Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

MARTINE PATHIAUX

Sur le produit des conjugués d'un nombre algébrique situés à l'extérieur du disque unité

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 15, nº 2 (1973-1974), exp. nº G6, p. G1-G3

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_2_A4_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de théorie des nombres)
15e année, 1973/74, n° G6, 3 p.

10 décembre 1973

SUR LE PRODUIT DES CONJUGUÉS D'UN NOMBRE ALGÉBRIQUE SITUÉS À L'EXTÉRIEUR DU DISQUE UNITÉ

par Martine PATHIAUX

Soit $\theta_0 = 1,32\ldots$ la racine réelle de l'équation $\theta^3 - \theta - 1 = 0$ (c'est-à-dire le plus petit nombre de Pisot) ; SMYTH [2] a démontré :

THÉORÈME 1. - Soient $P(z)$ un polynôme irréductible de $\underset{\sim}{Z}[x]$, non réciproque et θ_i les zéros de $P(z)$, alors

$$\prod_{|\theta_i|>1} |\theta_i| \geqslant \theta_0 .$$

Je me propose, en utilisant des méthodes analogues, de généraliser, en un certain sens, ce résultat.

THÉORÈME 2. - Soient q un entier rationnel positif et $P(z) = qz^s + \ldots + q_0$ un polynôme de $\underset{\sim}{Z}[x]$, irréductible, non réciproque tel que $|q_0| \geqslant q$. Si $\theta_1, \ldots, \theta_s$ désignent les zéros de $P(z)$ alors

$$\prod_{|\theta_i|>1} |\theta_i| \geqslant \frac{1}{4q}\left(1 + \sqrt{1 + 16q^2}\right) .$$

Remarque. - Si $P(z)$ vérifie les hypothèses du théorème 2, $P(z)$ n'a pas de zéros dans le cercle $|z| = 1$. En effet, s'il en avait un, θ, de module 1, $\overline{\theta} = 1/\theta$ serait zéro de $P(z)$ et de son polynôme réciproque, ce qui est impossible puisque $P(z)$ est irréductible et non réciproque.

La démonstration repose sur le lemme suivant (voir Smyth).

LEMME 1. - Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n \in \underset{\sim}{R}$, une fonction holomorphe dans $|z| \leqslant 1$, vérifiant $|f(z)| \leqslant 1$ sur $|z| = 1$, alors

$$|a_n| \leqslant 1 - a_0^2 ,$$

$$-\left(1 - a_0^2 - \frac{a_n^2}{1 + a_0}\right) \leqslant a_{2n} \leqslant 1 - a_0^2 - \frac{a_n^2}{1 - a_0} .$$

Notations. - Appelons $Q(z)$ le polynôme réciproque de $P(z)$ (resp. l'opposé du polynôme réciproque de $P(z)$) si $q_0 > 0$ (resp. si $q_0 < 0$) et posons

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = (\pm qz^s + \ldots + |q_0|)/(q + q_{s-1} z + \ldots + q_0 z^s) = u_0 + u_k z^k + u_\ell z^\ell + \ldots , \quad u_k \neq 0 ,$$

$$g(z) = \varepsilon \prod_{|\theta_i|>1} \left(\frac{1-\theta_i z}{\theta_i - z}\right) = d_0 + d_1 z + \ldots \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \pm 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon \prod_{|\theta_i|>1} |\theta_i| > 0 ,$$

$$f(z) = g(z) \frac{P(z)}{Q(z)} = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

et

$$t = \prod_{|\theta_i|>1} |\theta_i| .$$

$f(z)$ et $g(z)$ sont holomorphes dans $|z| \leq 1$ et vérifient les hypothèses figurant dans le lemme 1.

LEMME 2. - <u>Si</u> $t < 1 + 1/q$ <u>alors</u> $u_0 = 1$.

Il suffit d'appliquer le principe du maximum à $f(z)$. On a $|u_0/t| \leq 1$ soit $|q_0| < q(1 + 1/q) = q + 1$, et alors $q \leq |q_0| < q + 1$ et donc $|q_0| = q$ et $u_0 = 1$.

<u>Démonstration du théorème</u> 2. - Supposons donc que $t < 1 + 1/q$; on a alors les identités

$$(1) \qquad \begin{aligned} &d_0 = c_0 = 1/t ,\\ &d_1 = c_1 ,\\ &\dots\\ &d_{k-1} = c_{k-1} ,\\ &d_k + d_0\, u_k = c_k . \end{aligned}$$

$$(2) \qquad \begin{aligned} &q = q_0 ,\\ &q_1 = q_{s-1} ,\\ &\dots\\ &q_{k-1} = q_{s-k} ,\\ &qu_k + q_{s-k} = q_k . \end{aligned}$$

D'après l'égalité (1) et le lemme 1, on a

$$|d_k + \frac{1}{t} u_k| \leq 1 - \frac{1}{t^2} \quad \text{et} \quad |d_k| \leq 1 - \frac{1}{t^2} ,$$

soit

$$(3) \qquad |u_k| \leq 2(t - \frac{1}{t}) .$$

Mais $qu_k \in \underline{Z}^*$ d'après les égalités (2). Donc $|u_k| \geq 1/q$, d'où l'on déduit $1/q \leq 2(t - 1/t)$, soit

$$t \geq \frac{1}{4q} (1 + \sqrt{1 + 16q^2}) .$$

En utilisant la deuxième inégalité du lemme 1, on peut améliorer la constante $(1/4q)(1 + \sqrt{1 + 16q^2})$ mais on n'aboutit pas au résultat

$$\prod_{|\theta_i|>1} |\theta_i| \geq \theta_q ,$$

où θ_q désigne le zéro de module > 1 du polynôme $qz^3 + (q - 1)z^2 - z - q$ c'est-à-dire le plus petit nombre de S_q (PISOT [1]). Par contre, on peut démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 3. - Soit $P(z) = qz^s + \dots + q_0$ un polynôme de $\mathbb{Z}[x]$, irréductible, non réciproque, tel que $|q_0| > q$, ayant au plus deux zéros dans $|z| > 1$, et ceux-ci étant réels et de même signe, alors

$$\prod_{|\theta_i|>1} |\theta_i| \geq \theta_q .$$

On applique la deuxième inégalité du lemme 1 à la fonction f ; et de l'égalité $d_2 = 1 - d_0^2 - d_1/(1 - 1/t)$, on déduit

$$(5)\qquad -2\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) + 2\frac{d_1^2}{1-1/t^2} - d_1 u_1 \frac{(t-1)}{t+1} + \frac{u_1^2}{t(t+1)} \leq \frac{u_2}{t} \leq -u_1 d_1 \frac{(1+t)}{t-1} - \frac{u_1^2}{t(t-1)} .$$

On résoud cette inégalité sachant que qu_1 et $q^2 u_2$ sont des entiers rationnels si $u_1 \neq 0$ et $qu_2 \in \mathbb{Z}^*$ si $u_1 = 0$ puisque $P(z)/Q(z)$ a au plus deux pôles dans $|z| < 1$.

On en déduit que $t > \theta_q$ en utilisant l'inégalité $|d_1| > 2/\sqrt{t}\,(1 - 1/t)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] PISOT (Charles). - Familles compactes de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 81, 1964, p. 165-188.

[2] SMYTH (C. J.). - On the product of the conjugates outside. The unit circle of an algebraic integer, Bull. London math. Soc., t. 3, 1971, p. 169-175.

(Texte reçu le 14 octobre 1974)

Martine PATHIAUX
Avenue de Paris
78470 St REMY les CHEVREUSE.