Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Michel Mendès France

Fractions continues limitées et théorie des langages

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 16, nº 1 (1974-1975), exp. nº 9, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1974-1975__16_1_A6_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
16e année, 1974/75, n° 9, 5 p.

6 janvier 1975

FRACTIONS CONTINUES LIMITÉES ET THÉORIE DES LANGAGES

par Michel MENDES FRANCE

1. Introduction.

Nous nous proposons de résumer les articles [3] et [4] en utilisant une terminologie tirée de la théorie des langages, laquelle semble particulièrement bien adaptée. On pourra d'ailleurs à ce propos consulter le travail de G. RANEY [5].

2. La terminologie.

Soient M et m deux ensembles (éventuellement infinis) appelés alphabets. Les éléments de M sont appelés les lettres majuscules, ceux de m, les lettres minuscules. Selon l'usage, m^* désigne la famille des suites finies de lettres minuscules. Par définition, un mot $\vec{\mu}$ est un élément de $(M \cup m) \times m^*$. Un mot est donc une suite finie de lettres, la lettre initiale étant soit majuscule, soit minuscule, les lettres suivantes, si elles existent, étant toutes des minuscules. (Cette définition n'est pas la définition traditionnelle : en particulier, elle exclut le "mot vide".) La longueur d'un mot $\vec{\mu}$ est le nombre de lettres qui le compose : on la note $\|\vec{\mu}\|$.

Dans cette étude, nous choisissons $M = \{0 , -1 , -2 , -3 , \ldots\}$ et

$$m = \underset{\sim}{N} = \{1 , 2 , 3 , \ldots\} .$$

Pour fixer les idées, les mots $[-13 , 312 , 2 , 1 , 2]$, $[0 , 3]$, $[2,10,11]$, $[38]$ ont pour longueur respectivement 5, 2, 3, 1. Les deux premiers mots débutent par des majuscules, les deux suivants, par des minuscules.

3. Fractions continues limitées.

Soit ξ un nombre rationnel dont le développement en fraction continue est

$$\xi = a_0 + \frac{1/}{/a_1} + \frac{1/}{/a_2} + \ldots + \frac{1/}{/a_s} ,$$

où $a_0 \in \underset{\sim}{Z}$, $a_1 \in \underset{\sim}{N}$, ..., $a_s \in \underset{\sim}{N}$. Si $s \geq 1$, on suppose $a_s \geq 2$. Au nombre rationnel ξ correspondent les deux mots :

$$\vec{\xi} = [a_0 , a_1 , a_2 , \ldots , a_s]$$
$$\vec{\xi}' = [a_0 , a_1 , a_2 , \ldots , a_s - 1 , 1] ,$$

et réciproquement, à tout mot correspond un nombre rationnel (et un seul). La longueur $\|\vec{\xi}\|$ n'est autre que la profondeur du nombre ξ à l'unité près.

Soit $f(X) = (aX + b)/(cX + d)$ une homographie non constante, à coefficients entiers. L'objet de cette étude est de "calculer" $\|\overrightarrow{f(\xi)}\|$ en fonction de $\|\vec{\xi}\|$. Les preuves ne seront qu'esquissées : nous n'indiquerons que les lemmes essentiels à la démonstration du théorème suivant.

THÉORÈME 1. - Soit $f(X) = (aX + b)/(cX + d)$ une homographie non constante. On suppose que a , b , c , d sont quatre entiers sans diviseur commun autre que 1 . Soit $\delta = ad - bc \neq 0$ leur déterminant. Alors

$$\limsup_{\|\vec{\xi}\|\to\infty} \frac{\|\overrightarrow{f(\xi)}\|}{\|\vec{\xi}\|} = \theta(|\delta|) < \infty ,$$

où $\theta(|\delta|)$ est un nombre entier impair.

On trouvera dans [3] et [4] des précisions sur $\theta(|\delta|)$ ainsi qu'une forme plus élaborée du théorème.

