Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Alain Durand

Une nouvelle classification des nombres complexes selon K. Mahler

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 15, nº 2 (1973-1974), exp. nº G17, p. G1-G6
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_2_A12_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de Théorie des nombres)
15e année, 1973/74, n° G17, 6 p.

10 juin 1974

UNE NOUVELLE CLASSIFICATION DES NOMBRES COMPLEXES SELON K. MAHLER

par Alain DURAND

Depuis le début de ce siècle, de nombreux auteurs ont proposé diverses classifications de l'ensemble $\underset{\sim}{C}$ des nombres complexes (pour l'historique de cette question, se reporter par exemple à [1], p. 60-61). Parmi ces dernières figurent celles proposées par MAHLER : la première, désormais classique, date de 1931, et répartit les nombres complexes en quatre classes A , S , T , U (une étude détaillée de cette classification peut être trouvée dans le livre de SCHNEIDER [4]) ; la seconde, qui date de 1971 [3], est celle exposée dans ce papier.

1. Fonction ordre d'un nombre complexe et classification de $\underset{\sim}{C}$.

Etant donné un polynôme $P \in \underset{\sim}{C}[X]$,

$$P(X) = p_N X^N + \ldots + p_0 \quad \text{avec} \quad p_N \neq 0 ,$$

on note

$$\partial(P) = N , \quad H(P) = \sup_{0 \leq k \leq N} |p_k| , \quad L(P) = \sum_{0 \leq k \leq N} |p_k| \quad \text{et} \quad \Lambda(P) = 2^{\partial(P)} L(P) .$$

Pour obtenir une partition de $\underset{\sim}{C}$, MAHLER associe tout d'abord à chaque élément θ de $\underset{\sim}{C}$ une fonction positive ou nulle non décroissante $O(u|\theta)$ de la variable entière $u \geq 1$, appelée <u>fonction ordre</u> de θ , et définie par

$$O(u|\theta) = \sup \log\{\frac{1}{|P(\theta)|}\} ,$$

la borne supérieure étant prise sur l'ensemble fini des polynômes $P(X) \not\equiv 0$ à coefficients entiers rationnels et tels que

$$\Lambda(P) \leq u , \quad P(\theta) \neq 0 .$$

Il définit ensuite une relation de préordre entre ces fonctions de la manière suivante.

Si $a(u) \geq 0$ et $b(u) \geq 0$ sont deux fonctions non décroissantes de $u \geq 1$ pour lesquelles il existe trois entiers positifs c , u_0 et Γ , tels que

$$a(u^c) \geq \Gamma . b(u) \quad \text{pour} \quad u \geq u_0 ,$$

alors on écrit

$$a(u) \gg b(u) \quad \text{ou} \quad b(u) \ll a(u) .$$

Si les relations

$$a(u) \gg b(u) \quad \text{et} \quad b(u) \gg a(u)$$

sont toutes deux vérifiées, on écrit

$$a(u) >< b(u) .$$

Il est clair que le signe $\gg$ définit une relation de préordre et le signe $><$ définit une relation d'équivalence. Si θ , $\eta \in \underset{\sim}{C}$, on écrit enfin :

$$\theta \gg \eta \quad \text{si} \quad O(u|\theta) \gg O(u|\eta) ,$$

$$\theta >< \eta \quad \text{si} \quad O(u|\theta) >< O(u|\eta) .$$

On obtient ainsi une classification de $\underset{\sim}{C}$ à partir de la relation d'équivalence $><$.

MAHLER obtient alors les résultats suivants :

$O(u|\theta) >< \log u$ si θ est algébrique, mais non entier d'un corps quadratique imaginaire.

$O(u|\theta) \gg (\log u)^2$ si θ est transcendant.

$O(u|\theta) >< O(u|\eta)$ si θ , η sont transcendants et algébriquement dépendants sur $\underset{\sim}{Q}$.

Dans les paragraphes suivants nous donnerons des démonstrations, d'ailleurs différentes de celles données par MAHLER, de ces résultats.

