MARC REVERSAT

Un problème métrique d'approximations diophantiennes simultanées

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 16, n° 1 (1974-1975), exp. n° 17, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1974-1975__16_1_A12_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
16e année, 1974/75, n° 17, 7 p.

17 mars 1975

UN PROBLÈME MÉTRIQUE D'APPROXIMATIONS DIOPHANTIENNES SIMULTANÉES

par Marc REVERSAT

1. Introduction.

Soit d un entier positif. Nous désignons par μ_d la mesure de Haar normalisée du groupe compact $(\underline{R}/\underline{Z})^d$, et par $\|.\|_d$ sa "norme" : si $(x_1, \ldots, x_d)$ est un d-uplet de nombres réels dont x désigne l'image canonique dans $(\underline{R}/\underline{Z})^d$, on a $\|x\|_d = \sup_{i=1,\ldots,d} \|x_i\|$, où $\|.\|$ désigne la distance à l'entier le plus proche. Soit (ε_n) une suite décroissante de nombres réels positifs telle que la série $\sum \varepsilon_n^d$ diverge. Si (u_n) est une suite d'éléments de $(\underline{R}/\underline{Z})^d$, désignons par $\nu(x, N)$ le nombre de solutions en entier n tels que $1 \leqslant n \leqslant N$ à l'inéquation :

$$(1.1) \qquad \|u_n - x\|_d < \frac{1}{2}\varepsilon_n .$$

Rappelons les définitions ([4], [7]) : La suite (u_n) est dite (ε_m)-eutaxique (resp. (ε_n)-fortement eutaxique) si, pour μ_d-presque tout $x \in (\underline{R}/\underline{Z})^d$, on a

$$\lim_{N\to+\infty} \nu(x, N) = +\infty$$

$$(\text{resp. } \nu(x, N) \sim \int_{(\underline{R}/\underline{Z})^d} \nu(x, N)\, \partial\mu_d(x) = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n^d \quad (N \dashrightarrow +\infty)) .$$

Si la suite (u_n) est (ε_n)-eutaxique (resp. $(\varepsilon_n$-fortement eutaxique), pour toute suite (ε_n) décroissante de nombres réels positifs, telle que la série $\sum \varepsilon_n^d$ diverge, elle est dite eutaxique (resp. fortement eutaxique).

Par exemple, si (u_n) est de la forme $(n\alpha)$, où α est un élément de $(\underline{R}/\underline{Z})^d$, le problème précédent revient à l'étude, pour α fixé, de l'ensemble des éléments x de $(\underline{R}/\underline{Z})^d$ pour lesquels, pour toute suite (ε_n) (décroissante de nombres réels positifs, telle que la série $\sum \varepsilon_n^d$ diverge), l'inéquation (1.1) admet une infinité de solutions en entiers positifs n. Antérieurement, au contraire, x et (ε_n) étant fixés, il fut étudié les éléments α de $(\underline{R}/\underline{Z})^d$ pour lesquels

$$(1.2) \qquad \|n\alpha - x\|_d < \frac{1}{2}\varepsilon_n$$

admet une infinité de solutions. Ainsi, le théorème métrique non homogène de Khinčin montre que, (ε_n) étant une suite décroissante donnée de nombres réels positifs et x un élément donné de $(\underline{R}/\underline{Z})^d$, l'inéquation (1.2) admet un nombre fini ou une infinité de solutions n pour μ_d-presque tout α selon que la série $\sum \varepsilon_n^d$ converge ou diverge. Ce résultat montre que la suite $(n\alpha)$ d'éléments de $(\underline{R}/\underline{Z})^d$ est (ε_n)-eutaxique, relativement à une suite (ε_n) donnée, pour μ_d-presque tout α. De même, le théorème de Erdős-LeVeque-Schmidt ([2], [6], [11]) montre que $(n\alpha)$ est (ε_n)-fortement eutaxique relativement à une suite (ε_n) donnée pour μ_d-presque tout $\alpha \in (\underline{R}/\underline{Z})^d$. Mais on ne peut rien déduire de ces résultats sur l'eutaxie et la forte-eutaxie de la suite $(n\alpha)$ puisque l'ensemble des suites (ε_n) (décroissante de nombres réels positifs, telle que la série $\sum \varepsilon_n^d$ diverge) ne possède pas de partie initiale dénombrable. D'ailleurs J. LESCA [2] et l'auteur [9], ont montré que la suite $(n\alpha)$ d'éléments de $(\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z})^d$ est eutaxique si, et seulement si, le nombre

