Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

MAURICE MIGNOTTE

Indépendance algébrique de certains nombres de la forme α^{β} et α^{β^2}

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 16, n° 2 (1974-1975), exp. n° G9, p. G1-G5

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1974-1975__16_2_A10_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'études de Théorie des nombres)
16e année, 1974/75, n° G9, 5 p.

3 février 1975

INDÉPENDANCE ALGÉBRIQUE DE CERTAINS NOMBRES DE LA FORME α^β et α^{β^2}

par Maurice MIGNOTTE

(d'après W. Dale BROWNAWELL et Michel WALDSCHMIDT [2]).

1. Enoncé du résultat.

En 1949, A. O. GEL'FOND ([4], Th. 1, p. 132-133) prouva que si α est un nombre algébrique non nul, $\log \alpha \neq 0$, et β un irrationnel cubique, alors α^β et α^{β^2} sont algébriquement indépendants (sur $\overline{\mathbb{Q}}$). Le théorème suivant étend ce résultat au cas où α est très bien approché par des nombres algébriques de degré borné.

THÉORÈME. - Soient α un nombre complexe non nul, $\log \alpha \neq 0$, et β un nombre irrationnel cubique. Soit f une fonction réelle positive, croissante et non bornée, définie sur $\mathbb{N}$. Supposons que, pour un certain entier d_0 et une infinité d'entiers T, il existe un nombre algébrique a_T, de degré au plus d_0, tel que

$$\log H(a_T) \leq T \quad \text{et} \quad \log|\alpha - a_T| < -\exp(Tf(T)) .$$

Alors α^β et α^{β^2} sont algébriquement indépendants.

(La notation $H(a)$ désigne la hauteur d'un nombre algébrique a, c'est-à-dire le maximum des modules des coefficients de son polynôme minimal sur $\mathbb{Z}$.)

Exemple. - Pour

$$\alpha = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\, 2^{-2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\Big\}2n \text{ fois} ,$$

α^β et α^{β^2} sont algébriquement indépendants si β est un nombre algébrique de degré 3.

On fixe une détermination du logarithme dans le disque $|z - \alpha| < |\alpha|$ telle que $\log \alpha$ soit non nul. Pour a dans ce disque, on écrit a^γ au lieu de $\exp(\gamma \log a)$.

2. Une série de lemmes.

LEMME 1 ("Lemme de Siegel"). - Soient R et S deux entiers positifs, $2R < S$, et soient a_{ij}, $1 \leq i \leq R$, $1 \leq j \leq S$, des polynômes à coefficients entiers de degré et de hauteur respectivement majorés par δ et A, $A \geq 1$. Alors il existe des polynômes $f_1, \ldots, f_S$ de degré au plus δ vérifiant

$$\mathrm{ht}(f_j) \leq ((1+\delta)^2\, SA)^{2R/(S-2R)}$$

et

$$\sum_{j=1}^{S} a_{ij}\, f_j = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq R .$$

(Voir [1], lemme 5.2.)

LEMME 2 (GEL'FOND). - Pour deux polynômes quelconques sur $\mathbb{C}$, on a

$$\mathrm{ht}(P).\mathrm{ht}(Q) \leqslant e^{\deg PQ}.\mathrm{ht}(PQ) .$$

(Voir [4], lemme 2, p. 135.)

LEMME 3 (TIJDEMAN, [5]). - Soit

$$F(z) = \sum_{i=0}^{m-1} A_i \exp(\alpha_i z) ,$$

m entier positif, α_i distincts, un polynôme exponentiel. Soient r, s, t des entiers positifs, $r = st$. Soient $\beta_0, \ldots, \beta_{s-1}$ des nombres complexes distincts. On pose

$$a = \max_{0\leqslant i<m}(|\alpha_i| , 1) , \quad b = \max_{0\leqslant j<s}(|\beta_j| , 1) ,$$

$$a_0 = \min_{i,j,i\neq j}(|\alpha_i - \alpha_j| , 1) , \quad b_0 = \min_{0\leqslant i<j<s}(|\beta_i - \beta_j| , 1) .$$

Alors, pour $r \geqslant 2m + 13ab$, on a

$$\max_{0\leqslant i<m}|A_i| \leqslant s\sqrt{m!}\, e^{7ab}\left(\frac{1}{2a_0 b}\right)^{m-1} \left(\frac{72b}{b_0\sqrt{s}}\right)^{r} \max_{0\leqslant h<t,0\leqslant j<s}|F^{(h)}(\beta_j)| .$$