2. Lemmes auxiliaires.

LEMME 1. - *Soient*

$$\theta \in \underset{\sim}{C} \quad \text{et} \quad \sigma(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \theta \in \underset{\sim}{R} \\ 2 & \text{si} \quad \theta \notin \underset{\sim}{R} \end{cases} .$$

Soient N , H *des entiers positifs. Il existe alors un polynôme* $P \in \underset{\sim}{Z}[X]$, $P \not\equiv 0$ *tel que*

$$\partial(P) < N , \quad H(P) \leq H$$

et

$$|P(\theta)| \leq \exp(cN)\, H^{1-(N+1)/\sigma(\theta)} ,$$

où $c = c(\theta)$ *est une constante positive.*

Preuve. - La preuve de ce lemme repose sur le principe des tiroirs de Dirichlet. On considère les $(H + 1)^{N+1}$ nombres (distincts ou non)

$$\sum_{0\leq k\leq N} x_k\, \theta^k , \quad x_k \in \underset{\sim}{Z} , \quad 0 < x_k \leq H \quad (k = 0 , \ldots , N) .$$

1° θ *est réel*. - Puisque $x_k \geq 0$ $(k = 0 , \ldots , N)$, ces nombres sont dans un intervalle $I \subset \underset{\sim}{R}$ de longueur $(N + 1)(\theta^*)^N H$ (où $\theta^* = \sup\{1 , |\theta|\}$). Soit $n = (H + 1)^{N+1} - 1$. Divisons alors l'intervalle I en n sous-intervalles de longueur $(N + 1)(\theta^*)^N (H/n)$. Deux de ces nombres, disons y , y' , sont par suite dans le même sous-intervalle ; leur différence

$$y - y' = \sum_{k=0}^{N} (x_k - x_k')\theta^k$$

vérifie par conséquent

$$|y - y'| \leq \frac{(N + 1)(\theta^*)^N H}{n} \leq (N + 1)(\theta^*)^N H^{-N} \leq \exp(cN) H^{-N} .$$

2° θ n'est pas réel. - Les nombres précédents sont ici dans un carré $\mathcal{C} \subset \underset{\sim}{C}$ de côté $2(N + 1)(\theta^*)^N H$. Soit $n \in \underset{\sim}{N}$ tel que $n < (H + 1)^{(N+1)/2} \leq n + 1$. Divisons alors le carré $\mathcal{C}$ en n^2 carrés égaux de côté $(N + 1)(\theta^*)^N (H/n)$. Il existe donc deux nombres y et y' tels que la différence

$$y - y' = \sum_{0 \leq k \leq N} (x_k - x'_k)\theta^k$$

vérifie

$$|y-y'| \leq \sqrt{2}(N+1)(\theta^*)^N(H/n) \leq \sqrt{2}(N+1)(\theta^*)^N H^{-((N-1)/2)} \leq \exp(cN) H^{-((N-1)/2)} .$$

LEMME 2. - Soient $P_{ij}(X)$, $1 \leq i$, $j \leq n$, des polynômes à coefficients complexes, et soit $\Delta = \Delta(X)$ le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ P_{n1} & \cdots & \cdots & P_{nn} \end{vmatrix}$$

Alors

(1) $$\partial(\Delta) \leq \sum_{1 \leq j \leq n} \sup_{1 \leq i \leq n} \partial(P_{ij}) ,$$

(2) $$L(\Delta) \leq \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{1 \leq i \leq n} L(P_{ij})\right) .$$

Preuve. - La relation (1) est triviale. Pour démontrer la relation (2), on raisonne par récurrence sur n, le cas $n = 1$ étant évident.

On développe Δ suivant la première colonne. On obtient :

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} P_{k1} Q_k$$

où, par hypothèse de récurrence, Q_k vérifie

$$L(Q_k) \leq \prod_{j=2}^{n}\left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} L(P_{ij})\right) \leq \prod_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} L(P_{ij})\right) \quad (1 \leq k \leq n) .$$

On en déduit

$$L(\Delta) \leq \sum_{k=1}^{n} L(P_{k1}) L(Q_k) \leq \sup_{1 \leq k \leq n} L(Q_k) \sum_{k=1}^{n} L(P_{k1}) \leq \prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{1 \leq i \leq n} L(P_{ij})\right) .$$

LEMME 3. - Soient θ, η des nombres complexes tels que η soit algébrique sur le corps $\underset{\sim}{Q}(\theta)$. Il existe alors deux entiers positifs $k_i = k_i(\theta , \eta)$ $(i = 1,2)$ tels que, pour tout polynôme $Q \in \underset{\sim}{Z}[X]$, on ait :

$$Q(\eta) = 0 ,$$

ou

$$|Q(\eta)| > \Lambda(Q)^{-k_1} \exp(- O(\Lambda(Q)^{k_2}|\theta)) .$$

<u>Preuve</u>. - On suppose η algébrique sur $\mathbb{Q}(\theta)$. Il existe alors $P \in \mathbb{Z}[X , Y]$, $P \not\equiv 0$, tel que $P(\theta , \eta) = 0$, et tel que le polynôme $P_1(Y) = P(\theta , Y)$ soit irréductible sur $\mathbb{Q}(\theta)$.

Ecrivons $P_1(Y) = \sum_{i=0}^{p} a_i(\theta) Y^i$, où $a_i(X) \in \mathbb{Z}[X]$, $a_p(\theta) \neq 0$.

