SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU.
THÉORIE DES NOMBRES

PAUL ERDÖS
JEAN-LOUIS NICOLAS

Répartition des nombres superabondants

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 15, nº 1 (1973-1974), exp. nº 5, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_1_A3_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
15e année, 1973/74, n° 5, 18 p.

26 novembre 1973

RÉPARTITION DES NOMBRES SUPERABONDANTS

par Paul ERDÖS et Jean-Louis NICOLAS

1. Introduction.

S. RAMANUJAN [10] a défini et étudié les nombres hautement composés (h. c.) [Soit $d(n)$ le nombre de diviseurs de n, n est hautement composé si $m<n \Rightarrow d(m)<d(n)$]. En particulier, il a étudié $Q_{h.c.}(X)$ = nombre de nombres hautement composés $\leq X$, et montré que

$$\lim_{X\to\infty} \frac{Q_{h.c.}(X)}{\log X} = +\infty .$$

P. ERDÖS a montré [2] que le quotient n'/n de deux nombres hautement composés consécutifs assez grands vérifie :

$$\frac{n'}{n} \leq 1 + \frac{1}{(\log n)^c} , \text{ avec } c > 0 ,$$

ce qui entraîne :

$$Q_{h.c.}(X) \geq (\log X)^{1+c} \text{ pour } X \text{ assez grand.}$$

J.-L. NICOLAS a montré [8] que $Q_{h.c.}(X) \leq (\log X)^{c'}$, c' étant une constante calculable mais assez grande.

D'autre part, P. ERDÖS et L. ALAOGLU ont défini, dans [1], les nombres superabondants :

Définition. - On dit que n est superabondant si

$$m < n \Rightarrow \frac{\sigma(m)}{m} < \frac{\sigma(n)}{n} ,$$

où $\sigma(n)$ est la somme des diviseurs de n.

On sait que σ est une fonction multiplicative et que $\sigma(p^\alpha) = (p^{\alpha+1} - 1)/(p - 1)$ pour p premier et $\alpha \geq 1$ (Cf. [3], chap. XVI). P. ERDÖS et L. ALAOGLU ont en particulier démontré le résultat suivant :

PROPOSITION 1. - *Si la décomposition en facteurs premiers d'un nombre superabondant est* $n = 2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3} \ldots q^{\alpha_q} \ldots p^{\alpha_p}$, *on a* :

(1) $$\alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \ldots \geq \alpha_q \geq \ldots \geq \alpha_p .$$

On a également $\alpha_p = 1$ *sauf si* $n = 4$ *ou* $n = 36$ *et* $q^{\alpha_q} \sim (p \log p)/\log q$ *lorsque* q *et donc* n *tendent vers l'infini*, p *étant le plus grand nombre premier divisant* n. *On a enfin, lorsque* $n \to \infty$,

(2) $$p \sim \log n .$$

D'autre part, J.-L. NICOLAS ([7], p. 182) a montré que si n et n' sont deux nombres superabondants consécutifs, on avait, pour une infinité de n

$$\frac{n'}{n} \geq 1 + \frac{1}{\sqrt{\log n}} .$$

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - Soit $Q(X)$ le nombre de nombres superabondants $\leq X$; si $c < \frac{5}{48}$, on a $Q(X) \geq (\log X)^{1+c}$ pour X assez grand.

La méthode de démonstration du théorème 1, ne permet pas (on le prouvera avec le théorème 2) de montrer que le quotient n'/n de deux nombres superabondants consécutifs assez grands vérifie

$$\frac{n'}{n} \leq 1 + \frac{1}{(\log n)^c} . \tag{3}$$

Nous allons d'abord rappeler les propriétés des nombres colossalement abondants, qui sont des nombres superabondants privilégiés faciles à calculer (§ 2). Au § 3, on étudiera les propriétés des nombres superabondants compris entre deux nombres colossalement abondants consécutifs. Au § 4, on montrera, dans le lemme 4, que, pour presque tous les nombres N colossalement abondants, l'inégalité (3) est vérifiée pour n voisin de N, ce qui démontrera le théorème 1.

On utilisera constamment le lemme suivant dû à HOHEISEL, INGHAM et HUXLEY.

LEMME 1. - Soit $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers $\leq x$; il existe $\tau < 1$ tel que

$$\pi(x + x^\tau) - \pi(x) \sim \frac{x + x^\tau}{\log(x + x^\tau)} - \frac{x}{\log x} \sim \frac{x^\tau}{\log x} .$$

Le meilleur résultat actuel est dû à Huxley [4] : l'équivalence précédente est vraie pour $\tau > 7/12$.

Notations. - Pour deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$, la relation $f(x) \gg g(x)$ signifie que $g(x) = O(f(x))$.

Remarques. - Soit f une fonction additive. On définit n comme " f-hautement abondant" si $m < n \Rightarrow f(m) < f(n)$. Dans l'article [1], (p. 466, n° (9)) il est dit que "si $f(n) \neq c \log n$, alors les nombres f-hautement abondants ont pour densité 0 ". Cela n'est pas vrai, si l'on choisit $f(p) = \log p$ et $f(p^k) = 0$ pour $k \geq 2$. Les nombres f-hautement abondants sont les nombres non divisibles par un carré, dont la densité est $6/\pi^2$ (Cf. [3], chap XVIII).

Dans le même article, la table numérique des nombres " σ-hautement abondants", p. 467, doit être modifiée pour $1800 \leq n \leq 2340$ par

n	facteurs de n				$\sigma(n)$
1800	2^3	3^2	5^2		6045
1920	2^7	3	5		6120
1980	2^2	3^2	5	11	6552
2100	2^2	3	5^2	7	6944
2160	2^4	3^3	5		7440
2340	2^2	3^2	5	13	7644

2. Nombres colossalement abondants.

Définition. - On dit que N est colossalement abondant, s'il existe $\varepsilon > 0$, tel que la fonction $\sigma(n)/n^{1+\varepsilon}$ atteigne son maximum en N.

Remarque. - Cette définition est légèrement différente de celle de [1], p. 455.

Si N est colossalement abondant, on a, pour tout n,

$$\frac{\sigma(n)}{n^{1+\varepsilon}} \leqslant \frac{\sigma(N)}{N^{1+\varepsilon}} . \tag{4}$$

PROPOSITION 2. - Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe au moins un nombre colossalement abondant associé à ε, que l'on note N_ε. D'autre part, tout nombre colossalement abondant est superabondant.