LEMME 4 (GEL'FOND [4], lemme V, p. 145-146). - Soient f et g des polynômes à coefficients entiers premiers entre eux. Alors, pour tout nombre complexe ω, on a

$$\max(|f(\omega)| , |g(\omega)|) > |f|^{-n} |g|^{-m} (m + n)^{-(m+n)} ,$$

où on a posé

$$|f| = \mathrm{ht}(f) , \quad |g| = \mathrm{ht}(g) , \quad m = \deg(f) , \quad n = \deg(g) .$$

LEMME 5 (GEL'FOND [4], lemme VI, p. 147). - Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients entiers et ω un nombre complexe vérifiant

$$|P(\omega)| \leqslant \exp(-\lambda d(h + d)) , \quad \lambda \geqslant 3 , \quad d = \deg P , \quad \mathrm{ht}(P) = e^h .$$

Alors il existe un diviseur Q de P, égal à une puissance d'un polynôme irréductible sur $\mathbb{Z}$, tel que

$$|Q(\omega)| \leqslant \exp(-(\lambda - 1)d(h + d)) .$$

LEMME 6. - Soit ω un nombre complexe transcendant et ξ un entier algébrique sur $\mathbb{Z}[\omega]$, de degré δ, dont le polynôme minimal a un degré majoré par d et une hauteur majorée par e^h. Si

$$\log|\xi| = -\lambda d(d + h) , \text{ avec } \lambda > 6 + 2\log(\delta + 1) + 2\log(|\omega| + 1) ,$$

alors il existe un polynôme $P(\omega) \in \mathbb{Z}[\omega]$ irréductible, et un entier positif s, tels que P^s divise la norme de ξ sur $\mathbb{Q}(\omega)$ et que

$$-3\delta\lambda d(h + d) \leqslant \log|P(\omega)| \leqslant -\frac{\lambda}{6s} d(h + d) .$$

Démonstration du lemme 6. - C'est une adaptation des arguments de ČUDNOVSKIJ [3]. Considérons le polynôme minimal de ξ sur $\mathbb{Z}[\omega]$:

$$\xi^{\delta} + u_{\delta-1}(\omega)\, \xi^{\delta-1} + \ldots + u_0(\omega) = 0 \ , \quad \deg u_i \leqslant d \ , \quad \mathrm{ht} u_i \leqslant e^h \quad (0 \leqslant i \leqslant \delta-1) \ .$$

La norme de ξ sur $\mathbb{Q}(\omega)$ est u_0, et

$$u_0 = -\xi \sum_{1 \leqslant i \leqslant \delta} u_i\, \xi^{i-1} \quad (\text{avec } u_\delta = 1) \ .$$

D'où, facilement,

$$\log|u_0(\omega)| < -\frac{\lambda}{2} d(d+h) \ .$$

Soit $P(\omega) \in \mathbb{Z}[\omega]$ irréductible, donné par le lemme 5, tel que P^s divise u_0, $s > 0$, et

$$\log|P^s(\omega)| < -\left(\frac{\lambda}{2} - 1\right) d(d+h) < -\frac{\lambda}{6} d(d+h) \ .$$

On va démontrer l'inégalité

(1) $$\log|P(\omega)| > -3\delta\lambda d(d+h) \ .$$

Supposons que (1) n'ait pas lieu. Dans ce cas,

(2) $$\log|u_j(\omega)| \leqslant -2\delta\lambda d(d+h) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant j \leqslant \delta - 1 \ .$$

En effet, (2) est vraie pour $j = 0$: utiliser le fait que P divise u_0 et le lemme 2. Supposons que (2) ait lieu jusqu'à l'indice $j-1$, $1 \leqslant j \leqslant \delta - 1$, et démontrons qu'elle est vraie au rang j. On a

$$-u_j(\omega) = \xi^{\delta-j} + \sum_{i=0}^{j-1} u_i(\omega)\, \xi^{i-j} + \xi \sum_{\ell=j+1}^{\delta-1} \xi^{\ell-j-1} u_\ell(\omega) \ .$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence et l'expression de $|\xi|$, on obtient le résultat suivant

$$\log|u_j(\omega)| \leqslant -\frac{\lambda}{2} d(h+d) \ .$$

Puis le lemme 4 montre que u_j et P^s ont un facteur commun, c'est-à-dire que $P(\omega)$ divise $u_j(\omega)$ dans $\mathbb{Z}[\omega]$. D'où (2). Et en particulier,

$$e^{-\delta\lambda d(d+h)} \leqslant |\xi^{\delta}| \leqslant \sum_{j=0}^{\delta-1} |u_j(\omega)|\,|\xi|^{j-1} \leqslant \delta e^{-2\delta\lambda d(d+h)} \ .$$

Cette dernière inégalité est impossible. D'où le lemme.

