Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Alain Lascoux

Tableaux de Young et fonctions de Schur-Littlewood

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 16, nº 1 (1974-1975),
exp. nº 4, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1974-1975__16_1_A2_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
16e année, 1974/75, n° 4, 7 p.

4 novembre 1974

TABLEAUX DE YOUNG ET FONCTIONS DE SCHUR-LITTLEWOOD

par Alain LASCOUX

1. Introduction.

La thèse de Schur en 1901 a marqué le départ d'une importante série d'études sur les représentations des groupes linéaires et symétriques, et qui s'étendent à des domaines beaucoup plus vastes, que ce soit les partitions d'entiers ou le groupe de Grothendieck $K(X)$ d'une variété algébrique.

Il y a en effet des analogies frappantes entre différentes de ces théories ; LITTLEWOOD a adopté un point de vue intéressant d'opérations sur les fonctions symétriques (qu'il appelait S-fonctions, SCHUR ayant en pratique considéré les fonctions symétriques des éléments de $G\ell M$).

Nous préférons partir de l'étude d'une structure d'algèbre, présente dans toutes ces théories, dont nous avons donné quelques propriétés dans (4).

Soient M un entier, $I = (i_1 , i_2 , \ldots , i_M)$ un multi-indice appartenant à N^M , I croissant (noté $I\uparrow$) : $0 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_M$. $i_1 + \ldots + i_M = |I|$ est dit le poids de I .

Soit $\{A_I\}$ une famille d'objets. On considère le $\underset{\sim}{Z}$-module $\underset{\sim}{Z}[A_I]$, qui nous permet de définir $A_J = \pm A_I$ pour J non croissant ($(i_1, i_2+1, \ldots, i_M+M-1)$ est la permutation croissante de $(j_1 , j_2 + 1 , \ldots)$; $\pm$ est le signe de cette permutation ; si la permutation n'est pas strictement croissante, on pose $A_J = 0$), et A_z par linéarité, pour z somme finie d'indice. On définit alors une multiplication dans $Z[A]$, distributive par rapport à l'addition, qui possède la propriété (P) : $\forall\ i$, $I\uparrow$, $A_i\, A_I = \sum A_J$, la somme s'étendant à tous les $J\uparrow$, $i_1 \leqslant j_1 \leqslant i_2 \leqslant j_2 \leqslant \ldots$ tels que $i + |I| = |J|$. Cette multiplication fait de $Z[A]$ une algèbre commutative isomorphe à l'algèbre $Z[T]$ étudiée dans (4) . En particulier :

$$A_I = \det \begin{vmatrix} A_{i_1} & A_{i_2+1} & A_{i_3+2} & \cdots \\ A_{i_1-1} & A_{i_2} & A_{i_3+1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} .$$

Si l'on représente $I\uparrow$ graphiquement par un diagramme dit de Ferrer

$$\begin{array}{ll} i_1 : & * \\ & \vdots \\ i_M : & * \;\; * \;\; * \;\; * \end{array} ,$$

la symétrie par rapport à la diagonale nous donne $J\uparrow$, dit transposé de I , et noté $I^\sim$.

La transposition commute avec la multiplication et l'on a donc

$$A_I = \det|A_{j^\sim}| .$$

2. Tableaux de Young.

Il y a plusieurs algèbres naturelles isomorphes ou quotient de $\mathbb{Z}[T]$; celle des sommes de Young présente l'incomparable avantage d'être une sous-algèbre d'une algèbre dont la multiplication est bien connue.

2.1. Tableaux de Young. - Soit $I\dagger$ et son diagramme de Ferrer. Soient M lettres $(a, b, \dots, d)$. Un tableau de Young d'indice I en $a, b, \dots$ est un remplissage de I tel que si l'on ordonne les lettres par $a < b < \dots$, alors les colonnes lues de bas en haut sont des suites strictement croissantes et les lignes de gauche à droite, des suites croissantes.

2.2. Algorithme de Robinson-Schensted. - Défini par ROBINSON, redécouvert par SCHENSTED qui en donne des propriétés intéressantes, cet algorithme (R. S.) permet la multiplication des tableaux de Young. Il suffit de connaître celle d'un tableau à une case par un tableau quelconque.