Démonstration. - On sait que

$$\overline{\lim} \frac{\sigma(n)}{n \log \log n} = e^\gamma ,$$

où γ est la constante d'Euler (Cf. [3], chap XVIII). Pour un ε fixé, la fonction $\sigma(n)/n^{1+\varepsilon}$ tend vers 0 à l'infini et a donc un maximum absolu qu'elle atteint en un ou plusieurs points N. Un tel nombre est colossalement abondant.

D'autre part, en utilisant (4), il vient

$$n < N \Rightarrow \frac{\sigma(n)}{n} \leqslant \frac{\sigma(N)}{N} \left(\frac{n}{N}\right)^\varepsilon < \frac{\sigma(N)}{N} ,$$

et N est superabondant.

PROPOSITION 3. - Soit N un nombre colossalement abondant associé à ε. On définit, pour p premier et α entier $\geqslant 1$:

$$F(p , \alpha) = \frac{\log(1 + (1/(p^\alpha + p^{\alpha-1} + \ldots + p)))}{\log p} = \frac{\log((p^{\alpha+1} - 1)/(p^{\alpha+1} - p))}{\log p}$$

et pour $\alpha = 0$, $F(p , 0) = + \infty$. Alors si p est premier et divise N avec l'exposant $\alpha \geqslant 0$, on a

$$F(p , \alpha) \geqslant \varepsilon \geqslant F(p , \alpha + 1) . \tag{5}$$

Démonstration. - Si $\alpha \geqslant 0$, on applique l'inégalité (4) avec $n = Np$. Il vient :

(6) $$\frac{\sigma(Np)}{\sigma(N)} \leqslant \left(\frac{Np}{N}\right)^{1+\varepsilon} = p^{1+\varepsilon} .$$

D'autre part,

(7) $$\frac{\sigma(Np)}{\sigma(N)} = \frac{\sigma(p^{\alpha+1})}{\sigma(p^{\alpha})} = \frac{p^{\alpha+2}-1}{p^{\alpha+1}-1} = p\left(1 + \frac{1}{p^{\alpha+1}+\dots+p}\right) .$$

En comparant (6) et (7), on obtient $\varepsilon \geqslant F(p , \alpha + 1)$. L'inégalité $F(p,\alpha) \geqslant \varepsilon$ est évidente si $\alpha = 0$. Si $\alpha \geqslant 1$, on la démontre en appliquant (4) avec $n=N/p$.

<u>Définitions</u>. - On pose, pour p premier,

$$E_p = \{F(p , \alpha) \ ; \ \alpha \geqslant 1\}$$

$$E = \bigcup_{p \text{ premier}} E_p = \{\varepsilon_1 , \varepsilon_2 , \dots , \varepsilon_i , \dots\} .$$

Pour tout $\eta > 0$, il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de E supérieurs à η , et l'on peut ranger les éléments de E en une suite décroissante :

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_i > \dots .$$

On pose $\varepsilon_0 = +\infty$.

Pour $\varepsilon > 0$, on définit $x = x_1$, $y = x_2$, x_k , pour $k \geqslant 2$, comme fonctions de ε , par

(8) $$\begin{cases} F(x , 1) = \dfrac{\log(1 + (1/x))}{\log x} = \varepsilon \\ F(x_k , k) = \dfrac{\log(1 + (1/(x_k^k + \dots x_k)))}{\log x_k} = \varepsilon . \end{cases}$$

Ces définitions ont un sens, car pour $k \geqslant 1$, la fonction $t \longmapsto F(t , k)$ est décroissante, pour tout $t \geqslant 1$, et décroit de $+\infty$ à 0 . On a de plus, pour k fixé, lorsque $\varepsilon \to 0$ (Cf. démonstration du lemme 2)

(9) $$x_k \sim \sqrt[k]{kx} .$$

PROPOSITION 4.

(a) <u>Si</u> $\varepsilon \notin E$, <u>la fonction</u> $\sigma(n)/n^{1+\varepsilon}$ <u>atteint son maximum en un seul point</u> N_ε <u>dont la décomposition en facteurs premiers est</u> :

(10) $$N_\varepsilon = \prod_p p^{\alpha_p(\varepsilon)} \quad \underline{\text{avec}} \quad \alpha_p(\varepsilon) = \left[\frac{\log((p^{1+\varepsilon}-1)/(p^{\varepsilon}-1))}{\log p}\right] - 1$$

<u>ou si l'on préfère</u>,

(11) $$\alpha_p(\varepsilon)=k \ \underline{\text{si}} \ x_{k+1}<p<x_k \ \underline{\text{avec}} \ k\geqslant 1 \ \underline{\text{et}} \ \alpha_p(\varepsilon)=0 \ \underline{\text{si}} \ p>x=x_1 .$$

(b) <u>Soit</u> $i \geqslant 1$; <u>pour tout</u> $\varepsilon \in \,]\varepsilon_{i-1} , \varepsilon_i[$, N_ε <u>est constant et égal (par définition) à</u> N_i . <u>Les nombres</u> N_i <u>sont tous distincts</u>.

(c) <u>Si les ensembles</u> E_p <u>sont disjoints deux à deux, l'ensemble des nombres colossalement abondants est égal à l'ensemble des nombres</u> N_i , $1 \leqslant i$: <u>La fonction</u> $\sigma(n)/n^{1+\varepsilon_i}$ <u>atteint son maximum aux deux points</u> N_i <u>et</u> N_{i+1} .

(d) <u>Si les ensembles</u> E_p <u>ne sont pas disjoints, pour chaque</u> $\varepsilon_i \in E_q \cap E_r$, <u>la</u>

<u>fonction</u> $\sigma(n)/n^{1+\varepsilon_i}$ <u>atteint son maximum en</u> 4 <u>points</u> : N_i , qN_i , rN_i et $N_{i+1} = qrN_i$. <u>Les nombres</u> qN_i <u>et</u> rN_i <u>sont colossalement abondants</u>.

<u>Démonstration</u>.

(a) Soit p un nombre premier fixé. Comme $\varepsilon \notin E$, alors $\varepsilon \notin E_p$ et comme la suite $F(p , k)$ est strictement décroissante en k , il existe α unique, déterminé par la proposition 3 :

$$\frac{\log((p^{\alpha+1} - 1)/(p^{\alpha} - 1))}{\log p} = F(p , \alpha) > \varepsilon > F(p , \alpha + 1) . \tag{12}$$

En résolvant en α les inégalités (12), on trouve la formule (10), en désignant par $[x]$ la partie entière de x .