$$M_d(\alpha) = \limsup_{n\to+\infty} 1/(n^{1/d}\|n\alpha\|_d)$$

est fini, c'est-à-dire pour μ_d-presque aucun α, et B. de MATHAN a prouvé que, en dimension 1, la même condition caractérise les éléments α de $\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}$ pour lesquels $(n\alpha)$ est fortement eutaxique [8].

Dans le travail qui suit, nous étudions la forte-eutaxie des suites d'éléments de $(\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z})^d$: pour l'essentiel nous généralisons aux dimensions $d > 1$ le résultat de B. de MATHAN. La démonstration de B. de MATHAN, en dimension 1, utilise le fait que la suite $(n\alpha)$ possède "beaucoup" d'intervalles pour lesquels son reste à l'équirépartition est borné ([3], [5]). Cette propriété, exceptionnelle pour une suite d'éléments de $\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}$, et conséquence de l'existence de l'algorithme des fractions continues, ne se généralise certainement pas aux dimensions supérieures. Aussi, c'est par une méthode différente que nous étendons aux dimensions $d > 1$ le résultat de B. de MATHAN : nous utilisons le fait que la suite $(n\alpha)$ possède une discrépance "petite" pour une famille "riche" d'indices ([1], proposition 3).

2. Eutaxie et discrépance.

Le résultat annoncé précédemment est un corollaire du théorème plus général suivant.

THÉORÈME. - *Soit (u_n) une suite d'éléments de $(\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z})^d$ telle qu'il existe une suite croissante d'entiers positifs (q_k) vérifiant :*

(i) $q_k/q_{k+1} = O(1)$ *(uniformément par rapport à k)* ;

(ii) *Si pour tout hypercube I de $(\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z})^d$ et pour M et N entiers tels que $0 \leq M < N$, on désigne par $\pi(I, M, N)$ le nombre d'entiers n tels que $M<n\leq N$ et $u_n \in I$, on a :*

$$\pi(I, M, M+q_k) = q_k\,\mu_d(I) + O((q_k\,\mu_d(I))^{1-(1/d)}) + O(1)$$

uniformément par rapport à I, M et k.

Alors la suite (u_n) est fortement eutaxique. Plus précisément, pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ décroissante de nombres réels positifs, pour tout élément x de $(\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z})^d$, si l'on désigne par $\nu(x, N)$ le nombre de solutions en entiers n tels que $1 \leq n \leq N$ à l'inéquation $\|u_n - x\|_d < \frac{1}{2}\varepsilon_n$, on a, pour tout nombre réel positif ξ et pour μ_d-presque tout élément x de $(\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z})^d$,

$$(2.1)\quad \nu(x,N) = \sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n^d + O((\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n^d)^{1-(1/4(2d+1))}\max\{(\log(\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n^d))^{1+\xi}, 1\})$$

uniformément par rapport à l'entier N.

COROLLAIRE. - *Soit* α *un élément de* $(\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z})^d$. *La suite* $(n\alpha)$ *est fortement eutaxique si, et seulement si,* $M_d(\alpha)$ *est fini.*

Preuve. - Si $M_d(\alpha)$ n'est pas fini, la suite $(n\alpha)$ n'est pas eutaxique [9], et donc n'est pas fortement-eutaxique.

