MARIE-JOSÉ BERTIN

Caractérisation de l'ensemble dérivé de l'ensemble S_q

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 15, nº 1 (1973-1974), exp. nº 12, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_1_A9_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
15e année, 1973/74, n° 12, 6 p.

28 janvier 1974

CARACTÉRISATION DE L'ENSEMBLE DÉRIVÉ DE L'ENSEMBLE S_q

par Marie-José BERTIN

On donne une caractérisation de l'ensemble dérivé S'_q de l'ensemble S_q, généralisant celle de S'_1. Comme corollaire, on trouve que les éléments de S_{q_1}, avec q_1 divisant strictement q, et les nombres de S_q, de norme strictement inférieure à un, appartiennent à S'_q.

THEOREME. - Soit $\theta \in S_q$, et soit $Q(z)$ le polynôme à coefficients entiers dont $1/\theta$ est racine, vérifiant $Q(0) = q$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\theta \in S'_q$ est qu'il existe un polynôme à coefficients entiers rationnels $A(z)$ vérifiant $A(0) \geq q$, $A(1/\theta) \neq 0$ et $|A(z)| \leq |Q(z)|$ sur $|z| = 1$, l'égalité n'ayant lieu qu'en un nombre fini de points au plus.

Démonstration. - Si $\theta \in S'_q$, alors θ est limite de nombres θ_k appartenant à S_q, et l'on peut trouver une suite $A_k(z)/Q_k(z)$ de fractions rationnelles, associée à une sous-suite θ_{n_k} de θ_k et qui converge vers une fraction limite $A^*(z)/Q^*(z)$, définissant le nombre θ, avec $A^*(z)$ et $Q^*(z)$ premiers entre eux,

$$A^*(0) \geq q \quad \text{et} \quad A^*(\tfrac{1}{\theta}) \neq 0 \qquad ([1], \text{Théor. } 4.1).$$

Supposons que l'on ait

$$A^*(z) = P^*(z) \quad \text{avec} \quad P^*(z) = \varepsilon z^s\, Q^*(\tfrac{1}{z}) \ , \quad s = \deg Q(z) \ ,$$

ε choisi de façon à avoir $P^*(0) \geq q$. Alors

$$\frac{A_k(z)}{Q_k(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{k,n}\, z^n \quad \text{et} \quad \frac{A^*(z)}{Q^*(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\, z^n$$

au voisinage de l'origine, avec $u_{k,n} \to u_n$ lorsque $k \to +\infty$. De plus, $q^{n+1} u_{k,n}$ et $q^{n+1} u_n$ sont des entiers ([1], lemme 4.1) ; donc, pour $k \geq K(n)$, on a $u_{k,n} = u_n$. On en déduit alors que

$$A_k(z)\, Q^*(z) - A^*(z)\, Q_k(z) = \gamma_{n(k)}\, z^{n(k)} + \dots$$

avec $n(k)$ tendant vers $+\infty$ avec k. Or,

$$|A_k(z)\, Q^*(z)| \leq |Q_k(z)\, A^*(z)| \quad \text{sur} \quad |z| = 1 \ ,$$

et $Q_k(z)\, A^*(z)$ possède s zéros dans $|z| < 1$. Par suite, d'après [1] (lemme 2.2), on aurait

$$\frac{A_k(z)}{Q_k(z)} = \frac{A^*(z)}{Q^*(z)} \quad \text{pour} \quad k \geq K$$

et l'on n'aurait pas une infinité de θ_{n_k} distincts. Le cas $A^*(z) = P^*(z)$ est donc à écarter. Supposons que l'on ait $|A^*(z)| = |Q^*(z)|$ pour une infinité de z avec $|z| = 1$. Alors, on en déduit que

$$Q^*(z)\ Q^*(\tfrac{1}{z}) - A^*(z)\ A^*(\tfrac{1}{z}) = 0$$

et donc que $A^*(z)$ divise $Q^*(z)\ P^*(z)$. Si $Q^*(z)$ est irréductible, $P^*(z)$ l'est également et les deux cas possibles, $A^*(z) = Q^*(z)$ et $A^*(z) = P^*(z)$, nous conduisent à une contradiction. Si $Q^*(z) = D(z)\ Q_1(z)$ avec $D(z)$ irréductible, possèdant la racine $1/\theta$, alors $P^*(z) = \tilde{D}(z)\ \tilde{Q}_1(z)$ avec $\tilde{D}(z)$ irréductible. Comme $A^*(z)$ est premier avec $Q^*(z)$, la seule possibilité est $A^*(z)$ divise $\tilde{D}(z)\ \tilde{Q}_1(z)$.