3. Preuve du théorème.

L'application du théorème de Gel'fond ([4], III, p. 134) montre que α^{β} et α^{β^2} sont transcendants. On veut montrer que α^{β} et α^{β^2} sont algébriquement indépendants. Supposons que ce ne soit pas le cas, le corps $\mathbb{Q}(\alpha^{\beta}, \alpha^{\beta^2})$ a alors un degré de transcendance égal à 1. On peut alors écrire $\mathbb{Q}(\beta, \alpha^{\beta}, \alpha^{\beta^2}) = \mathbb{Q}(\omega, \omega_1)$, où ω est transcendant et ω_1 entier sur $\mathbb{Z}[\omega]$, de degré m. Soit $v \in \mathbb{Z}[\omega]$ non nul tel que $v\alpha^{\beta}$, $v\alpha^{\beta^2}$, $v\alpha^{-\beta}$, $v\alpha^{-\beta^2}$ appartiennent à $\mathbb{Z}[\omega, \omega_1]$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que β est un entier algébrique et que $f(T)$ est majoré par $\log T$.

Soit T un entier suffisamment grand, et soit a_T donné par les hypothèses du théorème, de dénominateur Δ $(\leqslant e^T)$. On pose

$$f = f(T) \ , \quad N_0 = [\exp(Tf/7)] \ , \quad N_1 = [N_0^2 \log N_0] \ ,$$

et

$$L_N = [N^{1/2} f^{1/4}] \ , \quad H_N = [N^{3/2}(\log N)\ f^{-3/4}] \ , \quad P_N = [\frac{1}{4d_0\ m} N^{3/2} f^{-3/4}] \ ,$$

pour $N_0 \leqslant N \leqslant N_1$.

<u>1er pas</u>. - On construit une fonction auxiliaire de la forme

$$F_N(z) = \sum_{0\leqslant\nu_0,\nu_1,\nu_2<N} \varphi(\nu_0 \ , \ \nu_1 \ , \ \nu_2) \exp((\nu_0 + \nu_1 \beta + \nu_2 \beta^2)z)$$

telle que

$$\log|F_N(z)| \ll - N^3 \log N \quad \text{pour} \quad |z| \leqslant N^{3/2} \ ,$$

où les $\varphi(\nu)$ appartiennent à $\mathbb{Z}[\omega]$, sont premiers entre eux dans leur ensemble, et vérifient

$$\log \mathrm{ht}(\varphi(\nu)) \ll H_N \ , \quad \deg \varphi(\nu) \ll NL_N \ .$$

Les étapes de cette construction sont les suivantes.

(i) On considère les nombres

$$\varphi(p \ , \ \lambda_0 \ , \ \lambda_1 \ , \ \lambda_2) = \sum_\nu \varphi(\nu)(\nu_0 \ , \ \nu_1 \beta + \nu_2 \beta^2)^p \ a_T^{\mu_0} \ \alpha^{\beta\mu_1} \ \alpha^{\beta^2\mu_2} \ ,$$

pour $0 \leqslant \lambda_0 \ , \ \lambda_1 \ , \ \lambda_2 < L_N$, et où les μ_i sont les entiers définis par

$$\mu_0 + \mu_1 \beta + \mu_2 \beta^2 = (\nu_0 + \nu_1 \beta + \nu_2 \beta^2)(\lambda_0 + \lambda_1 \beta + \lambda_2 \beta^2) \ .$$

Le lemme 1 permet de trouver des $\varphi_0(\nu)$ dans $\mathbb{Z}[\omega]$, pas trop gros, tels que les $\varphi(p \ , \ \lambda)$ soient nuls. Si les $\varphi_0(\nu)$ ne sont pas premiers entre eux dans leur ensemble, on divise chacun d'eux par leur p. g. c. d., d'où une famille de $\varphi(\nu)$, de p. g. c. d. égal à 1 , qui annule les $\varphi(p \ , \ \lambda)$. Le lemme 2 permet de montrer que les φ vérifient les majorations ci-dessus.