Si $M_d(\alpha)$ est fini, W. W. ADAMS ([1], proposition 3) a montré que la suite $(n\alpha)$ satisfait les hypothèses (i) et (ii) du théorème, la suite (q_k) étant la suite de tous les entiers q tels que $\|q\alpha\|_d<1/q^{1/d}$ (en fait W. W. ADAMS ne montre l'hypothèse (ii) que pour des hypercubes dont un sommet est l'origine, mais la même démonstration est valable pour n'importe quel hypercube).

Ce corollaire s'étend sans difficulté aux suites de la forme $(L(n))_{n\in\underset{\sim}{N}^s}$, $\underset{\sim}{N}^s$ étant ordonné par l'ordre lexicographique, et L étant une application linéaire de $\underset{\sim}{N}^s$ dans $(\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z})^d$, puisque le résultat de discrépance de W. W. ADAMS se généralise de façon immédiate à de telles suites.

Soit (ε_n) une suite décroissante de nombres réels positifs telle que la série $\sum \varepsilon_n^d$ diverge. Pour tout entier $n \in \underset{\sim}{N}$, on désigne par I_n l'hypercube ouvert de centre u_n et de côté ε_n . Si ρ est un nombre réel positif, si x et y sont deux éléments de $(R/Z)^d$, on note $\chi_\rho(x\ ,\ y)$ la valeur prise en y par la fonction caractéristique de l'hypercube ouvert de centre x et de côté ρ . On a les relations évidentes suivantes :

$$\chi_\rho(x\ ,\ y) = \chi_\rho(y\ ,\ x)$$

$$\nu(x\ ,\ N) = \sum_{n=1}^{N} \chi_{\varepsilon_n}(x\ ,\ u_n)$$

$$\int_{(\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z})^d} \chi_{\varepsilon_n}(x\ ,\ u_n)\, \partial\mu_d(x) = \mu_d(I_n) = \varepsilon_n^d\ .$$

La démonstration du théorème se déroule en deux étapes, selon que la suite (ε_n) décroît lentement ou rapidement : soit q un élément de la suite (q_k) .

PROPOSITION 1. - *Soient* m *et* M *des entiers tels que* $0 \leqslant m < M$ *et tels que* q *divise* $M - m$. *Alors, si* ρ *désigne un nombre réel tel que* $0 < \rho \leqslant \varepsilon_{M-q+1}$, *on a*

$$\sum_{n=m+1}^{M} \mu_d(I_m \cap I_n) \leqslant \varepsilon_m^d \sum_{n=m+1}^{M-q+1} \varepsilon_n^d + O((q + \rho^{-d} + \rho^{-1}\, q^{1-1/d})\ \varepsilon_m^{2d})$$

$$+ O(\rho\varepsilon_m^d \sum_{n=m+1}^{M-q+1} \varepsilon_n^{d-1}) + O((\rho^{-1}\, q^{-1/d} + \rho^{-d}\, q^{-1})\ \varepsilon_m^d \sum_{n=m+1}^{M-q+1} \varepsilon_n^d)$$

uniformément par rapport à M , m *et* ρ .

PROPOSITION 2. - *Soient* m , M *et* N *des entiers tels que* $0 \leqslant m \leqslant M < N$ *et tels que* q *divise* $N - M$. *Alors, si* t *désigne un nombre réel tel que* $\varepsilon_m \geqslant t \geqslant \varepsilon_{M+1}$, *on a*

$$\sum_{n=M+1}^{N} \mu(I_m \cap I_n) \leqslant \varepsilon_m^d \sum_{n=M+1}^{N-q+1} \varepsilon_n^d + O((q\varepsilon_m^d + q^{1-1/d}\ \varepsilon_m^{d-1} + 1)\ \varepsilon_{M+1}^d)$$

$$+ O((q^{-1/d}\ \varepsilon_m^{d-1} + t\varepsilon_m^{d-1} + q^{-1}) \sum_{n=M+1}^{N-q+1} \varepsilon_n^d)$$

uniformément par rapport à m , M , N et t .