Si $x_{k+1} < p < x_k$, en tenant compte de (8) et (12), on a :

$$F(x_{k+1},\alpha) > F(p,\alpha) > F(x_{k+1},k+1) = \varepsilon = F(x_k,k) > F(p,\alpha+1) > F(x_k,\alpha+1)$$

ce qui démontre (11).

(b) Les raisonnements précédents ne changent pas lorsque ε varie entre deux valeurs consécutives de l'ensemble E .

(c) Choisissons $\varepsilon = \varepsilon_i = F(q , \beta)$. Pour $p \neq q$, $\varepsilon \notin E_p$, et l'exposant de p est déterminé par (11) ou (12). D'après la proposition 3, l'exposant de q peut être choisi égal à β ou $\beta - 1$. Dans le premier cas, on trouve N_{i+1} , dans le second N_i , et la fonction $\sigma(n)/n^{1+\varepsilon_i}$ atteint son maximum en ces deux points.

(d) Soit $\varepsilon = F(p , \alpha) \in E$. Alors ε est irrationnel. Si l'on avait $\varepsilon = a/b$, a et b entiers, on aurait $p^a = (1 + (1/(p^{\alpha} + \dots + p)))^b$ avec p^a entier et $(1 + (1/(p^{\alpha} + \dots + p)))^b$ non entier. D'après le théorème de Gel'fond-Schneider (cf. [5], chap. 2) ε est même transcendant.

Du théorème 1 de Lang (Cf. [6] et aussi [5], chap. 2), on déduit que, si p , q, r sont des nombres premiers distincts et si p^{ε} , q^{ε} , r^{ε} sont algébriques, alors ε doit être rationnel. Mais si $\varepsilon \in E_p$, p^{ε} est rationnel, et on conclut que $E_p \cap E_q \cap E_r = \emptyset$.

S'il existe deux ensembles E_q et E_r non disjoints (ce qui est peu vraisemblable), et si l'on choisit

$$\varepsilon_i = F(q , \beta) = F(r , \gamma) \in E_q \cap E_r$$

pour $p \neq q$ et $p \neq r$, l'exposant de p est déterminé par (11) ou (12). L'exposant de q peut être β ou $\beta - 1$, celui de r , γ ou $\gamma - 1$, d'après la proposition 3, ce qui donne les quatre possibilités annoncées.

<u>Tables numériques</u>. – La table 1 donne les valeurs de $F(p , \alpha)$. Les valeurs non indiquées sont inférieures à 10^{-5} . Les colonnes "exposant = i " indiquent l'exposant de p dans N_{ε} . Ainsi, pour $\varepsilon = 0{,}005$, pour $p = 7$, on a :

$$0{,}00129 < \varepsilon < 0{,}0910 ,$$

donc l'exposant de 7 dans N_ε est 2 .

La table 2 donne dans sa k-ième colonne les valeurs de x en fonction de x_k (x et x_k étant définis par (8)), lorsque x_k est un nombre premier. Elle est obtenue à partir de la table 1 par l'application v^{-1} si

$$v(x) = F(x\ ,\ 1) = \log(1 + (1/x))/\log x\ .$$

L'ordre de ses termes est donc inversé par rapport à celui de la table 1. Elle permet de trouver les nombres colossalement abondants de plus grand facteur premier p donné. Pour avoir $p = 97$, on doit choisir $97 \leqslant x \leqslant 101$ = nombre premier suivant 97 , et l'on trouve

$$2^8.3^5.5^3.7^2.11^2.13.17\ldots97 \quad \text{pour} \quad x < 100{,}9$$

et

$$2^8.3^5.5^3.7^2.11^2.13^2.17\ldots97 \quad \text{pour} \quad x > 100{,}9\ .$$

La table 3 donne la suite des nombres colossalement abondants. On trouvera dans [1] une table des nombres superabondants:

TABLE 1

$p \backslash \alpha$		$\alpha=1$		$\alpha=2$		$\alpha=3$		$\alpha=4$		$\alpha=5$
2		0,58496		0,22239		0,09954		0,04731		0,02308
3		0,26286		0,07286		0,02305		0,00755		0,00250
5		0,11328		0,02037		0,00400		0,00079		0,00016
7	exposant = 0	0,06862	exposant = 1	0,00910	exposant = 2	0,00129	exposant = 3	0,00018	exposant = 4	0,00003
11		0,03629		0,00315		0,00029		0,00003		
13		0,02889		0,00214		0,00016		0,00001		
17		0,02017		0,00115		0,00007				

TABLE 2

k=1		k=2		k=3		k=4		k=5
2	exposant = 1	3,29	exposant = 2	5,44	exposant = 3	9,08	exposant = 4	15,36
3		6,72		15,38		36,3		88,57
5		16,8		60,50		230,4		920,5
7		31,4		153,9		812,8		4531,5
11		73,4		554,9		4580,6		40080,3
13		100,9		897,2		8743,5		90404,7
17		168,8		1951,4		24842,7		335898,5

	k=6		k=7		k=8		k=9		k=10
p=2	26,3	exposant=6	45,7	exposant=7	80,2	exposant=8	142,4	exposant=9	255,4
p=3	221,7		567,6		1480,4		3919,7		10507,9

TABLE 3

		n	$\sigma(n)$	$\sigma(n)/n$
		1	1	1
ε_1 =	0,58 496			
		2	3	1,5
ε_2 =	26 286			
		2 3	12	2
ε_3 =	22 239			
		4 3	28	2,333
ε_4 =	11 328			
		4 3 5	168	2,8
ε_5 =	9 954			
		8 3 5	360	3
ε_6 =	7 286			
		8 9 5	1 170	3,25
ε_7 =	6 862			
		8 9 5 7	9 360	3,7143
ε_8 =	4 731			
		16 9 5 7	19 344	3,8381
ε_9 =	3 629			
		16 9 5 7 11	232 128	4,1870
ε_{10} =	2 889			
		16 9 5 7 11 13	3 249 792	4,5091
ε_{11} =	2 308			
		32 9 5 7 11 13	6 604 416	4,5818
ε_{12} =	2 305			
		32 27 5 7 11 13	20 321 280	4,6993
ε_{13} =	2 037			
		32 27 25 7 11 13	104 993 280	4,8559
ε_{14} =	2 017			
		32 27 25 7 11 13 17	1 889 879 040	5,1416