Si $A^*(z) = \tilde{D}(z)$, alors

$$\frac{A^*(z)}{Q^*(z)} = \frac{\tilde{D}(z)}{D(z)\ Q_1(z)} \quad \text{et} \quad |Q_1(z)| = 1$$

pour une infinité de z tels que $|z| = 1$; par suite,

$$Q_1(z) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{A^*(z)}{Q^*(z)} = \frac{\tilde{D}(z)}{D(z)}$$

ce qui est impossible d'après ce que l'on vient de voir.

Si $A^*(z) = \tilde{Q}_1'(z)$, alors

$$\frac{A^*(z)}{Q^*(z)} = \frac{\tilde{Q}_1'(z)}{\tilde{D}(z)\ Q_1'(z)\ Q_1''(z)}$$

et, comme précédemment on aurait $\tilde{D}(z)\ Q_1''(z) = 1$, ce qui est impossible.

Si $A^*(z) = \tilde{D}(z)\ \tilde{Q}_1'(z)$, on aurait, pour la même raison que précédemment,

$$Q_1''(z) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{A^*(z)}{Q^*(z)} = \frac{\tilde{D}(z)\ \tilde{Q}_1'(z)}{D(z)\ Q_1'(z)}$$

ce qui est impossible.

Par suite, on ne peut avoir $|A^*(z)| = |Q^*(z)|$ sur $|z| = 1$, pour une infinité de z, et les conditions énoncées dans le théorème sont bien nécessaires.

Réciproquement, si ces conditions sont réalisées, on va montrer que l'on peut associer au nombre θ, une fraction rationnelle $A^*(z)/Q^*(z)$ avec $A^*(z)$ et $Q^*(z)$ premiers entre eux, $Q^*(z)$ ne possèdant dans $|z| \leq 1$ que la racine $1/\theta$, $A^*(0) \geq q$, $Q^*(0) = q$ et $A^*(z)$ vérifiant $A^*(1/\theta) \neq 0$ et $A^*(\theta) \neq 0$.

Soit donc $A(z)$ et $Q(z)$ les polynômes vérifiant les conditions du théorème. Si $A(\theta) \neq 0$, on prend $A^*(z) = A(z)$, $Q^*(z) = Q(z)$ si $A(z)$ et $Q(z)$ sont premiers entre eux, et l'on prend $A^*(z) = q'\ A_1(z)$, $Q^*(z) = q'\ Q_1(z)$ dans le cas où $A(z) = A_1(z)\ U(z)$ et $Q(z) = Q_1(z)\ U(z)$ avec $U(0) = q'$.

Si $A(\theta) = 0$, on est alors dans le cas où $Q(z)$ est réductible : $Q(z)=D(z)\ Q_1(z)$ avec $D(z)$ polynôme irréductible primitif possédant la racine $1/\theta$, $D(0) = q_1$, $Q_1(0) = q_2 \neq 1$ et $q_1\ q_2 = q$ (On a bien $q_2 \neq 1$, car $Q_1(z)$ a toutes ses racines dans $|z| > 1$). Donc si $A(\theta) = 0$, $A(z)$ et $\tilde{D}(z) = z^k\ D(1/z)$ avec $k = \deg D(z)$, ont une racine commune et comme $\tilde{D}(z)$ est irréductible primitif, $A(z) = \tilde{D}(z)\ A_1(z)$. On peut vérifier que l'on a alors

$$\frac{A(z)}{Q(z)} - \frac{\tilde{D}(z)}{D(z)}\,\frac{A_1(z)}{Q_1(z)}$$

avec $\tilde{D}(0)\ A_1(0) \geq q$, $D(0) = q_1$, $Q_1(0) = q_2 > 1$, $q_1\ q_2 = q$ et $|A_1(0)/q_2| < 1$ (Cette dernière inégalité étant obtenue en appliquant le principe du maximum à la fonction $A_1(z)/Q_1(z)$ holomorphe dans $|z| \leq 1$).