(ii) Grâce aux hypothèses du théorème, et au choix des φ , les quantités

$$|F_N^{(p)}((\lambda_0 + \lambda_1 \beta + \lambda_2 \beta^2) \log \alpha) - \varphi(p \ , \ \lambda)|$$

sont très petites pour $0 \leqslant p < P_N$. Mais, par construction, les $\varphi(p \ , \ \lambda)$ sont nuls, et les $F_N^{(p)}((\lambda_0 + \lambda_1 \beta + \lambda_2 \beta^2) \log \alpha)$ sont donc très petits.

(iii) La formule d'interpolation d'Hermite permet enfin de majorer $|F_N(z)|$.

<u>2e pas</u>. - On montre qu'il existe un entier p_0 , $P_N \leqslant p_0 \ll P_N$, et un indice $(\lambda_0 \ , \ \lambda_1 \ , \ \lambda_2)$, $0 \leqslant \lambda_0 \ , \ \lambda_1 \ , \ \lambda_2 < L_N$, tels que

$$- N^3 \log N \ll \log F_N^{(p_0)}((\lambda_0 + \lambda_1 \beta + \lambda_2 \beta^2) \log \alpha) \ll - N^3 \log N \ .$$

Si cette assertion était fausse, le lemme 3 montrerait que les $\varphi(\nu)$ sont tous très petits, le lemme 5 fournirait des facteurs primaires $q(\nu)$ de chaque $\varphi(\nu)$ tous très petits, du fait que les $\varphi(\nu)$ ont un p. g. c. d. trivial deux des $q(\nu)$ sont premiers eux mais ne vérifient pas le lemme 4 : contradiction.

Le même argument qu'en (ii) montre que le nombre $\varphi(p_0 , \lambda)$ vérifie aussi

$$- N^3 \log N \ll \log \varphi(p_0 , \lambda) \ll - N^3 \log N .$$

3e pas. - Un multiple convenable de $\varphi(p_0 , \lambda)$, du type $\xi_N = (v\Delta)^{cNL_N} \varphi(p_0 , \lambda)$, vérifie encore un encadrement analogue et ξ_N , ainsi que ses conjugués, est un polynôme en les conjugués des ω_1 et Δa_T au-dessus de $\mathbb{Q}(\omega)$ (de degré $\leqslant m$ et d_0 respectivement), à coefficients dans $\mathbb{Z}[\omega]$ de degré $\ll NL_N$ et tel que $\log \mathrm{ht} \ll H_N$.

Grâce au lemme 6, on obtient un polynôme irréductible, $R_N(\omega)$ dans $\mathbb{Z}[\omega]$ et un entier positif s , tels que R_N et $Q_N = R_N^{s_N}$ vérifient

$$\deg Q_N \ll NL_N , \quad \log \mathrm{ht}\, Q_N \ll H_N ,$$
$$- N^3(\log N)\, f^{1/4} < \log|R_N(\omega)| , \quad \log|Q_N(\omega)| \ll - N^3 \log N .$$

4e pas. - On applique le lemme 4 aux polynômes Q_N et Q_{N+1} pour $N_0 \leqslant N < N_1$. On en déduit $R_N = R_{N+1}$ et donc $R_{N_1} = R_{N_0}$. Ce qui implique

$$- \log|Q_{N_1}(\omega)| = - s_{N_1} \log|R_{N_0}(\omega)| \ll N_1^{3/2} f^{1/4} N_0^3(\log N_0)\, f^{1/4}$$
$$\ll f^{1/2} N_1^3(\log N_1)^{-1/2} ,$$

et contredit la borne supérieure de $\log|Q_{N_1}(\omega)|$ obtenu au troisième pas.

Cette contradiction achève la démonstration du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BROWNAWELL (W. D.). - Gel'fond's method for algebraic independence, Trans. Amer. math. Soc. (à paraître).

[2] BROWNAWELL (W. D.) and WALDSCHMIDT (M.). - The algebraic independence of certain numbers to algebraic powers (manuscrit non publié).

[3] ČUDNOVSKIJ (G. V.). - Algebraic independence of some values of the exponential function [en russe] Mat. Zametki, t. 15, 1974, p. 661-672 ; [en anglais] Math. Notes, t. 15, 1974, p. 391-398.

[4] GEL'FOND (A. O.). - Transcendental and algebraic numbers. - New York, Dover Publications, 1960.

[5] TIJDEMAN (R.). - An auxiliary result in the theory of transcendental numbers, J. Number Theory, t. 5, 1973, p. 80-94.

(Texte reçu le 21 avril 1975)

Maurice MIGNOTTE
Université Louis Pasteur
Centre de Calcul
7 rue René Descartes
67084 STRASBOURG