3. Etude des nombres superabondants compris entre deux nombres colossalement abondants consécutifs.

PROPOSITION 5. - Soit N un nombre colossalement abondant associé à ε . On définit x et x_k par (8). Soient p le plus grand facteur premier de N et P le nombre premier suivant p . Soit n un nombre superabondant compris entre N et NP , et soit λ_k le plus grand nombre premier divisant n avec l'exposant k . On a

$$(13) \qquad \pi(\lambda_k) - \pi(x_k) = O(\sqrt{x_k}) = O(x^{\frac{1}{2}k})$$

ce qui entraîne, d'après le lemme 1, pour $\tau > 7/12$

$$(14) \qquad \lambda_k = x_k + O(x_k^\tau) \ .$$

Démonstration. - La démonstration est la même que celle de la proposition 4 de [8], p. 120 : Pour un entier M quelconque, on définit le "bénéfice" de M , par rapport à N et à ε , par

$$\text{bén } M = \varepsilon \log \frac{M}{N} - \log \frac{\sigma(M)/M}{\sigma(N)/N}$$

et par (4), on a bén $M \geq 0$. Ensuite, on montre que, pour un nombre superabondant n compris entre N et NP , on a :

$$\text{bén } n = O(\tfrac{1}{x}) \ .$$

Enfin on montre que, si $\pi(\lambda_k) - \pi(x_k)$ était trop grand, bén n serait trop grand, et on n'aurait pas bén $n = O(1/x)$.

Remarquons que le nombre colossalement abondant suivant N est $\leq NP$ et donc, pour tout nombre superabondant n , il existe au moins un N colossalement abondant tel que $N \leq n \leq NP$.

4. Démonstration du théorème 1.

La démonstration du théorème 1 repose sur trois lemmes.

LEMME 2 (lemme technique).

(a) Il existe une seule fonction $y(x)$ vérifiant $y \geq 1$ pour $x \geq 1$ et définie par la relation implicite

$$(15) \qquad u(y) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\log(1 + (1/(y^2 + y)))}{\log y} = \frac{\log(1 + (1/x))}{\log x} \stackrel{\text{déf}}{=} v(x)$$

(b) Quand $x \to \infty$, on a $y \sim \sqrt{2x}$ et aussi

$$(16) \qquad y(x) = \sqrt{2x}\left(1 - \frac{\log 2}{2 \log x} + \frac{\log 2(4 + 3 \log 2)}{8(\log x)^2} + o\left(\frac{1}{(\log x)^2}\right)\right)$$

(c) La fonction $\theta(x)$, définie par

$$(17) \qquad \theta(x) = \frac{\log y(x)}{\log x} = \frac{\log(1 + (1/(y^2 + y)))}{\log x}$$

est décroissante pour $x \geq 1$. On a, pour $x \to \infty$,

$$(18)\qquad \theta'(x) \sim \frac{-\log 2}{2x(\log x)^2}$$

et

$$(19)\qquad \theta(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\log 2}{\log x} - \frac{\log 2}{2(\log x)^2} + o\left(\frac{1}{(\log x)^2}\right) .$$

LEMME 3 (lemme d'approximation diophantienne). - Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, tels que $2\alpha + \beta < 1$. Pour x_0 assez grand, il y a plus de $x_0/(3 \log x_0)$ nombres premiers p entre $x_0/2$ et x_0 vérifiant

$$(20)\qquad \exists\, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q} , \quad s \leq x_0^{\alpha} \ \text{ et } \ \frac{x_0^{\beta}}{x_0} \leq \left|\theta(p) - \frac{r}{s}\right| \leq \frac{1}{s x_0^{\alpha}}$$

où $\theta(p)$ est défini par (17).

LEMME 4. - Soit p un nombre premier vérifiant le lemme 3 avec $\beta > \frac{1+\tau}{2}$. Soient $\varepsilon = (\log(1 + (1/p))/\log p$ et $N = N_{\varepsilon}$ le nombre colossalement abondant associé à ε ; donc le plus grand facteur premier de N est p, et soit P le nombre premier suivant p. Soient n et n' deux nombres superabondants consécutifs vérifiant $N \leq n \leq NP$. Il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$(21)\qquad \frac{n'}{n} \leq 1 + \frac{1}{(\log n)^c} .$$

Démonstration du lemme 2.

(a) Pour $y > 1$, la fonction $u(y)$ est strictement décroissante, comme quotient d'une fonction décroissante par une fonction croissante. Elle admet donc une fonction réciproque u^{-1}, définie sur $]0 , +\infty[$. Comme $u(y) = v(x)$, on a :

$$y = u^{-1}(v(x)) .$$

(b) Quand $x \to \infty$, on a $\lim y(x) = +\infty$, $v(x) \sim 1/(x \log x)$ et $u(y) \sim \frac{1}{y^2 \log y}$. On doit donc avoir

$$(22)\qquad y^2 \log y \sim x \log x$$

ce qui entraîne $\log(y^2 \log y) \sim \log(x \log x)$ soit $\log y \sim \frac{1}{2}\log x$, et (22) donne alors $y \sim \sqrt{2x}$.

Pour trouver un développement limité de y, définissons $\zeta(x)$ par la relation :

$$\zeta^2 \log \zeta = x \log x .$$

On a pour $x \to \infty$, $\zeta(x) \sim \sqrt{2x}$ et :

$$u(\zeta) = \frac{\log(1 + (1/(\zeta^2 + \zeta)))}{\log \zeta} = \frac{1}{\zeta^2 \log \zeta} + O\left(\frac{1}{\zeta^3 \log \zeta}\right)$$

$$= \frac{1}{x \log x} + O\left(\frac{1}{x^{3/2} \log x}\right) = v(x) + O\left(\frac{1}{x^{3/2} \log x}\right) .$$

On a donc :

$$(23)\qquad u(\zeta) - u(y) = O\left(\frac{1}{x^{3/2} \log x}\right) .$$

On a d'autre part

(24) $$u(\zeta) - u(y) = (\zeta - y)\, u'(\xi) \quad \text{avec } \xi \text{ entre } \zeta \text{ et } y\ ,$$

et

(25) $$u'(y) = \frac{-\left[(2y+1)/((y^2+y+1)(y+1)) \log y + \log(1+(1/(y^2+y)))\right]}{y(\log y)^2} \sim -\frac{2}{y^3 \log y}\ .$$

Comme $y \sim \zeta \sim \sqrt{2x}$, (23) et (24) donnent

(26) $$y(x) = \zeta(x) + O(1)\ .$$

Le développement limité de $\zeta(x)$ s'obtient par itération :

$$\zeta(x) = \sqrt{2x}(1 + o(1))$$

$$\log \zeta = \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2}\log 2 + o(1)$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{x \log x}{\log \zeta}} = \sqrt{2x/(1+(\log 2/\log x)+o(1/\log x))} = \sqrt{2x}\left(1 - \frac{\log 2}{2\log x} + o\left(\frac{1}{\log x}\right)\right)\ .$$

En itérant à nouveau, et en utilisant (26), on obtient (16).

