

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

MAURICE MIGNOTTE

Amélioration effective du théorème de Liouville

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 15, n° 2 (1973-1974),
exp. n° G4, p. G1-G5

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_2_A3_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

AMÉLIORATION EFFECTIVE DU THÉOREME DE LIOUVILLE

par Maurice MIGNOTTE

(d'après BAKER et FEL'DMAN)

1. Introduction.

En 1844, J. LIOUVILLE a montré que, pour tout nombre algébrique α de degré $n > 1$, il existe une constante $c = c(\alpha)$, calculable, telle que, pour tout nombre rationnel p/q , $(p, q) = 1$ et $q > 0$, on ait

$$(1) \quad \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > cq^{-n}.$$

Cette inégalité fut ensuite améliorée, en particulier, par A. THUE, C. L. SIEGEL et K. F. ROTH qui remplacèrent l'exposant n par certains exposants $n' < n$, mais leur méthode ne permettait pas de calculer effectivement la valeur de la constante c correspondante.

Le premier à améliorer l'inégalité (1), tout en conservant un résultat effectif, fut A. BAKER [1]. Actuellement, le meilleur résultat est le suivant.

THÉOREME 1 (FEL'DMAN [3]). - Soit α un nombre algébrique de degré $n \geq 3$. Il existe des constantes positives effectives ε et C , ne dépendant que de α , telles que, pour tout nombre rationnel p/q irréductible, $q > 0$, on ait l'inégalité

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > Cq^{\varepsilon-n}.$$

La démonstration utilise la méthode de Baker, BAKER en a donné une autre démonstration en [2].

Nous nous proposons uniquement de montrer comment les minoration de BAKER sur les formes linéaires du type

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \dots + \beta_m \log \alpha_m,$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ et β_1, \dots, β_m sont algébriques, ont permis d'obtenir des théorèmes sur l'approximation diophantienne des nombres rationnels.

2. Une première réduction.

Il y a un lien très simple entre les améliorations effectives de l'inégalité 1 et la majoration des solutions entières x, y d'équations diophantiennes du type

$$(2) \quad f(x, y) = m,$$

où f est une forme irréductible binaire à coefficients entiers de degré $n \geq 3$, et où m est un entier positif.

PROPOSITION 1. - Soit $\varphi : [1, \infty[\rightarrow [a, \infty[$, une fonction croissante. Considérons les assertions

(i) Si x et y sont solutions de (2), alors on a la majoration

$$\max(|x|, |y|) < \varphi(m).$$

(ii) Si α est solution de l'équation $f(\alpha, 1) = 0$, et si ψ désigne la fonction réciproque de la fonction φ , alors il existe une constante c_1 , qui ne dépend que de α , effective, telle que, pour tout couple p, q d'entiers, $(p, q) = 1$, $q > 0$, on ait l'inégalité

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > c_1 q^{-n} \psi(\max(|p|, |q|)).$$

Alors, (i) implique (ii).

Démonstration. - Soit α un nombre algébrique de degré $n \geq 3$ et de dénominateur d . Posons

$$f(X, Y) = d^n \text{Norme}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(X - \alpha Y).$$

Alors, f est bien une forme irréductible à coefficients entiers de degré ≥ 3 , et $f(\alpha, 1) = 0$.

Soit alors, p/q un nombre rationnel irréductible, $q > 0$ tel que l'on ait

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{\delta}{2},$$

où δ désigne le minimum du module de la différence entre deux conjugués de α distincts.

On a alors clairement

$$\begin{aligned} \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| &> d^{-n} (2\delta^{-1})^{n-1} q^{-n} f(p, q) \\ &> d^{-n} (2\delta^{-1})^{n-1} q^{-n} \psi(\max(|p|, |q|)) \quad (\text{d'après (i)}). \end{aligned}$$

D'où le résultat annoncé.

3. Formes linéaires en logarithmes de nombres algébriques et équations diophantiniennes.

Soit $f(X, Y)$ une forme binaire irréductible à coefficients entiers. Nous allons montrer qu'à une solution de l'équation

$$(2) \quad f(x, y) = m \quad (m \text{ entier})$$

correspond une forme linéaire à coefficients entiers en logarithmes de certains nombres algébriques qui prend une valeur très petite.

Il est facile de voir qu'on peut se ramener à l'étude des formes f dont le coefficient de x^n est égal à 1.

Soit alors α une racine de l'équation $f(X, 1) = 0$. On désignera par $\alpha^{(1)} = \alpha, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(n)}$ les conjugués de α .