L'opération $x \times Y$ s'écrit ainsi : on divise la dernière ligne de Y en deux mots, celui de gauche Y_1, contenant toutes les lettres $\leqslant x$, celui de droite Y_2 les lettres $> x$. Si Y_2 est vide, on place x à l'extrémité de la ligne et on s'arrête. Sinon, on prend la première lettre y de Y_2, on remplace y par x et l'on porte y dans la ligne précédente. On répète l'opération jusqu'à ce qu'on doive s'arrêter.

2.3. Cet algorithme permet de définir une structure de monoïde multiplicatif sur les tableaux de Young, $\mathcal{Y}$.

THÉORÈME (KNUTH [3]). - $\mathcal{Y}$ est un quotient du monoïde libre des mots en $a, b, \dots$.

2.4. Soit dans l'algèbre $Z[Y]$, D_I la somme des tableaux de Young d'indice $I\dagger$. Alors $Z[D]$ est une sous-algèbre de $Z[Y]$ isomorphe à $Z[T]$ (nous en donnerons la démonstration dans notre thèse).

COROLLAIRE. - D_I est un déterminant en les D_i, somme de tableaux lignés, ou $D_{1\dots1}$, sommes de tableaux colonnes.

2.5. Le morphisme d'évaluation de $Z[Y]$ sur l'algèbre des polynômes en $a, b, \dots$ commute avec la multiplication des tableaux de Young, $\mathcal{Y}$ étant un quotient du monoïde des mots.

COROLLAIRE. - $E_v(D_I)$ est un déterminant en les $E_v(D_i)$. C'est le polynôme symétrique que nous avons noté t_I dans [5], $\{I\}$ pour LITTLEWOOD. L'évaluation est un isomorphisme lorsqu'on la restreint à $\mathbb{Z}[D]$, $\mathbb{Z}[t]$ étant isomorphe à $\mathbb{Z}[T]$.

Après ces généralités, nous pouvons passer aux propriétés que nous démontrerons.

3. Quelques identités de Littlewood sur les S-fonctions.

3.1. Somme des fonctions symétriques irréductibles. - LITTLEWOOD, par l'étude du groupe orthogonal, a démontré quelques formules particulièrement simples qui l'ont amené à définir une nouvelle opération, dite "plethysm". Nous allons montrer comment la structure donnée ci-dessus permet d'en retrouver certaines.

3.1.1. THÉORÈME (LITTLEWOOD [6], BENDER-KNUTH [1]). - Soient M lettres et t_I , les S-fonctions irréductibles en ces lettres. Alors

$$\sum t_I = \prod_{a<x\leq d} \frac{1}{1-x} \prod_{x<y} \frac{1}{1-xy} .$$

Nous allons associer à tout tableau de Young, de manière bi-univoque, un ensemble d'entiers $\{n_a , \ldots , n_d ; n_{ab} , \ldots\}$. Le théorème en découlera, le premier membre étant $\sum E_v Y$ et le second

$$\sum a^{n_a} \ldots (ab)^{n_{ab}} \ldots$$

Supposons défini l'isomorphisme pour $M-1$ lettres. Soit $Y'(a , \ldots c)$ le tableau correspondant à $\{\ldots n_c ; \ldots n_{bc}\}$. Alors, Y est le tableau obtenu par la multiplication par

$$c^{n_{cd}} \ldots a^{n_{ad}}$$

suivant l'algorithme ainsi modifié : $x \, X_d \, Y''$: on multiplie Y'' par x suivant R. S. ; si le processus s'arrête à la r-ième ligne, alors on place d à l'extrémité de la ligne précédente. On termine en multipliant le tableau obtenu par d^{n_d} .

On conclut grâce à la propriété (P) qui peut s'énoncer ainsi : Soient i , $I\uparrow$, $J\uparrow$ vérifiant la condition indiquée ; étant donnés i , I et un tableau Y d'indice J , il existe une décomposition unique $Y = Y' \, Y''$ avec Y' d'indice i et Y'' d'indice I .

Exemple.

$$d^3 \, baa \, X_d \begin{array}{lll} c & c & \\ a & b & c \end{array} = \longrightarrow \begin{array}{lll} d & & \\ c & & \\ b & c & \\ a & a & c \end{array} \longrightarrow \begin{array}{lll} d & & \\ c & d & \\ b & c & c \\ a & a & a \end{array} \longrightarrow \begin{array}{llll} d & & & \\ c & d & & \\ b & c & c & d \\ a & a & a & b \end{array}$$

et finalement,

$$\begin{array}{lllllll} d & & & & & & \\ c & d & & & & & \\ b & c & c & d & & & \\ a & a & a & b & d & d & d \end{array}$$

Le tableau Y où l'on oublie les d est bien $(baa) \times Y'$.