(c) On a :

(27) $$\theta'(x) = \frac{x \log x\,(dy/dx) - y \log y}{xy(\log x)^2} = \frac{(1/(x+1)) - ((2y+1)/(y+1)(y^2+y+1))}{|u'(y)|\ xy(\log x)^2}$$

la valeur de $u'(y)$ est donnée par (25) et le dénominateur de $\theta'(x)$ est équivalent à $(2x(\log x)^2)/(y^2 \log y) \sim 2\log x$. Le numérateur vaut :

$$\frac{1}{x+1} - \frac{2y+1}{(y+1)(y^2+y+1)} = \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{y^2} + O\left(\frac{1}{y^3}\right)$$

$$= \frac{1}{y^2}\left(\frac{y^2}{x} - 2\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) = \frac{-2\log 2}{y^2 \log x} + O\left(\frac{1}{x(\log x)^2}\right)$$

en tenant compte de (16). Cela démontre (18).

Il reste à montrer que $\theta'(x) < 0$ pour $x > 1$. Par (27), on doit montrer $x > (y^2(y+2))/(2y+1)$, c'est-à-dire, comme v est une fonction décroissante, que

$$v(x) = u(y) < v\left(\frac{y^2(y+2)}{2y+1}\right)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\log(1 + ((2y+1)/y^2(y+2)))}{\log(y^2((y+2)/(2y+1)))} - \frac{\log(1 + (1/(y^2+y)))}{\log y} > 0 \quad \text{pour } y > 1\ .$$

Posons

$$\varphi(y) = \log\left(1 + \frac{2y+1}{y^2(y+2)}\right)\log y - \log\left(1 + \frac{1}{y^2+y}\right)\log\left(y^2\,\frac{y+2}{2y+1}\right)\ .$$

En décomposant le dernier logarithme, et en regroupant les termes en $\log y$, il vient

$$\varphi(y) = \log\left(\frac{2y+1}{y+2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{y^2+y}\right) - \log y \log\left(1 + \frac{1}{(y+1)^3}\right)\ .$$

Quand $y \in [1\ , +\infty[$, $1 + \frac{1}{y^2+y} \in\ ]1\ , 3/2]$ et, par la concavité de la fonction logarithme sur l'intervalle $[1 , \frac{3}{2}]$, on a

$$\log(1 + \frac{1}{y^2 + y}) \geqslant \frac{2 \log 3/2}{y^2 + y} \geqslant \frac{2\alpha}{y^2 + y}$$

avec $\alpha = 0{,}405$ qui est une valeur approchée par défaut de $\log 3/2$.

En utilisant les inégalités valables pour tout $u > -1$

$$\frac{u}{1 + u} \leqslant \log(1 + u) \leqslant u ,$$

on obtient

$$\log \frac{2y + 1}{y + 2} \geqslant \frac{y - 1}{2y + 1} \quad \text{et} \quad \log(1 + \frac{1}{(y + 1)^3}) \leqslant \frac{1}{(y + 1)^3} ,$$

ce qui donne, pour $\varphi(y)$, la minoration valable pour $y > 1$

(28) $$\varphi(y) \geqslant (\frac{y - 1}{2y + 1})(\frac{2\alpha}{y^2 + y}) - \frac{\log y}{(y + 1)^3} = \frac{1}{(y + 1)^3} \psi(y)$$

avec $\psi(y) = 2\alpha((y - 1)(y + 1)^2)/(y(2y + 1)) - \log y$. En posant $y = 1 + t$, il vient

$$\psi(y) = \psi(1 + t) = \frac{2\alpha t(t + 2)^2}{(t + 1)(2t + 3)} - \log(1 + t) .$$

En dérivant, on trouve

$$\psi'(1 + t) = \frac{P(t)}{(t + 1)^2 (2t + 3)^2}$$

avec $P(t) = 4\alpha t^4 + (20\alpha - 4)t^3 + (42\alpha - 16)t^2 + (48\alpha - 21)t + (24\alpha - 9)$.

Comme $\alpha = 0{,}405$ on a

$$P(t) = 1{,}62t^4 + 4{,}1t^3 + 1{,}01t^2 - 1{,}56t + 0{,}72 .$$

Le trinôme $1{,}01t^2 - 1{,}56t + 0{,}72$ a un descriminant négatif, donc $P(t)$ est positif pour $t \geqslant 0$. On en déduit que $\psi(y)$ est croissante pour $y \geqslant 1$ et comme $\psi(1) = 0$, que $\psi(y)$ est positive pour $y \geqslant 1$ et donc aussi $\varphi(y)$ par (28), ce qui achève la démonstration.

Démonstration du lemme 3. – D'après un lemme de Dirichlet (Cf. [9], chap. 5 ou [3], chap. 11), étant donné un réel ξ quelconque et un nombre $A > 1$, il existe une fraction r/s , avec $s \leqslant A$ telle que $|\xi - \frac{r}{s}| \leqslant \frac{1}{sA}$. Posant ici $\xi = \theta(p)$ et $A = x_0^\alpha$, on obtient

$$|\theta(p) - \frac{r}{s}| \leqslant \frac{1}{sx_0^\alpha} .$$

D'après le lemme 2, la fonction $\theta(x)$ est décroissante. Pour chaque fraction $\frac{r}{s}$ comprise entre $\theta(\infty) = \frac{1}{2}$ et $\theta(1) = (\log 3/2)/(\log 2) = 0{,}585 \ldots$ il existe une seule valeur $x_{r,s}$ telle que $\theta(x_{r,s}) = \frac{r}{s}$. Soit $\beta' > \beta$ tel que $2\alpha + \beta' < 1$. Pour chaque fraction $\frac{r}{s}$ telle que $s \leqslant x_0^\alpha$ et telle que $x_0/2 \leqslant x_{r,s} \leqslant x_0$, on retire, autour de $x_{r,s}$, une zone $|x - x_{r,s}| < x_0^{\beta'}$. En dehors de cette zone, on aura :

$$|\theta(x) - \frac{r}{s}| \geqslant \frac{|x - x_{r,s}|}{|\theta'(\xi)|} \gg \frac{x_0^{\beta'}}{x_0(\log x_0)^2} \geqslant \frac{x_0^\beta}{x_0} .$$