4. Concaténation.

Soients $\vec{\xi} = [a_0 , a_1 , \dots , a_s]$ et $\vec{\eta} = [b_0 , b_1 , \dots , b_t]$ deux mots. L'expression composée

$$\vec{\xi}\,\vec{\eta} = [a_0 , a_1 , \dots , a_s , b_0 , b_1 , \dots , b_t] , \tag{1}$$

obtenue par concaténation, n'est un mot que si la lettre initiale b_0 de $\vec{\eta}$ est minuscule (donc $\eta \geq 1$). Dans ce cas, on obtient bien un mot du langage $\underset{\sim}{Z} \times \underset{\sim}{N}^*$. (Le mode de formation du mot est le même que celui des deux mots français "couvre" et "chef" produit "couvre-chef".) Notez qu'alors $\|\vec{\xi}\,\vec{\eta}\| = \|\vec{\xi}\| + \|\vec{\eta}\|$.

Si par contre $\vec{\eta}$ débute par une majuscule $(\eta < 1)$, la situation est plus complexe. A l'expression (1) correspond le nombre rationnel

$$a_0 + \frac{1/}{/a_1} + \dots + \frac{1/}{/a_s} + \frac{1/}{/b_0} + \frac{1/}{/b_1} + \dots + \frac{1/}{/b_t}$$

lequel se développe en fraction continue

$$c_0 + \frac{1/}{/c_1} + \dots + \frac{1/}{/c_u} \qquad (c_u \geq 2 \quad \text{si} \quad u \geq 1)$$

et auquel correspond le mot $[c_0 , c_1 , \dots , c_u]$.

On désigne ce mot par $\vec{\xi} \oplus \vec{\eta}$. L'opération $\oplus$ se réduit donc à la concaténation si $\eta \geq 1$. (On ne peut pas ne pas évoquer ici la formation des mots composés exposée par Michel BUTOR [1] dans son introduction à "Finnegans Wake" et par Lewis CARROL [2] dans la "Chasse au Snark" : "fumant" $\oplus$ "furieux" = "frumieux".)

LEMME 1. - Quels que soient les deux mots $\vec{\xi}$ et $\vec{\eta}$, on a

$$\|\vec{\xi} \oplus \vec{\eta}\| \leq \|\vec{\xi}\| + \|\vec{\eta}\| + 2 .$$

L'égalité est possible ($\vec{\xi} = [1]$, $\vec{\eta} = [-1 , 3]$ par exemple).

Voir la démonstration dans [4].

5. Un lemme d'approximation.

Le lemme suivant est une forme exacte d'un lemme d'approximation de Dirichlet.

LEMME 2. - *Soient* a *et* c *deux entiers premiers entre eux. Alors pour tout nombre rationnel* $\xi \neq 0$, *on a*

$$\overrightarrow{\left(\frac{a}{c} + \frac{1}{c\xi}\right)} = \overrightarrow{\left(\frac{a}{c}\right)}_1 \oplus \overrightarrow{\left(\frac{\xi - q}{c}\right)} ,$$

où $\overrightarrow{\left(\frac{a}{c}\right)}_1$ *représente le mot de longueur impaire correspondant à* $\frac{a}{c}$ *et où* q *est le dénominateur du nombre rationnel correspondant au mot*

$$\overrightarrow{\left(\frac{a}{c}\right)}_1 \oplus \vec{0} .$$

Ce lemme est démontré dans [3], et se généralise au cas où $(a , c) > 1$.

Cet énoncé est doublement important dans notre étude. Une première conséquence est la construction d'un algorithme permettant de multiplier une fraction continue par un nombre entier (Une seconde conséquence sera décrite au paragraphe 6). En effet, soit à multiplier

$$\xi = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \dots + \frac{1|}{|a_s} \qquad (s \geq 1)$$

par l'entier positif n . On définit

$$\xi_j = a_j + \frac{1|}{|a_{j+1}} + \dots + \frac{1|}{|a_s} \qquad (0 \leq j \leq s) .$$