Si l'on se limite à droite au produit $\prod \frac{1}{1-xy}$, on a aussitôt

3.1.2. $\prod \frac{1}{1 - xy} = \sum t_I$ pour les I dont les colonnes sont de longueur paire. La transposition nous donne :

3.1.3. $\prod \frac{1}{1 - x^2} \prod \frac{1}{1 - xy} = \sum t_I$ pour les I dont les lignes sont de longueur paire.

3.2. Une autre identité de Littlewood. - Etant données les identités ci-dessus, on éprouve l'envie de calculer $\prod(1 + xy)$. Il nous faut pour cela construire un nouvel algorithme. Tout d'abord :

DÉFINITION. - L'équerre d'un élément d'un tableau est l'ensemble des lettres à droite sur la ligne (bras), et au-dessus dans la colonne (jambe), l'élément étant la tête.

THÉORÈME (LITTLEWOOD). - $\prod(1 + xy) = \sum T_I$ pour les indices I tels que les équerres des éléments diagonaux ont une jambe plus longue d'une unité que le bras.

Supposons, comme au paragraphe précédent, qu'on ait explicité l'isomorphisme pour $M - 1$ lettres. On multiplie alors Y' par $a^{n}ad \ldots c^{n}cd$, où les n sont 0 ou 1 , suivant l'algorithme : $x\, XX_d\, Y''$: on multiplie par x suivant R. S. Si le processus s'arrête à une case prolongeant la i-ième équerre diagonale, alors on porte d à l'autre extrémité de l'équerre. Nous laissons au lecteur le soin de conclure, en utilisant $(P^{\sim})$, i. e. la multiplication d'un tableau par un tableau colonne.

Exemple.

$$ab\, XX_d \begin{array}{c} c \\ a \end{array} : \longrightarrow \begin{array}{cc} d & \\ c & \\ a & b \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} d & & \\ c & & \\ b & & \\ a & a & d \end{array}$$

BURGE [2], a donné une démonstration combinatoire des formules 3.1 et 3.2, mais par l'intermédiaire de matrices d'entiers associées aux tableaux de Young par KNUTH.

4. Produit tensoriel et partitions.

Montrons qu'inversement, des opérations naturelles sur les S-fonctions permettent de calculer des sommes de tableaux.

DÉFINITION. - Soient une famille d'entiers et un indice $I^{\uparrow}$. Une partition de n est un remplissage de I par des entiers appartenant à la famille, tels que les colonnes de haut en bas, ou les lignes de droite à gauche soient des suites croissantes, et tel que la somme des éléments contenus dans I soit n .

LEMME. - Une partition en les entiers $(1, \ldots, M)$, à r lignes au plus, est associée bi-univoquement à un couple de tableaux de Young de même indice,

$$Y_1(M, \ldots, 1), \quad Y_2(r - 1, \ldots, 0) .$$

L'isomorphisme se décompose par colonne et provient d'une construction de Sylvester : si l'on représente une partition colonne par un diagramme de Ferrer et si l'on trace la diagonale, alors en comptant les * suivant les lignes dans le quart de plan à droite, diagonale comprise, et suivant les colonnes pour l'autre quart de plan, on obtient l'isomorphisme.

Exemple.

La partition $\begin{matrix} 1 & \\ 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{matrix}$ donne pour la première colonne

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 0 & & & & \\ * & & & & & \\ * & * & * & & 2 & , \\ * & * & * & * & 4 & \end{array}$$

pour la seconde

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & & \\ * & * & 1 & , \\ * & * & 2 & \end{array}$$

i. e. la partition est associée à $\begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{matrix}$ et $\begin{matrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix}$.

Or, étant donnés deux ensembles de lettres $(a_1 , \ldots)$ et $(b_1 , \ldots)$, on sait depuis CAUCHY que

$$\prod \frac{1}{1 - a_i\, b_j} = \sum t_I(a)\ t_I(b)$$

et donc

$$= \sum E_V(Y_1)\ E_V(Y_2) \ ,$$

la somme s'effectuant sur tous les couples de tableaux de même indice, Y_1 en $a , \ldots$, Y_2 en $b , \ldots$

En remplaçant i par x^i dans les tableaux ci-dessus, on obtient le résultat suivant.