En posant $A_1(0) = a_0$, $D(z) = q_1 + d_1\ z + \dots + d_k\ z^k$, d'où $\tilde{D}(0) = d_k$, on peut montrer que la fraction rationnelle

$$\frac{A^*(z)}{Q^*(z)} = \frac{\varepsilon_k |a_0|\ \tilde{D}(z) + (q_2 - |a_0|)D(z)}{q_2\ D(z)}$$

avec ε_k tel que $\varepsilon_k\ d_k = |d_k|$, vérifie les conditions annoncées, tout au moins si $D(z) \neq \tilde{D}(z)$. Mais, dans ce dernier cas, $D(z)$ est du second degré, et l'on peut prendre $A^*(z) = q_2(D(z) + z)$, $Q^*(z) = q_2\ D(z)$. On considère alors la suite

$$\varphi_n(z) = \frac{A_n(z)}{R_n(z)} = \frac{A^*(z) + \varepsilon z^{n+a}\ P^*(z)}{Q^*(z) + \varepsilon z^{n+s}\ B^*(z)}$$

définie pour n entier ≥ 1 , avec $\varepsilon = \pm 1$ arbitraire, $a = \deg A^*(z)$, $s = \deg Q^*(z)$, $P^*(z) = z^s\ Q^*(1/z)$, $B^*(z) = z^a\ A^*(1/z)$.

Par construction, les $\varphi_n(z)$ vérifient $|\varphi_n(z)| = 1$ sur $|z| = 1$ et $A_n(0) \geq q$. Comme $|B^*(z)| \leq |Q^*(z)|$, d'après le théorème de Rouché et le théorème de continuité des zéros d'une famille de fonctions holomorphes et bornées dans un disque, $R_n(z)$ a au plus une racine dans $|z| < 1$. Par ailleurs, $\varphi_n(z)$ a au moins un pôle dans $|z| < 1$, soit $1/\theta_n$. En effet,

$$\varphi_n(z) - \varphi(z) = \frac{\varepsilon z^n [z^a\ P^*(z)\ Q^*(z) - z^s\ A^*(z)\ B^*(z)]}{Q^*(z)[Q^*(z) + \varepsilon z^{n+s}\ B^*(z)]} \quad \text{avec} \quad \varphi(z) = \frac{A^*(z)}{Q^*(z)} ,$$

ce qui montre, pour $n \geq 1$, que le développement de Taylor au voisinage de l'origine de $\varphi_n(z)$ commence par $u_0 + u_1\ z$, si l'on désigne par $\sum_0^\infty u_n\ z_n$ le développement de Taylor au voisinage de l'origine de $\varphi(z)$. Par suite, d'après [1] (lemme 2.3), comme $|u_0| \geq 1$ et $u_1 \neq 0$, on en déduit que $\varphi_n(z)$ possède au moins un pôle dans $|z| < 1$.

Si $R_n(z)$ possède des zéros sur $|z| = 1$, alors $A_n(z)$ possède les mêmes zéros. Par suite, soit $D_n(z)$ le p. g. c. d. de

$$Q^*(z) + \varepsilon z^{n+s}\ B^*(z) \quad \text{et de} \quad A^*(z) + \varepsilon z^{n+a}\ P^*(z) .$$

On a

$$Q^*(z) + \varepsilon z^{n+s}\ B^*(z) = D_n(z)\ Q_n(z) ,$$

$$A^*(z) + \varepsilon z^{n+a}\ P^*(z) = D_n(z)\ V_n(z) .$$

Par combinaison linéaire, en multipliant la première relation par $z^a\ P^*(z)$ et la deuxième par $- z^s\ B^*(z)$, et en ajoutant, il vient

$$z^a\ P^*(z)\ Q^*(z) - z^s\ A^*(z)\ B^*(z) = D_n(z)[z^a\ P^*(z)\ Q_n(z) - z^s\ B^*(z)\ V_n(z)] .$$