Soit $Q \in \mathbb{Z}[Y]$, $Q(Y) = \sum_{j=0}^{q} b_j Y^j$, $b_q \neq 0$.

On suppose que $Q(\eta) \neq 0$. Les constantes c_1 , c_2 , c_3 , k_1 , k_2 qui interviennent dans la suite sont des constantes qui ne dépendent que des nombres θ et η .

On considère le résultant $R(P_1 , Q)$ des polynômes P_1 et Q , c'est-à-dire le déterminant

$$R(P_1 , Q) = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{a_p(\theta)\quad a_p(\theta)\quad \vdots\quad a_p(\theta)}}^{q} \quad \overbrace{\hphantom{b_q\quad b_q\quad \vdots\quad b_q}}^{p} \\ \begin{vmatrix} a_p(\theta) & & & & b_q & & & \\ \vdots & a_p(\theta) & & & \vdots & b_q & & \\ a_0(\theta) & \vdots & \vdots & a_p(\theta) & b_0 & \vdots & \vdots & b_q \\ & a_0(\theta) & \vdots & \vdots & & b_0 & \vdots & \vdots \\ & & & a_0(\theta) & & & & b_0 \end{vmatrix} \end{array}$$

On sait alors que P_1 et Q ont une racine commune dans $\mathbb{C}$ si, et seulement si, $R(P_1 , Q) = 0$ (voir par exemple : S. LANG, Algebra [2], chap. V, §10). Comme P_1 est irréductible sur $\mathbb{Q}(\theta)$ et que $Q(\eta) \neq 0$, on a donc $R(P_1 , Q) \neq 0$.

1° <u>Minoration de</u> $|R(P_1 , Q)|$. - On peut écrire

$$R(P_1 , Q) = S(\theta) \ , \text{ où } S \in \mathbb{Z}[X] .$$

D'après le lemme 2, le polynôme $S(X)$ vérifie

$$\partial(S) \leq c_1 q = c_1 \partial(Q) ,$$
$$L(S) \leq c_2^q L(Q)^p .$$

D'où

$$\Lambda(S) \leq (2^{c_1} c_2)^{\partial(Q)} L(Q)^p < \Lambda(Q)^{k_2} .$$

Puisque $R(P_1 , Q) \neq 0$ par hypothèse, on a donc

$$|R(P_1 , Q)| \geq \exp(- O(\Lambda(Q)^{k_2} | \theta)) .$$

2° <u>Majoration de</u> $|R(P_1 , Q)|$. - On distingue deux cas.

(a) On suppose $|\eta| \leq 1$. On multiplie alors la i-ième ligne de $R(P_1 , Q)$ par η^{p+q-i} , et on ajoute le résultat obtenu à la dernière ligne. On obtient ainsi sur la dernière ligne :

$$\eta^{q-1} P_1(\eta) \ , \ \eta^{q-2} P_1(\eta) \ , \ldots , \ P_1(\eta) \ , \ \eta^{p-1} Q(\eta) \ , \ldots , \ Q(\eta) .$$

En développant le déterminant suivant cette ligne, et en appliquant le lemme 2 (dans le cas $P_{i,j}$ constants), on obtient, puisque $P_1(\eta) = 0$,

$$|R(P_1\ ,\ Q_1)| \leq p|Q(\eta)|(\Sigma_{k=0}^{p}|a_k(\theta)|)^q\ L(Q)^{p-1}\ .$$

(b) On suppose maintenant $|\eta| > 1$. Dans ce cas, on multiplie la i-ième ligne de $R(P_1\ ,\ Q)$ par η^{-i+1} , et on ajoute le résultat obtenu à la première ligne. On obtient donc sur la première ligne :

$$\eta^{-p}\ P_1(\eta)\ ,\quad \eta^{-p-1}\ P_1(\eta)\ ,\ldots,\ \eta_1^{-p-q+1}\ P_1(\eta)\ ,\quad \eta^{-q}\ Q(\eta)\ ,\ldots,\ \eta^{-q-p+1}\ Q(\eta)\ ,$$

et en développant le déterminant suivant cette ligne, on parvient à la même inégalité que précédemment.

Dans les deux cas, on obtient donc

$$|R(P_1\ ,\ Q_1)| \leq |Q(\eta)|.c_3^q\ L(Q)^{p-1} \leq |Q(\eta)|\Lambda(Q)^{k_1}\ .$$

3° Conclusion. - En comparant les résultats obtenus au 1° et au 2°, on obtient ainsi la relation :

$$|Q(\eta)| \geq \Lambda(Q)^{-k_1}\ \exp(-\ O(\Lambda(Q)^{k_2}|\theta))\ .$$

3. Propriétés de la fonction ordre d'un nombre complexe.

Les propriétés démontrées ici sont celles énoncées dans le §1.