THÉORÈME (MAC MAHON [7]). - La fonction génératrice des partitions planes en $(1 , \ldots , M)$ à r-lignes au plus est égale à

$$\prod_{i=1}^{i=M} \prod_{j=0}^{j=r-1} \frac{1}{1 - x^{i+j}} \ .$$

Remarque. - Le produit "tensoriel" respectant le nombre de colonnes, on obtient un théorème plus fort :

THÉORÈME (MAC MAHON). - La fonction génératrice des partitions planes en $(1 , \ldots , M)$ à r-lignes au plus, q colonnes au plus, est

$$\prod \frac{1 - x^{i+j+q}}{1 - x^{i+j}} \ .$$

On peut se poser la question d'étudier directement la fonction $\prod((1-x^{n+q})/(1-x^n))$ où n parcourt une suite finie d'entiers, et en particulier se demander pour quelles suites on obtient un polynôme comme ci-dessus.

5. S-fonctions spéciales.

Les liens avec la théorie des nombres apparaissent plus clairement lorsque l'on choisit pour a , b , ... certaines puissances entières de x .

Donnons en exemple un ensemble de polynômes appartenant aux fonctions "spéciales" de Littlewood, qui contient les polynômes de Gauss.

THÉORÈME (LITTLEWOOD, GORDON [3]).

$$t_I(x^0 , \ldots , x^{M-1}) = \prod_{M-1\geq k>j\geq 0} (x^{i_k+k-1} - x^{i_j+j-1})/(x^k - x^j) .$$

Démonstration. - Depuis JACOBI (Cf. 4), on sait que

$$t_I(a , b , \ldots) = \Delta_I/\Delta_0 ,$$

où

$$\Delta_I = \det\begin{vmatrix} a^{0+i_1} & a^{1+i_2} & \ldots & a^{M-1+i_M} \\ b^{0+i_1} & b^{1+i_2} & \ldots & \\ \ldots & & & \end{vmatrix} .$$

Pour les valeurs choisies

$$\Delta_I = \det\begin{vmatrix} (x^0)^{i_1} & (x^0)^{i_2+1} & \ldots \\ (x^1)^{i_1} & (x^1)^{i_2+1} & \ldots \\ \ldots & & \end{vmatrix} ,$$

et il suffit de permuter les exposants extérieurs et intérieurs pour constater que ce déterminant est de Van der Monde et égal au numérateur que nous avons écrit.

Cas particulier.

$$t_i = ((1 - x^{1+i}) \ldots (1 - x^{i+M-1}))/((1 - x) \ldots (1 - x^{M-1})$$

est un polynôme dit polynôme de Gauss et noté $\binom{M+i-1}{M-1}_x = \binom{M+i-1}{i}_x$, de même que $t_{1\ldots1} = x^{i(i-1)/2}\binom{M}{i}_x$.

COROLLAIRE. - t_I est un déterminant en les $\binom{M+i-1}{i}_x$ ou $x^{i(i-1)/2}\binom{M}{i}_x$.

Remarque. - Les valeurs pour $x = 1$ de ces polynômes t_I sont intéressantes : ce sont les rangs des représentations irréductibles de $G\ell M$ et elles ont été obtenues par SCHUR.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BENDER (E.) and KNUTH (D. E.). - Enumeration of plane partitions. J. of comb. Theory, t. 13, 1972, p. 40-54.

[2] BURGE (.). - Four correspondances between graphs and Young tableaux (non publié).

[3] GORDON (B.) and HOUTEN (L.). - Notes on plane partition, I and II, J. of comb. Theory, t. 4, 1968, p. 72-99.

[4] KNUTH (D. E.). - Permutations, matrices and generalized Young tableaux, Pacific J. of Math., t. 34, 1970, p. 709-727.

[5] LASCOUX (A.). - Polynômes symétriques et coefficients d'intersection de cycles de Schubert, C. R. Acad. Sc.Paris, t. 279, 1974, Série A, p. 201-204.

[6] LITTLEWOOD (D. E.). - The theory of group characters and matrix representations of groups. - Oxford, Clarendon Press, 1940.

[7] MACMAHON (P. A.). - Combinatory analysis. Vol. 1 and 2 bound in one volume [Reprint 1rst edition (1915, 1916)]. - New York, Chelsea publishing Company, 1960.

[8] SCHUR (I.). - Oeuvres complètes, Vol. I. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1973.

(Texte reçu en octobre 1974)

Alain LASCOUX
11 avenue des Gobelins
75005 PARIS