Ainsi,

$$f(X, Y) = (X - \alpha^{(1)} Y) \dots (X - \alpha^{(n)} Y) .$$

Soit $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. On supposera les $\alpha^{(i)}$ ordonnés de telle sorte que $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(s)}$ sont réels, et $\alpha^{(s+1)}, \dots, \alpha^{(s+t)}$ sont les conjugués respectifs de $\alpha^{(s+1+t)}, \dots, \alpha^{(n)}$; de sorte que $n = s + 2t$. D'où un plongement

$$\xi \mapsto (\sigma_1(\xi), \dots, \sigma_r(\xi)) \text{ de } K \text{ dans } \mathbb{R}^s \times \mathbb{C}^t$$

et un homomorphisme

$$\xi \mapsto L(\xi) = (\log|\sigma_1(\xi)|, \dots, \log|\sigma_r(\xi)|) \text{ de } K^\times \text{ dans } \mathbb{R}^r .$$

Posons $n_j = 1$ pour $j = 1, \dots, s$, et 2 pour $j = s+1, \dots, s+t$. On définit les valuations archimédiennes de K , $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_r$ par $|\xi|_{\mathcal{R}_j} = |\sigma_j(\xi)|$. Si on pose enfin $\beta = x - \alpha y$, où x et y sont solutions de (2), on a

$$(3) \quad \sum_{j=1}^r n_j \log(\varphi^{-1} |\beta|_{\mathcal{R}_j}) = 0 .$$

Autrement dit, le point $(\varphi^{-1} |\beta|_{\mathcal{R}_1}, \dots, \varphi^{-1} |\beta|_{\mathcal{R}_r})$ de \mathbb{R}^r appartient à l'hyperplan W d'équation

$$\sum_{j=1}^r n_j w_j = 0 .$$

Mais on sait, d'autre part, que l'image par L du groupe des unités de K constitue un réseau T dans l'hyperplan W . On peut déterminer explicitement des unités $\eta_1, \dots, \eta_{r-1}$ de K telles que $L(\eta_1), \dots, L(\eta_{r-1})$ constituent une base du \mathbb{Z} -module T . On peut, de plus, calculer effectivement des constantes c_1 et c_2 telles que

$$|\eta_i|_{\mathcal{R}_j} \leq c_1, \quad 1 \leq i \leq r-1, \quad j = 1, \dots, r$$

$$\Delta = |\det(L(\eta_1), \dots, L(\eta_{r-1}))| \geq c_2 \quad (\text{régulateur de } K)$$

(voir SIEGEL [4]).

Puisque T constitue un réseau dans W , on peut trouver des entiers b_1, \dots, b_{r-1} tels que, si on pose, $\gamma = \beta \eta_1^{b_1} \dots \eta_{r-1}^{b_{r-1}}$, on a

$$(4) \quad \log(\varphi^{-1} |\gamma|_{\mathcal{R}_j}) \leq c_3 \quad (1 \leq j \leq r) .$$

Posons $H = \max_{1 \leq i \leq r-1} |b_i|$. De la définition de γ , il est clair que

$$\log|\beta/\gamma|_{\mathcal{R}_j} = -b_1 \log|\eta_1|_{\mathcal{R}_j} - \dots - b_{r-1} \log|\eta_{r-1}|_{\mathcal{R}_j} \quad (1 \leq j \leq r-1),$$

en résolvant ces équations on obtient l'existence d'une constante c_4 telle que

$$\max_{1 \leq j \leq r-1} |\log|\beta/\gamma|_{\mathcal{R}_j}| \geq c_4 H .$$

Soit J tel que ce maximum soit atteint pour $j = J$. Alors

$$|\log(\varphi^{-1} |\beta|_{\mathcal{R}_J})| \geq |\log|\beta/\gamma|_{\mathcal{R}_J}| - |\log|\varphi^{-1} |\gamma|_{\mathcal{R}_J}| \geq c_4 H - c_3 .$$

Cette inégalité, jointe à (3), prouve l'existence d'un indice j tel que

$$\log(\varphi^{-1} |\beta^{(j)}|) \leq - (C_4 H - C_3)/(n-1) .$$

Ceci implique en particulier que $|\beta^{(j)}| \leq e^{C_3/(n-1)} \varphi$, il existe donc, d'après (3), un indice k tel que

$$|\beta^{(k)}| \geq C_5 \varphi .$$

Pour H assez grand, on a $k \neq j$. Soit maintenant h un indice quelconque différent de k et de j ; un tel indice existe puisque $n \geq 3$. De la définition de β , $\beta = x - \alpha y$, on déduit

$$\begin{vmatrix} \beta^{(j)} & 1 & \alpha^{(j)} \\ \beta^{(k)} & 1 & \alpha^{(k)} \\ \beta^{(h)} & 1 & \alpha^{(h)} \end{vmatrix} = 0 .$$