Par suite, $D_n(z)$ divise un polynôme fixe indépendant de n ; donc le degré de $Q_n(z)$ augmente indéfiniment. On aura donc une infinité de θ_n . Montrons que ces

θ_n sont tous distincts. S'il n'en était pas ainsi, on aurait par exemple, $\theta_m = \theta_n$ avec $m > n$. D'où

$$(1) \qquad Q^*(\frac{1}{\theta_n}) + \varepsilon(\frac{1}{\theta_n})^{n+s} B^*(\frac{1}{\theta_n}) = 0$$

$$(2) \qquad Q^*(\frac{1}{\theta_m}) + \varepsilon(\frac{1}{\theta_m})^{m+s} B^*(\frac{1}{\theta_m}) = 0$$

et, puisque $\theta_n = \theta_m$, en retranchant les deux relations :

$$\varepsilon(\frac{1}{\theta_n})^{n+s} [1 - (\frac{1}{\theta_n})^{m-n}] B^*(\frac{1}{\theta_n}) = 0 .$$

Comme $\theta_n \neq 1$, on a donc $B^*(1/\theta_n) = 0$, soit, en reportant dans (1), $Q^*(1/\theta_n)=0$. Or $Q^*(z)$ possède dans $|z| \leq 1$ pour unique zéro $1/\theta$; on aurait donc $1/\theta_n=1/\theta$ et $B^*(1/\theta) = 0$, ce qui est impossible puisque $A^*(\theta) = B^*(1/\theta)$, et l'on a supposé $A^*(\theta) \neq 0$.

On a donc construit une suite $\varphi_n(z) = V_n(z)/Q_n(z)$ avec V_n et Q_n premiers entre eux, $\varphi_n(z)$ ayant un unique pôle $1/\theta_n$ dans $|z| \leq 1$. On a également $|\varphi_n(z)| \leq 1$ sur $|z| = 1$, $Q_n(1/\theta_n) = 0$, $V_n(1/\theta_n) \neq 0$, $Q_n(0) = q_n$, q_n divisant q et $V_n(0) \geq q_n$. Par suite, $\theta_n \in S_{q_n}$ et, comme $S_{q_n} \subset S_q$, on a $\theta_n \in S_q$. On montre enfin que cette suite infinie de θ_n, tous distincts, tend vers θ. En effet, on a :

$$Q^*(\frac{1}{\theta_n}) + \varepsilon(\frac{1}{\theta_n})^{n+s} B^*(\frac{1}{\theta_n}) = 0 .$$

Comme d'après [1] (lemme 4.4), le nombre 1 n'est pas point limite de S_q, et que $B^*(1/\theta_n)$ est borné, alors $Q^*(1/\theta_n) \to 0$, soit $\theta_n \to \theta$. En prenant $\varepsilon=\pm 1$, on voit que θ est limite de nombres de S_q, simultanément à droite et à gauche. Le théorème est ainsi démontré.

COROLLAIRE 1. - Tous les éléments de S_{q_1}, avec q_1 divisant q, $q_1 < q$, appartiennent à S'_q.

En effet, à l'élément $\theta \in S_{q_1}$ (q_1 divisant q, $q_1 < q$) est associé la fraction rationnelle $A(z)/Q(z)$ avec $Q(0) = q_1$, $A(0) \geq q_1$, $A(1/\theta) \neq 0$, $Q(1/\theta)=0$ et $|A(z)/Q(z)| \leq 1$ sur $|z| = 1$. En écrivant $q = q_1 q_2$, on montre que la fraction rationnelle

$$\frac{a_0 A(z) + (q_2 - a_0)Q(z)}{q_2 Q(z)} \quad \text{avec } 1 \leq a_0 < q_2 \text{ quelconque}$$

définit θ comme élément de S_q et montre que $\theta \in S'_q$.

COROLLAIRE 2. - Si θ appartient à S_q et est totalement réel, alors θ appartient à S'_q.