Ces deux propositions conduisent à la proposition suivante.

PROPOSITION 3. - Soient m et N deux entiers tels que $0 \leq m < N$. Alors :

$$\sum_{n=m+1}^{N} \mu_d(I_m \cap I_n) \leq \varepsilon_m^d \sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n^d + O(\varepsilon_m^d (\sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n^d)^{1-(1/2(2d+1))}) + O(\varepsilon_m^d) .$$

uniformément par rapport à m et N .

Ce résultat permet déjà de montrer que

$$\int_{(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d} \nu^2(x , N) \, \partial\mu_d(x) \sim \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n^d \quad (N \longrightarrow +\infty) .$$

On en déduit la relation (2.1) en raffinant le théorème de Fischer-Riesz selon une méthode utilisée par de nombreux auteurs (voir par exemple [8], [10], [11]) et que nous ne détaillerons pas ici.

La proposition 3 s'obtient à partir des propositions 1 et 2 de la manière suivante [10] : si $\sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n^d \geq q_0$, q_0 étant le premier terme de la suite (q_k) , on pose

$$t = \varepsilon_m (\sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n^d)^{-(1/2(2d+1))} ,$$

$$\rho = \varepsilon_m (\sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n^d)^{-(3/2(2d+1))} ,$$

$$q = O(\varepsilon_m^d (\sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n^d)^{1-(1/2(2d+1))}) ,$$

(et c'est dans le choix de q qu'intervient l'hypothèse (i) du théorème) on définit M par :

$$\begin{cases} \varepsilon_M \geq t \geq \varepsilon_{M+1} & \text{si} \quad t \geq \varepsilon_N \\ M = N & \text{sinon} \end{cases}$$

et on évalue alors $\sum_{n=m+1}^{M} \mu_d(I_n \cap I_m)$ (resp. $\sum_{n=M+1}^{N} \mu_d(I_n \cap I_m)$) à l'aide de la proposition 1 (resp. de la proposition 2).

Dans le cas où $\sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n^d < q_0$, on se ramène au cas précédent en majorant $\sum_{n=m+1}^{N} \varepsilon_n^d$ par $\sum_{n=m+1}^{N'} \varepsilon_n^d$ où N' est le plus petit entier tel que $\sum_{n=m+1}^{N'} \varepsilon_n^d \geq q_0$.

3. Démonstration de la proposition 1.

Posons $M - m = Kq$. On a

$$\sum_{n=m+1}^{M} \mu_d(I_m \cap I_n) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{n=m+kq+1}^{(k+1)q} \mu_d(I_m \cap I_n) .$$

Il est alors facile de voir [10] que la proposition 1 résulte du lemme suivant.

LEMME 1. - Soit q un élément de la suite (q_k) , et soit m et H des entiers tels que $0 \leq m \leq H$. Alors, si ρ désigne un nombre réel tel que $0 < \rho < \varepsilon_{H+1}$, on a :

$$\sum_{n=H+1}^{H+q} \mu_d(I_m \cap I_n) \leq q \varepsilon_m^d \varepsilon_{H+1}^d + O((\rho^{-1} q^{1-1/d} + \rho^{-d}) \varepsilon_m^d \varepsilon_{H+1}^d) + O(q \rho \varepsilon_m^d \varepsilon_{H+1}^{d-1}) .$$

Preuve. - Si I est un hypercube de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$, et S un entier positif, notons $\pi(I, S)$ le nombre d'entiers s tels que $1 \leq s \leq S$ et $u_s \in I$. Comme les hypothèses (i) et (ii) du théorème montrent que la suite (u_n) est équirépartie, on a :

$$(3.1) \qquad \sum_{n=H+1}^{H+q} \mu_d(I_m \cap I_n) = \lim_{S\to+\infty} \frac{1}{S} \sum_{n=H+1}^{H+q} \pi(I_n \cap I_m, S) .$$