Dans chaque zone $|x - x_{r,s}| < x_0^{\beta'}$, il y a au plus $x_0^{\beta'} + 1$ nombres premiers, et comme $s \leqslant x_0^{\alpha}$, il y a au plus $x_0^{2\alpha}$ zones. On retire donc $O(x_0^{2\alpha+\beta'})$ nombres premiers. Comme $2\alpha + \beta' < 1$, il reste donc plus de $x_0/(3 \log x_0)$ nombres premiers pour lesquels (20) est vérifié.

<u>Démonstration du lemme</u> 4. - Soient p_1 et q_1 les plus grands nombres premiers divisant n avec les exposants 1 et 2. Désignons les nombres premiers successifs entourant p_1 et q_1 par

$$\cdots > p_3 > p_2 < p_1 < P_1 < P_2 < P_3 \cdots$$

$$\cdots < q_3 < q_2 < q_1 < Q_1 < Q_2 < Q_3 \cdots$$

On applique la proposition 5 avec $\lambda_1 = p_1$, $\lambda_2 = q_1$ et $x = p$ (par (8)) :

(29) $$p_1 = x + O(\sqrt{x})$$

et, à cause de (8) et (15)

(30) $$q_1 = x_2 + O(\sqrt{x_2}) = y + O(\sqrt{y}) .$$

Si l'on choisit $r < x^{\tau}/\log x$, on aura, d'après le lemme 1,

(31) $$P_r = p_1 + O(p_1^{\tau}) = x + O(x^{\tau})$$

et

$$p_r = x + O(x^{\tau}) .$$

De même, si l'on choisit $s < y^{\tau}/\log y$, on aura

$$q_s = y + O(y^{\tau}) \quad \text{et} \quad Q_s = y + O(y^{\tau}) .$$

Avec la proposition 5, et comme par (9), $x_k \sim \sqrt[k]{kx}$, on voit que, pour $r < \dfrac{x^{\tau}}{\log x}$ et $s < y^{\tau}/\log y$, les nombres premiers $q_1 \dots q_s$ vont diviser n avec l'exposant 2, les nombres $Q_1 \dots Q_s$, $p_1 \dots p_r$ avec l'exposant 1.

On prend pour r et s les valeurs fournies par le lemme 3. Comme $\beta > (1+\tau)/2$, on a $\alpha < (1 - \beta)/2 < (1 - \tau)/4$, et comme $\tau > 1/3$, il s'ensuit que

$$s \leqslant x_o^{\alpha} \Rightarrow s < \frac{y^{\tau}}{\log y} .$$

Si $r/s > \theta(p)$, on considère

(32) $$n_1 = n \frac{P_1 \dots P_r}{q_1 \dots q_s} .$$

Si $r/s < \theta(p)$, on considèrerait de même $n_2 = n\,((Q_1 \dots Q_s)/(p_1 \dots p_r))$; les raisonnements seraient tout à fait semblables. On va montrer que

(33) $$\frac{\sigma(n_1)}{n_1} > \frac{\sigma(n)}{n} .$$

On a

$$\frac{\sigma(n_1)}{n_1} = \frac{\sigma(n)}{n} \prod_{i=1}^{r}\left(1 + \frac{1}{P_i}\right) \prod_{i=1}^{s}\left(\frac{1}{1 + (1/(q_i^2 + q_i))}\right)$$

$$= \frac{\sigma(n)}{n} \frac{(1+(1/x))^r}{1+(1/(y^2+y)))^s} \prod_{i=1}^{r}\left(\frac{1+(1/P_i)}{1+(1/x)}\right) \prod_{i=1}^{s} \frac{(1+(1/(y^2+y)))}{(1+(1/(q_i^2+q_i)))}$$

et

$$\log \frac{\sigma(n_1)}{n_1} - \log \frac{\sigma(n)}{n} = S_1 + S_2 + S_3 ,$$

avec

$$S_1 = r \log(1 + \frac{1}{x}) - s \log(1 + \frac{1}{y^2 + y}) = s \log(1 + \frac{1}{x})(\frac{r}{s} - \frac{\log y}{\log x}) \gg \frac{s x_0^\beta}{x_0^2}$$

compte tenu de (15) et de (20), car $x = p$;

$$S_2 = \sum_{i=1}^{r} \log(1 + \frac{1}{P_i}) - \log(1 + \frac{1}{x}) = - \sum_{i=1}^{r} \frac{P_i - x}{\xi_i^2 + \xi_i} = 0(\frac{s}{x_0^{2-\tau}})$$

en utilisant le théorème des accroissements finis, (31) et la relation $r < s$. On a de même

$$S_3 = \sum_{i=1}^{s} \log(1 + \frac{1}{y^2 + y}) - \log(1 + \frac{1}{q_i^2 + q_i}) = 0(\frac{sy^\tau}{y^3}) = 0(\frac{s}{x_0^{(3-\tau)/2}}) .$$

Les sommes S_2 et S_3 sont négatives et $S_2 + S_3 = 0(s/(x_0^{(3-\tau)/2})$. Comme $\beta > \frac{1 + \tau}{2}$, on a $S_1 + S_2 + S_3 > 0$, ce qui démontre (33)

Majorons maintenant n_1/n

$$\frac{n_1}{n} = \frac{P_1 \dots P_r}{q_1 \dots q_s} = \frac{x^r}{y^s}(\prod_{i=1}^{r}(\frac{P_i}{x}))/(\prod_{i=1}^{s}(\frac{y}{q_i})) .$$

