

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

DANIEL BARSKY

Introduction aux mesures p -adiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 15, n° 2 (1973-1974),
exp. n° G2, p. G1-G3

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_2_A1_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INTRODUCTION AUX MESURES p -ADIQUES

par Daniel BARSKY

On développe quelques calculs qui seront utiles pour l'exposé mesures p -adiques à densité [2].

0. Notations.

K est un corps local, A son anneau des entiers, \mathfrak{m} l'idéal maximal de A , $\mathfrak{k} = A/\mathfrak{m}$ le corps résiduel de A , de cardinal $q = p^f$. La valuation $v(\cdot)$ et la valeur absolue $|\cdot|$ de K sont normalisées par $v(\pi) = 1$ et $|\pi| = q^{-1}$, où π est une uniformisante locale de K ($\pi \in \mathfrak{m}$, $\pi \notin \mathfrak{m}^2$). On note $\mathcal{C}(A, K) = \mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues de A dans K munie de la norme de la convergence uniforme sur A , notée $\|f\| = \sup_{x \in A} |f(x)|$. On note $\mathcal{C}'(A, K) = \mathcal{C}'$ le dual de \mathcal{C} muni de la norme habituelle : si $\mu \in \mathcal{C}'$,

$$\|\mu\| = \sup_{f \neq 0} \frac{|\langle \mu, f \rangle|}{\|f\|}.$$

On note, si $n \in \mathbb{Z}$, $v_q(n)$ l'exposant de la plus haute puissance de q qui divise n .

1. Mesures p -adiques.

DÉFINITION 1. - Une mesure p -adique est un élément du dual \mathcal{C}' de \mathcal{C} .

On sait [4] que \mathcal{C} admet des bases normales, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{C} telle que toute fonction $f \in \mathcal{C}$ peut s'écrire de manière unique :

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n f_n(x) \text{ avec } \|f\| = \sup_{n \geq 0} |a_n| \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

En particulier, on sait [1] que \mathcal{C} admet des bases normales polynomiales et aussi [3] que \mathcal{C} admet des bases normales formées d'idempotents, c'est-à-dire constituées de fonctions caractéristiques de boules.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base normale de \mathcal{C} , soit $(f_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'éléments de \mathcal{C}' tels que $\langle f_n^*, f_m \rangle = \delta_{n,m}$. Il est clair alors que $\mu \in \mathcal{C}'$ implique qu'il existe une suite bornée $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de K telle que

$$\mu = \sum_{n \geq 0} b_n f_n^*, \quad \|\mu\| = \sup_{n \geq 0} |b_n|$$

la série du second membre convergeant faiblement vers μ .

Nous allons maintenant particulariser les résultats précédents.

Soit $U = (u_0, u_1, \dots)$ une suite très bien répartie bien ordonnée de A [1], c'est-à-dire que $v(u_i - u_j) = v_q(i - j)$ pour tous les couples $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Soit φ_n la fonction caractéristique de la boule $\mathcal{B}(u_n, \ell(n) + 1)$ de centre u_n et de rayon $q^{-(\ell(n)+1)}$ ($\ell(n) = \lceil \frac{\log n}{\log q} \rceil$). Nous allons montrer que la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base normale de \mathbb{C} . Soit $\psi_{n,h}$ la fonction caractéristique de la boule $\mathcal{B}(u_n, h)$ et soit $\varphi_{x,h}$ la fonction caractéristique de la boule $\mathcal{B}(x, h)$.

LEMME 1. - Si $0 \leq n < q^h$, on a

$$(1) \quad \psi_{n,h} = \varphi_n - \sum_{\substack{h > q \\ k > n}} \sum_{i=1}^{q-1} \varphi_{n+iq^k}.$$

En effet, on remarque que, si $h = \ell(n) + 1$, $\psi_{n,h} = \varphi_n$; si $h = \ell(n) + 2$, alors il est immédiat que

$$\mathcal{B}(u_n, \ell(n) + 2) = \mathcal{B}(u_n, \ell(n) + 1) - \bigcup_{i=1}^{q-1} \mathcal{B}(u_{n+iq}, \ell(n) + 1, \ell(n) + 2).$$

On achève la démonstration par récurrence sur h .

La formule (1) montre que, inversement, φ_n est combinaison linéaire de $\psi_{j, \ell(n)+1}$, car la matrice est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale.