Et

$$(3.2) \qquad \begin{aligned} \sum_{n=H+1}^{H+q} \pi(I_n \cap I_m, S) &= \sum_{n=H+1}^{H+q} \sum_{s=1}^{S} \chi_{\varepsilon_m}(u_m, u_s)\, \chi_{\varepsilon_n}(u_n, u_s) \\ &= \sum_{s=1}^{S} \chi_{\varepsilon_m}(u_m, u_s) \sum_{n=H+1}^{H+q} \chi_{\varepsilon_n}(u_n, u_s) . \end{aligned}$$

Evaluons $\sum_{n=H+1}^{H+q} \chi_{\varepsilon_n}(u_n, u_s)$; on a, d'après l'équirépartition de (u_n),

$$\sum_{n=H+1}^{H+q} \chi_{\varepsilon_n}(u_n, u_s) \leq \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R\rho^d} \sum_{n=H+1}^{H+q} \sum_{r=1}^{R} \chi_\rho(u_r, u_n)\, \chi_{\varepsilon_n+\rho}(u_s, u_r) .$$

En effet, $\|u_r - u_s\|_d \leq \|u_r - u_n\|_d + \|u_n - u_s\|_d$. Donc

$$\left.\begin{aligned} \|u_r - u_n\|_d &< (1/2)\rho \\ \|u_s - u_n\|_d &< (1/2)\varepsilon_n \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \|u_r - u_s\| < \tfrac{1}{2}(\varepsilon_n + \rho) .$$

Donc

$$(3.3) \qquad \sum_{n=H+1}^{H+q} \chi_{\varepsilon_n}(u_n, u_s) \leq \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R\rho^d} \sum_{r=1}^{R} \sum_{n=H+1}^{H+q} \chi_\rho(u_r, u_n)\, \chi_{\varepsilon_n+\rho}(u_s, u_r) .$$

Evaluons $\sum_{n=H+1}^{H+q} \chi_\rho(u_r, u_n)\, \chi_{\varepsilon_n+\rho}(u_s, u_r)$; pour cela remarquons que, d'après l'hypothèse (ii),

$$\sum_{n=H+1}^{H+q} \chi_\rho(u_r, u_n) = q\rho^d + O(q^{1-1/d} \rho^{d-1}) + O(1)$$

et que d'autre part $n \longmapsto \chi_{\varepsilon_n+\rho}(u_s, u_r)$ est une fonction décroissante. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sum_{n=H+1}^{H+q} \chi_\rho(u_s, u_n)\, \chi_{\varepsilon_n+\rho}(u_s, u_r) \leq{}& q\rho^d \chi_{\varepsilon_{H+1}+\rho}(u_s, u_r) \\ &+ O((q^{1-1/d} \rho^{d-1} + 1)\, \chi_{\varepsilon_{H+1}+\rho}(u_s, u_r)) . \end{aligned}$$

Cette dernière relation, combinée avec (3.3), (3.2) et (3.1) donne la formule cherchée.

4. Démonstration de la proposition 2.

Pour les mêmes raisons que précédemment, la proposition 3 découle du lemme suivant.

LEMME 2. - Soient H et m des entiers tels que $0 \leq m \leq H$, et t un nombre réel vérifiant $\varepsilon_m \geq t \geq \varepsilon_{H+1}$. Alors, si q désigne un élément de la suite (q_k),

$$\sum_{n=H+1}^{H+q} \mu_d(I_m \cap I_n) \leq q\varepsilon_m^d \varepsilon_{H+1}^d + O((q^{1-1/d} + q^t)\, \varepsilon_m^{d-1} \varepsilon_{H+1}^d) + O(\varepsilon_{H+1}^d) .$$