PROPOSITION 1. - *Pour tout* $\eta \in \mathbb{C}$ *algébrique, on a*

$$O(u|\eta) \ll \log u\ .$$

Preuve. - Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(\eta) \neq 0$. On utilise le lemme 3 avec $\theta = 1$. Il existe donc un entier positif $k = k(\eta)$ tel que

$$|P(\eta)| \geq \Lambda(P)^{-k}$$

(il est facile de voir que $O(u|1) = 0$). D'où :

$$O(u|\eta) < k \log u\ .$$

PROPOSITION 2. - *Si* $\theta \in \mathbb{C}$ *est algébrique, mais n'est pas un élément d'un corps quadratique imaginaire, alors*

$$O(u|\theta) \gg \log u\ .$$

Preuve. - Soient $u \in \mathbb{N}$, $u \geq 2^{\sigma(\theta)+1}$, et $H = [u/4^{\sigma(\theta)}]$ (où $\sigma(\theta)$ est défini dans l'énoncé du lemme 1). On applique le lemme 1 avec $N = \sigma(\theta)$. Il existe alors un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$, $P(X) \neq 0$ vérifiant $\partial(P) \leq \sigma(\theta)$, $H(P) \leq H$, d'où $\Lambda(P) < u$ et tel que

$$|P(\theta)| < \exp(c\sigma(\theta))\ H^{-(1/\sigma(\theta))}\ ,$$

où $c = c(\theta)$ est une constante positive. Comme l'hypothèse faite sur θ équivaut à dire que θ est de degré $> \sigma(\theta)$, on a donc $P(\theta) \neq 0$. Pour u assez grand, il vient par conséquent :

$$O(u|\theta) \geq \frac{1}{2\sigma(\theta)} \log u\ .$$

Remarque. – Le résultat précédent reste vrai si θ est un élément d'un corps quadratique imaginaire, mais non entier algébrique. Par contre, il n'est trivial que si θ est un entier d'un tel corps, en particulier si $\theta \in \mathbb{Z}$, alors on a :

$$O(u|\theta) = 0 .$$

PROPOSITION 3. – *Si* $\theta \in \mathbb{C}$ *est transcendant, alors*

$$O(u|\theta) \gg (\log u)^2 .$$

Preuve. – Soit $u \in \mathbb{N}$, $u > 16$. On applique le lemme 1 avec $N = [\log \sqrt{u}/\log 4]$ et $H = [\sqrt{u}]$. Pour u assez grand, on obtient alors

$$O(u|\theta) \geq \frac{1}{9\sigma(\theta)} (\log u)^2 .$$

PROPOSITION 4. – *Si* θ *et* $\eta \in \mathbb{C}$ *sont transcendants et algébriquement dépendants, alors* :

$$O(u|\theta) >< O(u|\eta) .$$

Preuve. – Soit $Q \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $Q(\eta) \neq 0$. Comme η est algébrique sur $\mathbb{Q}(\theta)$, il existe donc d'après le lemme 3, deux entiers positifs $k_i = k_i(\theta , \eta)$ $(i = 1,2)$ tels que

$$|Q(\eta)| > \Lambda(Q)^{-k_1} \exp(- O(\Lambda(Q)^{k_2}|\theta)) .$$

Comme d'après la proposition 3 on a

$$O(u|\theta) \gg (\log u)^2 ,$$

on en déduit donc

$$O(u|\eta) \ll O(u|\theta) .$$

D'une manière analogue, on a

$$O(u|\theta) \ll O(u|\eta) ,$$

d'où la relation

$$O(u|\theta) >< O(u|\eta) .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] FEL'DMAN (N. I.) and SHIDLOVSKII (A. B.). – The development and present state of the theory of transcendental numbers, Russian math. Surveys, t. 22, 1967, p. 1-79 ; [en russe] Uspekhi Mat. Nauk SSSR, t. 22, 1967, p. 3-82.

[2] LANG (S.). – Algebra. – Reading, Addison-Wesley publishing Company, 1965 (Addison-Wesley Series in Mathematics).

[3] MAHLER (K.). – On the order function of a transcendental number, Acta Arithm., Warszawa, t. 18, 1971, p. 63-76.

[4] SCHNEIDER (T.). – Einfuhrung in die transzendenten Zahlen. – Berlin, Springer-Verlag, 1957 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 81).

Alain DURAND
18 rue des Raguenets
95210 SAINT-GRATIEN

(Texte reçu le 28 juin 1974)