Ce qui s'écrit

$$(\alpha^{(k)} - \alpha^{(j)})\beta^{(h)} - (\alpha^{(h)} - \alpha^{(j)})\beta^{(k)} = (\alpha^{(k)} - \alpha^{(h)})\beta^{(j)} .$$

Cette inégalité, multipliée par $\gamma^{(k)}/((\alpha^{(k)} - \alpha^{(j)})\beta^{(k)} \gamma^{(h)})$, prend la forme

$$(5) \quad \alpha_1^{b_1} \cdots \alpha_{r-1}^{b_{r-1}} - \alpha_r = \omega$$

où

$$\omega = \frac{(\alpha^{(k)} - \alpha^{(h)})\beta^{(j)} \gamma^{(k)}}{(\alpha^{(k)} - \alpha^{(j)})\beta^{(k)} \gamma^{(h)}}, \quad \alpha_r = \frac{(\alpha^{(h)} - \alpha^{(j)})\gamma^{(k)}}{(\alpha^{(k)} - \alpha^{(j)})\gamma^{(h)}}, \quad \alpha_g = \frac{\eta_g^{(k)}}{\eta_g^{(h)}} \quad (1 \leq g \leq r-1) .$$

On voit facilement que ω vérifie des inégalités du type

$$0 < |\omega| < C_6 e^{-C_7 H} .$$

Notons enfin que les nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}$ sont algébriques de degré $\leq n^2$, de hauteur majorée par C_8 tandis que α_r a un degré au plus égal à n^3 et une hauteur $\leq C_9 |m|^n$. Si on pose $\alpha_0 = -1$ et $\log \alpha_0 = i\pi$, de (5) on déduit facilement l'existence d'un entier b_0 , $|b_0| \leq C_{10} H$ tel que

$$(6) \quad |b_0 \log \alpha_0 + b_1 \log \alpha_1 + \dots + b_{r-1} \log \alpha_{r-1} - \log \alpha_r| < C_{11} e^{-C_{12} H} .$$

4. Un théorème sur les formes linéaires en logarithmes de nombres algébriques.

THÉORÈME 2 (BAKER [2]). - Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des nombres algébriques non nuls de degré au plus d , Supposons les hauteurs de $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ et α_n majorées par A' et A (≥ 2) respectivement. Alors, si pour un certain $\varepsilon > 0$, il existe des entiers rationnels b_1, \dots, b_{n-1} de module au plus égal à B tels que

$$0 < |b_n \log \alpha_1 + \dots + b_{n-1} \log \alpha_{n-1} - \log \alpha_n| < e^{-\varepsilon B} ,$$

alors $B < C \log A$ pour une constante effectivement calculable $C = C(n, d, A', \varepsilon)$.

5. Conclusion.

De l'étude du paragraphe 3 et du théorème 2, résulte l'existence d'une constante C_{13} effective telle que

$$H \leq C_{13} \log A, \text{ avec } A = C_9 |m|^n.$$

De la majoration évidente

$$\max_{1 \leq j \leq n} |\beta^{(j)}| \leq \exp(C_{14} H + C_3)$$

et des identités

$$x = (\alpha^{(h)} \beta^{(j)} - \alpha^{(j)} \beta^{(h)}) / (\alpha^{(h)} - \alpha^{(j)}), \quad y = (\beta^{(j)} - \beta^{(h)}) / (\alpha^{(h)} - \alpha^{(i)}),$$

on déduit l'inégalité

$$\max(|x|, |y|) \leq |m|^{C_{15}}.$$

Le théorème 1 résulte alors de la proposition 1.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAKER (A.). - Contributions to the theory of diophantine equations, Philos. Trans. Royal Soc. London, t. 263, 1969, Série A, p. 173-208.
- [2] BAKER (A.). - A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms, II, Acta Arithm., Warszawa, t. 24, 1973, p. 33-36.
- [3] FEL'DMAN (N. I.). - An effective refinement of the exponent in Liouville's theorem, Math. USSR Izvestija, t. 5, 1971, p. 985-100 ; [en russe], Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., t. 35, 1971, p. 973-990.
- [4] SIEGEL (C. L.). - Abschätzung von Einheiten, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II. Math.-Phys., Kl., 1969, p. 71-86.

(Texte reçu le 12 novembre 1973)

Maurice MIGNOTTE
 Département de Mathématiques
 Centre scientifique et polytechnique
 Place du 8 mai 1945
 93206 SAINT DENIS