Preuve. - On a

$$\sum_{n=H+1}^{H+q} \mu_d(I_m \cap I_n) \leqslant \sum_{n=H+1}^{H+q} \varepsilon_n^d \, \chi_{\varepsilon_m+t}(u_m , u_n)$$

$$\leqslant \varepsilon_{H+1}^d \sum_{n=H+1}^{H+q} \chi_{\varepsilon_n+t}(u_m , u_n)$$

et d'après l'hypothèse (ii)

$$\sum_{n=H+1}^{H+q} \chi_{\varepsilon_m+t}(u_m , u_n) = q(\varepsilon_m + t)^d + O(q^{1-1/d}(\varepsilon_m + t)^{d-1}) + O(1)$$

d'où la formule cherchée.

5. Problèmes non résolus.

On peut chercher d'autres exemples de suites fortement-eutaxiques, en particulier parmi celles de la forme $(P(n)\alpha)$, P étant un polynôme à coefficients entiers, ou encore parmi les suites d'éléments de $\underline{R}/\underline{Z}$ qui s'écrivent (θ^n) (modulo 1) , θ étant un nombre réel, $\theta > 1$.

On peut d'ailleurs chercher s'il existe "beaucoup" de suites fortement eutaxiques, par exemple mesurer l'ensemble des suites d'éléments de $(\underline{R}/\underline{Z})^d$ qui sont fortement eutaxiques (pour la mesure de Haar du groupe compact $((\underline{R}/\underline{Z})^d)^{\underline{N}}$) . Le fait que les suites $(n\alpha)$ ne sont fortement eutaxique que pour μ_d-presque aucun α ne donne que peu de renseignement sur ce problème puisqu'elles sont donc eutaxiques pour μ_d-presque aucun α , mais que presque toute suite d'éléments de $(\underline{R}/\underline{Z})^d$ est eutaxique (relativement à la mesure de Haar de $((\underline{R}/\underline{Z})^d)^{\underline{N}}$) [9].

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADAMS (W. W.). - Simultaneous asymptotic diophantine approximations, Mathematika, London, t. 14, 1967, p. 173-180.

[2] ERDÖS (P.). - Some results on diophantine approximation, Acta Arith., Warszawa, t. 5, 1959, p. 359-369.

[3] KESTEN (H.). - On a conjecture of Erdös and Szüsz related to uniform distribution mod 1 , Acta Arith., Warszawa, t. 12, 1966, p. 193-212.

[4] LESCA (J.). - Sur les approximations diophantiennes à une dimension, Thèse Sc. math., Grenoble, 1968.

[5] LESCA (J.). - Sur la répartition modulo 1 de la suite $(n\alpha)$, Acta Arith., Warszawa, t. 20, 1972, p. 345-352.

[6] LEVEQUE (W. J.). - On the frequency of small fractional parts in certain real sequences, III, J. für reine und angew. Math., t. 202, 1959, p. 215-220.

[7] de MATHAN (B.). - Approximations diophantiennes dans un corps local, Bull. Soc. math. France, Mémoire 21, 1970, 90 p. (Thèse Sc. math, Caen, 1968).

[8] de MATHAN (B.). - Un problème métrique d'approximation diophantienne, Bull. Soc. math. France, t. 99, 1971, p. 369-385.

[9] REVERSAT (M.). - Approximations diophantiennes par les éléments de certaines suites, Thèse 3e cycle, Math., Bordeaux, 1973 ; et : Approximations diophantiennes et eutaxie (à paraître).

[10] REVERSAT (M.). - Un problème métrique d'approximations diophantiennes non homogènes (à paraître).

[11] SCHMIDT (W. M.). - A metrical theorem in diophantine approximation, Canad. J. Math., t. 12, 1960, p. 619-631.

(Texte reçu le 17 mars 1975)

Marc REVERSAT
Centre de Math. de l'Ecole Polytechnique
17 rue Descartes
75230 PARIS CEDEX 05