelle si, et seulement si, il existe deux entiers  $h$ ,  $n_0 \geq 1$ ,  $h$  entiers  $\lambda_1 \dots \lambda_h$ , tels que pour tout  $n \geq n_0$  on ait :

$$a_{n+h} = \lambda_1 a_{n+h-1} + \dots + \lambda_i a_{n+h-i} + \dots + \lambda_h a_n .$$

Démonstration de l'équivalence des deux définitions. - Si

$$a = \sum_{n \geq 0} a_n X^n = \sum_{n \geq 0} (\text{Tr } P M^n) X^n ,$$

où  $P$  et  $M$  sont des matrices de  $M_N(\mathbb{Z})$  pour un certain  $N \geq 1$ , la matrice  $M$  vérifie son polynôme caractéristique. Donc la suite  $(\text{Tr } P M^n)_{n \geq 0}$  vérifie une relation de récurrence.

Réciproque. - Si

$$a = \sum_{n \geq 0} a_n X^n = \frac{R(X)}{1 - S(X)} \quad R, S \in \mathbb{Z}[X] ,$$

on examine le cas où  $P$  est un polynôme :

$$a = a_0 + a_1 X + \dots + a_p X^p .$$

Soit  $M$  la matrice nilpotente de  $M_{p+1}(\mathbb{Z})$  définie de la manière suivante. Si  $e_1 \dots e_{p+1}$  est une base de l'espace  $\mathbb{Z}^{p+1}$ , on a :

$$M e_i = 0$$

$$M_{e_i}^i = e_{i-1} \quad \forall 2 \leq i < p$$

$$M_{e_{p+1}} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_p e_p .$$

Soit  $P$  la matrice de  $\mathbb{Z} M_{p+1}(\mathbb{Z})$ ,

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que

$$\text{Tr } P M^i = a_i \quad \forall i < p .$$

$$\text{Tr } P M^j = 0 \quad \forall j > p .$$

Le cas où  $a = R(X)/(1 - S(X))$  se ramène facilement à celui-ci : soient

$(P, M)$  le couple de matrices associées au polynôme  $R$ ,

$(Q, N)$  le couple de matrices associées au polynôme  $S$ .

On suppose que,  $(Q, N) \in M_s(\mathbb{Z})$ . Soit  $N_u$  la matrice de  $M_s(\mathbb{Z})$  dont tous les éléments sont nuls à l'exception de ceux de la 1ère colonne égaux à ceux de la dernière colonne de  $N$ .

Soit  $N' = N + N_u$ . De la même manière, on définit la matrice  $M_u$ . Si

$$(P, M) \in M_r(\mathbb{Z});$$

$M_u$  est la matrice  $r \times s$  dont les éléments de la 1ère colonne sont égaux à ceux de la dernière colonne de  $M$ , les autres étant nuls.

Soit  $T$  la matrice  $\begin{pmatrix} M & M_u \\ 0 & N' \end{pmatrix}$ . On vérifie que le couple de  $M_{r+s}(\mathbb{Z})$ , formé de la matrice  $u$ , où

$$u = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et  $T$  représente la série  $a$ , c'est-à-dire que l'on a :

$$a = \sum_{n \geq 0} a_n X^n = \sum_{n \geq 0} (\text{Tr } u T^n) X^n.$$

L'équivalence des deux démonstration est faite.

Caractérisation des séries rationnelles. - Soit  $a = \sum (a, f) f$ .

Déterminant de Hankel, en variables non commutatives [1]. - On notera  $H_{f,g}$  le déterminant de Hankel dont les lignes et les colonnes sont les coefficients des termes  $g$ ,  $g \leq f$ , dans l'ordre de  $X^*$ .

PROPOSITION 1 [1]. - Une série est rationnelle si, et seulement si, les déterminants de Hankel sont nuls à partir d'un certain mot  $f$  de  $X^*$ .

Problèmes posés par les séries rationnelles. - Il est immédiat que si  $a$  et  $b$  sont des séries rationnelles, leur produit d'Hadamard,  $a \odot b = c$ , est une série rationnelle. Si  $\mu$  (et resp.  $\nu$ ) est la représentation associée à la série  $a$  (resp.  $b$ ) alors  $\mu \otimes \nu$  est la représentation associée à la série  $c$ .

Problème. - Etant données deux séries rationnelles  $a$  et  $c$ , à quelles conditions la série  $b$ , définie par la relation  $a \odot b = c$ , est-elle rationnelle ?

Principaux résultats obtenus, en commutatif étendu en non commutatif.