Ainsi

$$\xi = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|\xi_2} ,$$

d'où

$$n\xi = na_0 + 1/((a_1/n) + (1/n\xi_2)) .$$

Supposons $(a_1 , n) = 1$ et $a_1 > n$. D'après le lemme 2, il existe un entier q_2 tel que

$$\overrightarrow{\left(\frac{a_1}{n} + \frac{1}{n\xi_2}\right)} = \overrightarrow{\left(\frac{a_1}{n}\right)}_1 \oplus \overrightarrow{\left(\frac{\xi_2 - q_2}{n}\right)} ,$$

d'où

$$\overrightarrow{(n\xi)} = \overrightarrow{(na_0)} \oplus \overrightarrow{\left(\frac{a_1}{n}\right)}_1 \oplus \overrightarrow{\left(\frac{\xi_2 - q_2}{n}\right)} .$$

Or

$$\frac{\xi_2 - q_2}{n} = \frac{a_2 - q_2}{n} + \frac{1}{n\xi_3} = \frac{a_2'}{n} + \frac{1}{n\xi_3} .$$

Supposons encore $a_2' > n$ et $(a_2' , n) = 1$. Une nouvelle application du lemme 2 montre que

$$\overrightarrow{\left(\frac{\xi_2 - q_2}{n}\right)} = \overrightarrow{\left(\frac{a_2'}{n}\right)}_1 \oplus \overrightarrow{\left(\frac{\xi_3 - q_3}{n}\right)} .$$

L'algorithme se poursuit, et conduit ainsi à l'expression

$$(\overrightarrow{n\xi}) = (\overrightarrow{na_0}) \oplus (\overrightarrow{\tfrac{a_1}{n}})_1 \oplus (\overrightarrow{\tfrac{a'_2}{n}})_1 \oplus \dots \ominus (\overrightarrow{\tfrac{a'_{s-1}}{n}})_1 \oplus (\overrightarrow{\tfrac{a'_s}{n}}) .$$

La formule ci-dessus n'a pas de sens si on ne prend pas certaines précautions. L'opération $\oplus$ n'est pas associative. Toutefois, si on se trouve être dans le cas où a_1, a'_2, ..., a'_s sont tous des entiers supérieurs à n, alors les mots

$$(\overrightarrow{\tfrac{a_1}{n}})_1 , (\overrightarrow{\tfrac{a'_2}{n}})_1 , \dots , (\overrightarrow{\tfrac{a'_{s-1}}{n}})_1 , (\overrightarrow{\tfrac{a'_s}{n}})$$

débutent tous par des minuscules en sorte que $(\overrightarrow{n\xi})$ s'obtient effectivement comme le résultat de s concaténations successives. Admettons que nous soyons dans ce cas, et posons

$$\theta(n) = \max_{1 \leq a \leq n} \|(\overrightarrow{\tfrac{a}{n}})_1\| \qquad \text{(entier impair).}$$

Il est alors bien clair que

$$\|\overrightarrow{n\xi}\| \leq 1 + s\theta(n) = 1 + (\|\vec{\xi}\| - 1)\, \theta(n) .$$

Cette inégalité a été obtenue en faisant des hypothèses restrictives sur les lettres du mot $\vec{\xi}$. On a de plus supposé $n > 0$. Dans le cas général, on obtient le lemme suivant.

LEMME 3. - Pour tout entier $n \neq 0$ et tout ξ rationnel, on a

$$\|\overrightarrow{n\xi}\| \leq \theta(|n|)(\|\vec{\xi}\| - 1) + 2 .$$

Ce lemme est démontré en détail dans [3] et [4]. (Dans [3], le lemme précédent est le théorème. Le théorème tel qu'il y est énoncé est incomplet. Il faut y supposer x non entier. Le corollaire qui suit le théorème doit se lire

$$\Psi(nx) \geq \frac{\Psi(x) - 3 + \varepsilon(n)}{K(n) + 1 + \varepsilon(n)} - 3 .)$$