LEMME 2. - Si $f(x) = \sum_{n=0}^{q^h-1} f(u_n) \psi_{n,h}(x)$ est une fonction constante sur les boules de rayon q^{-h} , alors :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{q^h-1} a_n \varphi_n(x)$$

avec

$$(2) \quad a_n = f(u_n) - f(u_{\substack{n-n_{\ell(n)} \\ q^{\ell(n)}}}) \quad \text{où } n = n_0 + n_1 q + \dots + n_{\ell(n)} q^{\ell(n)}.$$

Remarquons que $\varphi_n(u_i) = 0$ si $0 \leq i < n$, et $\varphi_n(u_n) = 1$. On a

$$f(u_n) = a_0 + a_{n_0} + a_{n_0+n_1q} + \dots + a_{n_0+n_1q+\dots+n_{\ell(n)-1}q^{\ell(n)-1}} + a_n.$$

En effet, $\varphi_k(u_n) \neq 0$ si $v(u_n - u_k) \geq \ell(k) + 1$, donc $\varphi_0(u_n) = 1$; si $1 \leq k < q$,

$\varphi_{n_0}(u_n) = 1$ et $\varphi_k(u_n) = 0$ si $k \neq n_0$; plus généralement, si $q^i \leq k < q^{i+1}$

$$\varphi_{n_0+n_1q+\dots+n_iq^i}(u_n) = 1,$$

et

$$\varphi_k(u_n) = 0 \quad \text{si } k \neq n_0 + n_1 q + \dots + n_i q^i.$$

Donc

$$f(u_n) - f(u_{\substack{n-n_{\ell(n)} \\ q^{\ell(n)}}}) = a_n.$$

Donc si $f \in \mathbb{C}(A, K)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ et

$$\sum_{n \geq 0} a_n \varphi_n(u_k) = f(u_k),$$

donc $f \in \mathbb{C}$ est entièrement déterminée par les $(a_n)_{n \geq 0}$, car U est dense dans A .

PROPOSITION 1. - Soit $U = \{u_0, u_1, \dots\}$ une suite très bien répartie bien ordonnée de A , et soit φ_n la fonction caractéristique de la boule $B(u_n, \ell(n)+1)$. Les fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment une base normale de $C(A, K)$. Si $f \in C(A, K)$, $f = \sum_{n \geq 0} a_n \varphi_n$, $\lim a_n = 0$ et

$$a_n = f(u_n) - f(u_{n-n_{\ell(n)} q^{\ell(n)}}),$$

où $n = n_0 + n_1 q + \dots + n_{\ell(n)} q^{\ell(n)}$.

Soit φ_n^* l'élément du dual $C'(A, K)$ de $C(A, K)$ tel que $\langle \varphi_n^* | \varphi_m \rangle = \delta_{n,m}$. Toute mesure μ sur A est la limite faible de la série

$$\sum_{n \geq 0} b_n \varphi_n^* \text{ avec } b_n = \langle \mu | \varphi_n \rangle.$$

DÉFINITION 2. - Soit $U = \{u_0, u_1, \dots\}$ une suite très bien répartie bien ordonnée de A . La meilleure suite convergeant vers $x \in A$, extraite de la suite U , est définie par

$$h \rightarrow u_{h(x)} \text{ avec } |x - u_{h(x)}| \leq q^{-h} \text{ et } 0 \leq h(x) < q^h.$$

Remarquons que $\varphi_{x,h} = \varphi_{u_{h(x)},h} = \psi_{h(x),h}$ et si $f \in C(A, K)$, $f = \sum_{n \geq 0} a_n \varphi_n$, on a

$$\sum_{n=0}^{q^h-1} a_n \varphi_n(x) = f(u_{h(x)}).$$

PROPOSITION 2. - Soit U une suite très bien répartie bien ordonnée de A , soit $x \in A$, et soit $(u_{h(x)})_{h \geq 0}$ la meilleure suite convergeant vers x , extraite de U . On a, si $\mu \in C'$ et $\mu = \sum_{n \geq 0} b_n \varphi_n^*$,

$$(3) \quad \langle \mu | \psi_{x,h} \rangle = b_{h(x)} - \sum_{\substack{h > q^k \\ k > h(x)}} \sum_{i=1}^{q-1} b_{h(x)+iq^k}.$$

Ce résultat est immédiat à partir du lemme 1.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMICE (Y.). - Interpolation p -adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-180 (Thèse Sc. math. Paris, 1964).
- [2] BARSKY (D.). - Mesures p -adiques à densité, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 15e année, 1973/74, n° 4.
- [3] PUT (M. van der). - Algèbres de fonctions continues p -adiques, Proc. Kon. Nederl. Akad. V. Wetensch., t. 71, 1968, Série A, p. 401-420.
- [4] SERRE (J.-P.). - Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p -adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, n° 12, p. 69-85).

(Texte reçu le 29 octobre 1973)