On a

$$\log \frac{n_1}{n} = S_4 + S_5 + S_6$$

avec

$$S_4 = r \log x - s \log y = s \log x(\frac{r}{s} - \frac{\log y}{\log x}) \leqslant \frac{\log x_0}{x_0^\alpha}$$

$$S_5 = \sum_{i=1}^{r} \log \frac{P_i}{x} = \sum_{i=1}^{r} \log(1 + \frac{P_i - x}{x}) = 0(\frac{s x_0^\tau}{x_0}) = 0(\frac{x_0^\alpha}{x_0^{1-\tau}})$$

$$S_6 = - \sum_{i=1}^{s} \log(\frac{q_i}{y}) = - \sum_{i=1}^{s} \log(1 - \frac{y - q_i}{y}) = 0(s \frac{y^\tau}{y}) = 0(\frac{x_0^\alpha}{x_0^{(1-\tau)/2}})$$

ce qui donne

(34) $$\log \frac{n_1}{n} = 0(\frac{\log x_0}{x_0^\alpha}) + 0(\frac{x_0^\alpha}{x_0^{(1-\tau)/2}}) = 0(\frac{1}{x_0^c})$$

pour tout $c < \min(\alpha , ((1 - \tau)/2) - \alpha)$. En choisissant α légèrement inférieur à $(1 - \tau)/4$ et β légèrement supérieur à $(1 + \tau)/2$, on peut prendre, pour c, toute valeur inférieure à $(1 - \tau)/4 = 5/48$.

Maintenant, par (33), on a $(\sigma(n_1))/n_1 > (\sigma(n))/n$; d'après la définition des nombres superabondants, cela entraîne $n < n' \leq n_1$, donc, par (34), que

$$\log \frac{n'}{n} = O\left(\frac{1}{x_0^c}\right) .$$

Comme par (2) et (29) on a

$$\log n \sim p_1 \sim p = x < x_0 ,$$

on obtient (21), ce qui démontre le lemme 4.

Démonstration du théorème 1. - Soient X assez grand et N_0 le nombre colossalement abondant précédant X . Soient ε_0 associé à N_0 , et x_0 défini par (8). Soient p_0 le plus grand facteur premier de N_0 , et P_0 le nombre premier suivant p_0 . On a :

$$N_0 \leq X < N_0 P_0 ,$$

par (11)

$$p_0 \leq x_0 < P_0 ,$$

et par (2)

$$p_0 \sim P_0 \sim \log N_0 .$$

On a donc :

(35) $$x_0 \sim \log N_0 \sim \log X .$$

On conserve les notations du lemme 4. Si p vérifie le lemme 3, on a :

$$Q(NP) - Q(N) \gg (\log N)^c \gg x_0^c$$

et

$$Q(X) \geq Q(N_0) \geq \sum_{\substack{p \text{ vérifiant} \\ \text{le lemme } 3}} [Q(NP) - Q(N)] \gg \frac{x_0}{3 \log x_0} x_0^c .$$

On en déduit par (35) :

$$Q(X) \gg \frac{(\log X)^{1+c}}{\log \log X} .$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout $c < (1 - \tau)/4$, on a aussi, pour tout $c < (1 - \tau)/4$ et X assez grand,

$$Q(X) \geq (\log X)^{1+c} .$$

ce qui démontre le théorème 1.

5. Nombres sans cube superabondants.

Définition. - Soit $\sigma^*(n)$ la fonction multiplicative qui vaut $\sigma^*(p^\alpha) = \sigma(p^\alpha)$ si $\alpha \leq 2$ et $\sigma^*(p^\alpha) = 0$ si $\alpha \geq 3$. On dit que n est un nombre "sans cube superabondant" si :

(36) $$m < n \Rightarrow \frac{\sigma^*(m)}{m} < \frac{\sigma^*(n)}{n} .$$

Cette définition est équivalente à la suivante. Soit $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres entiers non divisibles par un cube. On dit que n est un nombre "sans cube superabondant", si $n \in \mathbb{C}$ et si :

$$m \in \mathbb{C} \,, \qquad m < n \Rightarrow \frac{\sigma(m)}{m} < \frac{\sigma(n)}{r} \,.$$

Les propriétés de ces nombres sont très voisines de celles des nombres superabondants. Si n^* est un nombre sans cube superabondant, et s'écrit $n^* = \prod p^{\alpha_p}$, on a (Cf. proposition 1)

$$2 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \dots \geq \alpha_p \,.$$

Un tel nombre dépend donc de deux nombres premiers q (le plus grand tel que $\alpha_q = 2$) et p (le plus grand diviseur premier).

On définit sans difficultés les nombres "sans cube colossalement abondants". Pour $\varepsilon > 0$, il existe N^*_ε en lequel la fonction $(\sigma^*(n))/(n^{1+\varepsilon})$ est maximale. Si T est l'application de $\underset{\sim}{N} \to \mathbb{C}$, définie par

$$T(\prod p^{\alpha_p}) = \prod p^{\min(\alpha_p, 2)} \,,$$

on a $N^*_\varepsilon = T(N_\varepsilon)$. Mais il n'est pas vrai que n superabondant $\Rightarrow T(n)$ sans cube superabondant. Enfin, la proposition 5 s'adapte aisément aux nombres sans cube superabondants. On pose :

$$Q^*(X) = \operatorname{card}\{n^* \leq X \,,\ n^* \text{ sans cube superabondant}\} \,.$$

La démonstration du théorème 1 est valable, puisqu'on ne considère que les nombres premiers divisant le nombre superabondant n avec un exposant égal à 1 ou 2. On a donc

$$Q^*(X) \geq (\log X)^{1+c} \,.$$

THÉORÈME 2. - <u>Soient</u> n^* <u>et</u> n'^* <u>deux nombres sans cube superabondants consécutifs, on a</u>

$$\overline{\lim}\, \frac{n'^*}{n^*} \geq \sqrt[4]{2} = 1{,}19 \,.$$

<u>Démonstration</u>. - Soit a entier ≥ 6. Il existe, d'après le lemme 2, un nombre réel x tel que :

$$\theta(x) = \frac{\log y}{\log x} = \frac{a+1}{2a} \,. \tag{37}$$

On choisit $\varepsilon = (\log(1 + (1/x)))/\log x$ et N^*_ε un nombre sans cube colossalement abondant associé à ε. On désigne les nombres premiers successifs entourant x et y (définis par (15)) par

$$\dots\, p_3 < p_2 < p_1 \leq x < P_1 < P_2 < P_3 \,\dots$$
$$\dots\, q_3 < q_2 < q_1 \leq y < Q_1 < Q_2 < Q_3 \,\dots$$

On a

$$N = N^*_\varepsilon = 2^2\, 3^2 \dots q_2^2\, q_1^2\, Q_1\, Q_2 \dots p_1$$

et les nombres sans cube superabondant n^* vérifiant $N \leqslant n^* < Nx$ sont de la forme

$$n_s = N \frac{Q_1 \cdots Q_s}{p_1 \cdots p_r} \quad \text{ou} \quad n'_s = N \frac{P_1 \cdots P_r}{q_1 \cdots q_s}$$

r étant déterminé en fonction de s par la condition $N \leqslant n_s < Nx$. On a, d'autre part, $s = O(\sqrt{y})$ par la proposition 5.