6. Fin de la démonstration du théorème 1.

Soit $f(X) = (aX + b)/(cX + d)$ une homographie, et soit $\delta = ad - bc$ son déterminant. L'identité classique

$$f(X) = \frac{a}{c} + \frac{-\delta}{c(cX + d)}$$

associée au lemme 2 (on suppose $(a , c) = 1$) permet d'établir l'existence d'un entier e tel que, pour tout ξ rationnel,

$$\overrightarrow{f(\xi)} = (\overrightarrow{\tfrac{a}{c}})_1 \oplus (\overrightarrow{\tfrac{\xi + e}{-\delta}}) .$$

D'après le lemme 1, deux fois répété

$$\|\overrightarrow{f(\xi)}\| \leq \|(\overrightarrow{\tfrac{a}{c}})_1\| + \|(\overrightarrow{\tfrac{\xi + e}{-\delta}})\| + 2$$

$$\leq \|(\overrightarrow{\tfrac{a}{c}})_1\| + \|(\overrightarrow{\tfrac{-\delta}{\xi + e}})\| + 4 .$$

D'après le lemme 3,

$$\|\overrightarrow{(\frac{-\delta}{\xi + e})}\| \leq \theta(|\delta|)\ \|\overrightarrow{(\frac{1}{\xi + e})}\| + 2 - \theta(|\delta|)$$

$$\leq \theta(|\delta|)(\|\overrightarrow{\xi + e}\| + 2) + 2 - \theta(|\delta|)$$

$$\leq \theta(|\delta|)\ \|\vec{\xi}\| + \theta(|\delta|) + 2\ .$$

Par suite

$$\|\overrightarrow{f(\xi)}\| \leq \theta(|\delta|)\ \|\vec{\xi}\| + \theta(|\delta|) + \|(\vec{\frac{a}{c}})_1\| + 6\ . \tag{2}$$

Il est aisé de vérifier que le coefficient $\theta(|\delta|)$ de $\|\vec{\xi}\|$ est le meilleur possible. La constante $\tau = \theta(|\delta|) + \|\overrightarrow{(a/c)}_1\| + 6$ peut sans doute être améliorée mais c'est sans importance pour la démonstration du théorème 1.

L'inégalité (2) a été établie sous l'hypothèse restrictive $(a , c) = 1$. Quitte à changer la constante additive τ , on peut montrer que l'inégalité (2) est vraie en général. Nous avons ainsi prouvé le résultat suivant qui précise le théorème 1.

THÉORÈME 2. - Sous les mêmes hypothèses que le théorème 1, il existe deux constantes $\theta(|\delta|)$ et $\tau(f)$ telles que, pour tout nombre rationnel ξ ,

$$\|\overrightarrow{f(\xi)}\| < \theta(|\delta|)\ \|\vec{\xi}\| + \tau(f)\ .$$

Enfin, pour terminer, signalons que la fonction $n \longmapsto \theta(n)$ a un comportement logarithmique. Voici ses premières valeurs

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...	89	...
$\theta(n)$	1	3	3	3	5	3	5	5	5	5	5	5	7	5	...	11	...

BIBLIOGRAPHIE

[1] BUTOR (M.). - Introduction à Finnegans Wake, "Finnegans Wake" de J. Joyce. Traduction française. - Paris, Gallimard, 1962.

[2] CARROLL (L.). - La chasse au Snark. Traduit en français par Aragon. - Paris, Seghers, 1962.

[3] MENDES FRANCE (M.). - Sur les fonctions continues limitées, Acta Arithm., Warszawa, t. 23, 1973, p. 207-215.

[4] MENDES FRANCE (M.). - The depth of a rational number, "Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai" [1974. Debrecen]. - Amsterdam, North-Holland publishing Company (à paraître).

[5] RANEY (G. N.). - On continued fractions and finite automata, Math. Annalen, t. 206, 1973, p. 265-283.

(Texte reçu le 6 janvier 1975)

Michel MENDES FRANCE
Université de Bordeaux-I
Mathématiques [ERA CNRS n° 362]
351 cours de la Libération
33405 TALENCE