1° Supposons $|N(\theta)| \geq 1$. Soit $D(z) = d_0 + \dots + d_h z^h$ le polynôme irréductible primitif dont θ est racine ; alors on a $|d_0| \geq |d_h|$. Soit $Q(z)$ le polynôme ayant $1/\theta$ comme seule racine dans $|z| \leq 1$ tel que $Q(0) = q$.

On a alors $Q(z) = \tilde{D}(z)\, Q_1(z)$ et par suite $Q_1(0) \geq 1$. De plus, $\tilde{D}(z)=\varepsilon z^h\, D(\frac{1}{z})$ avec ε tel que $\varepsilon\, d_h = |d_h|$. Si θ est totalement réel, tous ses conjugués sont réels. Il y a par exemple p conjugués θ_j positifs et r conjugués négatifs, avec $p + r = h$.

Si $\theta_j > 0$, on a sur $|z| = 1$,

$$\left|\frac{z - \theta_j}{z - 1}\right| \geq \frac{1 + \theta_j}{2} .$$

Si $\theta_j < 0$, on a sur $|z| = 1$,

$$\left|\frac{z + |\theta_j|}{z + 1}\right| \geq \frac{1 + |\theta_j|}{2} .$$

Or $\dfrac{1 + |\theta_j|}{2} > \sqrt{|\theta_j|}$. Par suite,

$$\left|\frac{D(z)}{|d_h|(1 - z)^p\, (1 + z)^r}\right| > \sqrt{\pi|\theta_j|} = \sqrt{|N(\theta)|} \geq 1 \quad \text{sur} \quad |z| = 1 .$$

D'où, en prenant

$$\begin{cases} A^*(z) = Q_1(0)\, |d_h|(1 - z)^p\, (1 + z)^r \\ Q^*(z) = Q_1(0)\, \tilde{D}(z) \end{cases} ,$$

on voit que $\theta \in S'_q$.

2° <u>Supposons</u> $|N(\theta)| < 1$. Alors θ est racine du polynôme irréductible primitif $D(z) = d_0 + \dots + d_h\, z^h$ avec

$$|d_0| < |d_h| . \tag{3}$$

Soit $Q(z)$ le polynôme ayant $1/\theta$ pour racine

$$Q(z) = \tilde{D}(z)\, Q_1(z) \quad \text{avec} \quad \tilde{D}(z) = \varepsilon z^h\, D(\tfrac{1}{z}) \quad \text{et} \quad \varepsilon d_h = |d_h| .$$

Soit $A(z)$ le polynôme tel que $A(z)/Q(z)$ soit la fraction rationnelle définissant $1/\theta$. On va montrer que $A(\theta) \neq 0$.

Si l'on avait $A(\theta) = 0$, alors $A(z) = D(z)\, A_1(z)$ avec $A(0) = d_0\, A_1(0) \geq q$. La fonction $A_1(z)/Q_1(z)$ étant holomorphe dans $|z| \leq 1$ et bornée par 1 sur $|z| = 1$, on aurait, d'après le principe du maximum, $|A_1(0)|/Q_1(0) \leq 1$; d'où

$$A(0) = |d_0|\ |A_1(0)| \geq q = |d_h| Q_1(0) \geq |d_h|\ |A_1(0)|$$

c'est-à-dire $|d_h| \leq |d_0|$, ce qui est en contradiction avec la relation (3). Par suite, on a forcément $A(\theta) \neq 0$, et ceci montre que $\theta \in S'_q$.

Puisque dans le cas $|N(\theta)| < 1$, le fait θ totalement réel n'intervient pas, on a démontré le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3. - <u>Si</u> $\theta \in S_q$ <u>et si</u> $|N(\theta)| < 1$, <u>alors</u> $\theta \in S'_q$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] PISOT (Charles). - Quelques aspects de la théorie des entiers algébriques. - Montréal, Presses de l'Université de Montréal, 1963 (Séminaire de Mathématiques Supérieures, Eté 1963, 5).

[2] AMARA (Mohamed). - Ensembles fermés de nombres algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e Série, t. 83, 1966, p. 215-270 (Thèse Sc. math. Paris, 1967).

(Texte reçu le 11 mars 1974)

Marie-José BERTIN
16 avenue de la Gare
94140 ALFORTVILLE