Pour CANTOR-UCHIYAMA :

$$\sum_{n \geq 0} P(n) a_n X^n \text{ rationnelle} \iff \sum_{n \geq 0} a_n X^n \text{ rationnelle.}$$

Pour Martine PATHIAUX :

$$\sum_n \frac{a_n X^n}{P(n)\mu_1^n + P_2(n)\mu_2^n} \text{ avec } \sum_n a_n X^n \text{ rationnelle : } \frac{a_n X^n}{P(n)\mu_1^n + P_2(n)\mu_2^n} \text{ entier algé-}$$

brique pour tout  $n$ .

Alors

$$\sum_n \frac{a_n X^n}{P(n)\mu_1^n + P_2(n)\mu_2^n} \text{ rationnelle.}$$

Pour BENZAGOU :

$$\sum_{n \geq 0} a_n X^n \text{ Hadamard inversible} \iff \sum_{n \geq 0} a_n X^n = \sum_{0 \leq i < m} \frac{\mu_i X^i}{1 - c_i X^m}.$$

### 5. K-langages. Automates. Séries rationnelles.

Soit  $X^*$  un monoïde libre engendré par un ensemble fini  $X$ .

Définition du produit dans  $\mathcal{P}(X^*)$ .

- Si  $A, B \in \mathcal{P}(X^*)$ , alors  $A \times B = \{ab ; a \in A, b \in B\}$ .
- Si  $A \in \mathcal{P}(X^*)$ , alors  $A^* = \{e\} \cup A \cup \dots \cup A^n \cup \dots$

Définition. - Une partie  $B$  de  $X^*$  est une partie rationnellement close si  $A \subset B$ , alors  $A^* \subset B$ .

K-langages. - La famille des K-langages sur  $X^*$  est la plus petite famille contenant  $X$  qui est stable par union, produit, et qui est rationnellement close. On se place dans le cas où  $A = \mathbb{Z}$ . Soient  $a = \sum_f (a, f)f$  et  $b = \sum_f (b, f)f$ , deux séries positives, c'est-à-dire  $(a, f) \geq 0$ ,  $\forall f$ , et  $(b, f) \geq 0$ ,  $\forall f$ . On notera  $\mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{B}$ ) le support de  $a$  (resp.  $b$ ). On a alors :

$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  est le support de  $a + b$ .

$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  est le support de  $a \times b$ .

Si  $a$  est quasi inversible et  $a^*$  sa quasi-inverse, alors

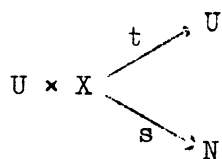
$\mathcal{A}^*$  est le support de  $\mathcal{A}^*$ .

$\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$  est le support de  $a \odot b$ .

Liens K-langages-séries rationnelles. - Les K-langages sont les supports des séries rationnelles positives.

### 6. Automates.

Définition d'un automate. - Un automate est défini par la donnée de trois ensembles  $U, X, N$ , et de deux applications  $s$  et  $t$ .



$U$  est l'ensemble des états.

$X$  l'ensemble des entrées.

$N$  l'ensemble des sorties.

$t$  l'application de transfert.

$s$  l'application de sortie.

Soit  $X^*$  le monoïde libre engendré par  $X$ . On "prolonge" la fonction  $t$  à  $U^* \times X^*$  de la manière suivante

$$T(a, e) = a, \quad \forall a \in U, \quad e \text{ le mot vide de } X^* .$$

$$T(a, x) = t(a, x), \quad x \in X, \quad a \in U .$$

$$T(a, xp) = T(t(a, x), p), \quad a \in U, \quad xp \in X^*, \quad x \in X .$$

Soit  $N^*$  le monoïde libre engendré par  $N$ . On prolonge  $s$  en  $S$  de la manière suivante :

$$U \times X^* \xrightarrow{S} N^*$$

$$S(a, e) = e', \quad e' \text{ étant le mot vide de } N^* .$$

$$S(a, x) = s(a, x), \quad \forall a \in U, \quad x \in X .$$

$$S(a, xp) = s(a, x) \cdot S(t(a, x), p), \quad a \in U, \quad x \in X, \quad p \in X^* .$$

On suppose  $X$  fini. Soit  $a_0 \in U$ ,  $F \subset U$ ,  $F$  ensemble fini. Une partie régulière  $A$  de  $X^*$  est associée à un état  $a_0$  d'un automate sans sortie :

$$A = \{f ; T(a_0, f) \in F\} .$$

$A$  est le langage d'un automate par rapport à l'état initial  $a_0$  et au sous-ensemble  $F$  des états finaux.

PROPOSITION. - Le langage d'un automate à états finis, associé à un état initial  $a_0 \in U$ , est un K-langage.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] FLIESS (Michel). - Sur certaines familles de séries formelles, Thèse Sc. math. Univ. Paris-7, 1972.

(Texte reçu le 28 octobre 1974)

Khyra GÉRARDIN  
12 rue Beccaria  
75012 PARIS

---