Si $s \geqslant 2a$, on a, avec (37),

$$x > \frac{n_s}{N} \geqslant \frac{y^s}{x^r} = \frac{y^{s-2a}}{x^{r-a-1}} \frac{y^{2a}}{x^{a+1}} = \frac{y^{s-2a}}{x^{r-a-1}} ,$$

d'où il vient

$$x^{r-a} > y^{s-2a} \geqslant 1$$

et $r - a > 0$ c'est-à-dire $r \geqslant a + 1$ ce qui entraîne que p_1 , p_2 ,..., p_{a+1} ne divisent pas n_s . Considérons

$$n''_s = n_s \frac{p_1 \cdots p_{a+1}}{Q_1 \cdots Q_{2a}} .$$

On a, par (37)

$$n''_s < n_s \frac{x^{a+1}}{y^{2a}} = n_s \tag{38}$$

et

$$\frac{\sigma^*(n''_s)}{n''_s} = \frac{\sigma^*(n_s)}{n_s} \prod_{i=1}^{a+1}(1 + \frac{1}{p_i}) \prod_{i=1}^{2a}(\frac{1}{1 + (1/(Q_i^2 + Q_i))})$$

d'où l'on tire, par (37) et (15) :

$$\frac{\sigma^*(n''_s)}{n''_s} > \frac{\sigma^*(n_s)}{n_s} \frac{(1 + (1/x))^{a+1}}{(1 + (1/(y^2 + y)))^{2a}} = \frac{\sigma^*(n_s)}{n_s} . \tag{39}$$

Si $s \geqslant 2a$, on voit par (36), (38) et (39) que n_s n'est pas sans cube superabondant. On démontre la même chose pour n'_s et il y a donc entre N et Nx au plus $4a$ nombres sans cube superabondants. En comparant (37) et (19), on a :

$$a \sim \frac{\log x}{\log 2} ,$$

ce qui démontre le théorème 2.

6. Quelques conjectures.

Il semble difficile de démontrer que l'on a, pour tout n superabondant (avec n' = nombre superabondant suivant n),

$$\frac{n'}{n} < 1 + \frac{1}{(\log n)^c} .$$

Si le lemme 4 ne s'applique pas, on peut essayer d'utiliser les nombres premiers autour de $x_3 \sim \sqrt[3]{3x}$, mais il est difficile de voir si cela suffit à résoudre la question.

Il semble un peu plus facile de montrer que $Q(X) \leqslant (\log X)^{c'}$.

On peut s'intéresser aux nombres M_η où la fonction $(\sigma(n))/(n(\log n)^\eta)$ atteint son maximum. Les nombres M_η sont superabondants, mais il est difficile de les étudier, car la fonction $\log n$ n'est pas multiplicative. Il serait intéressant de savoir si les M_η sont colossalement abondants.

Enfin, on peut définir d_n comme le plus petit diviseur de n pour lequel

$$\sum_{d|n, d\leq n/d_n} d \leq n .$$

On pose $d_n = f(n)$. Si n est déficient (c'est-à-dire si $\sigma(n) < 2n$), on a $f(n) = 1$. P. ERDÖS sait montrer que, pour $n > n_0(\varepsilon)$, on a :

$$f(n) < (\log n)^{(1+\varepsilon)c \log\log\log n} ,$$

mais que, pour une infinité de n, on a :

$$f(n) > (\log n)^{(1-\varepsilon)c \log\log\log n} .$$

On peut considérer les entiers n tels que $m < n \Rightarrow f(m) < f(n)$ et regarder leurs rapports avec les nombres superabondants.

On peut étudier la généralisation du problème des nombres parfaits $(\sigma(n) = 2n)$: Quels sont les nombres tels que :

$$n = \sum_{d|n, d\leq n/3} d , \quad n \equiv 0 \mod 3 \ ?$$

Ces nombres sont ou parfaits et impairs, ou vérifient $\sigma(n) = \frac{5n}{2}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ERDÖS (P.) and ALAOGLU (L.). - On highly composite and similar numbers, Trans. Amer. math. Soc., t. 56, 1944, p. 448-469.

[2] ERDÖS (P.). - On highly composite numbers, J. of London math. Soc., t. 19, 1944, p. 130-133.

[3] HARDY (G. H.) and WRIGHT (E. M.). - An introduction to the theory of numbers, 4th edition. - Oxford, at the Clarendon Press, 1960.

[4] HUXLEY (M. N.). - The distribution of prime numbers. Large sieves and zero density theorems, - Oxford, at the Clarendon Press, 1972 (Oxford mathematical Monographs).

[5] LANG (S.). - Introduction to the transcental numbers. - New York, Addison-Wesley, 1966 (Addison-Wesley Series in Mathematics).

[6] LANG (S.). - Nombres transcendants, Séminaire Bourbaki, 18e année, 1965/66, n° 305, 8 p.

[7] NICOLAS (J.-L.). - Ordre maximal d'un élément du groupe S_n des permutations et "highly composite numbers", Bull. Soc. math. France, t. 97, 1969, p. 129-191.

[8] NICOLAS (J.-L.). - Répartition des nombres hautement composés de Ramanujan, Canad. J. of Math., t. 23, 1971, p. 116-130.

[9] RADEMACHER (H.). - Lectures on elementary number theory. - New York, Blaisdell Publishing Company, 1964.

[10] RAMANUJAN (S.). - Highly composite numbers, Proc. London math. Soc., Series 2, t. 14, 1915, p. 347-409 ; and "Collected papers", p. 78-128. - Cambridge, at the University Press, 1927.

Paul ERDŐS
Magyar Tudomanyos Akademia
Matematikai Kutato Intezete
Réaltanoda u 13-15
BUDAPEST V (Hongrie)

et

Jean-Louis NICOLAS
Département de Mathématique
UER des Sciences de Limoges
123 rue Albert Thomas
87100 LIMOGES