Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

MARC REVERSAT

Les suites eutaxiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 15, nº 1 (1973-1974), exp. nº 13, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1973-1974__15_1_A10_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
15e année, 1973/74, n° 13, 10 p.

4 février 1974

LES SUITES EUTAXIQUES

par Marc REVERSAT

1. Introduction.

Un des premiers résultats d'approximations diophantiennes par les éléments d'une suite fut le théorème de Khintchine selon lequel, si (ε_n) est une suite décroissante de nombres réels positifs, l'inéquation diophantienne $\|nx\| < \varepsilon_n$ (où $\|.\|$ désigne la distance à l'entier le plus proche) possède une infinité de solutions en entiers positifs n pour presque tout, ou presque aucun, $x \in \mathbb{R}$ selon que la série $\sum \varepsilon_n$ diverge ou converge ([9]).

Ce théorème fut généralisé à plusieurs dimensions ([10], [4], [7]), mais le problème qui s'est alors posé est celui de l'approximation d'un réel quelconque par les suites (nx), et non plus seulement de zéro.

Plus généralement, soient (ε_n) une suite de nombres réels positifs, et (φ_n) une suite d'applications d'un pavé S de $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ (p et q entiers positifs). Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $\varphi_n = (\varphi_{1,n}, \ldots, \varphi_{q,n})$, où $\varphi_{i,n}$ $(i = 1, \ldots, q)$ est une application de S dans $\mathbb{R}$,

1° Soit $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_q) \in \mathbb{R}^q$. Quelle est la mesure de l'ensemble des x de S tels que l'inéquation

$$\sup_{i=1,\ldots,q} \|\varphi_{i,n}(x) - \theta_i\| < \varepsilon_n \tag{1}$$

(où l'inconnue est l'entier n) possède une infinité de solutions ?

2° Soit $x \in S$. Quelle est la mesure de l'ensemble des éléments $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_q)$ de $\mathbb{R}^q$ tels que l'inéquation (1) ait une infinité de solutions ?

De nombreux auteurs ont étudié le premier problème, par exemple :

W. J. Le VEQUE [17], P. ERDÖS [6], W. M. SCHMIDT [25] qui étudièrent le nombre de solutions de l'inéquation $\|nx\| < \varepsilon_n$ lorsque (ε_n) est décroissante ;

W. M. SCHMIDT [26] lorsque (ε_n) est décroissante, φ_n l'application de $\mathbb{R}^q$ dans lui-même définie par $\varphi_n(x_1, \ldots, x_q) = (P_1(n)\, x_1, \ldots, P_q(n)\, x_q)$, où $P_1, \ldots, P_q$ sont des polynômes à coefficients entiers ;

P. X. GALLAGHER [8] qui, dans certains cas, a montré que l'on pouvait s'affranchir dans les résultats précédents de la condition de décroissance sur la suite (ε_n) ;

W. PHILIPP [22] lorsque (φ_n) est l'application de l'intervalle $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi_n(x) = x\alpha^n$, α étant un réel supérieur à 1 ;

B. de MATHAN pour les applications $\varphi_n : x \dashrightarrow \alpha x^n$ (α étant un réel positif) définies dans l'intervalle $]1, +\infty[$ [19].

Dans ces études, il est montré qu'étant donné $(\theta_1, \ldots, \theta_q) \in \underset{\sim}{R}^q$, l'inéquation (1) possède, pour presque tout $x \in S$, un nombre fini ou une infinité de solutions, selon que la série $\sum \varepsilon_n^q$ converge ou diverge. De façon plus précise, si, pour tout entier positif N, $\nu_x(\theta, N)$ désigne le nombre de solutions n de l'inéquation (1) telles que $1 \leqslant n \leqslant N$, on a, pour presque tout $x \in S$, la relation

$$\nu_x(\theta, N) \sim \int_0^1 \ldots \int_0^1 \nu_x(\theta, N)\, d\theta_1 \ldots d\theta_q = \sum_{n=1}^N (2\varepsilon_n)^q \quad (N \longrightarrow \infty)$$

Des résultats voisins furent aussi obtenus par W. J. Le VEQUE [18], qui étudia les suites $(a_n x)$ pour certaines suites d'entiers (a_n), S. LANG qui s'intéressa à la suite (nx) lorsque x est un nombre quadratique ([11], [12]), W. M. SCHMIDT [27] et W. W. ADAMS ([2], [3]) qui s'intéressent aux approximations simultanées des éléments d'une base d'un corps de nombres, S. LANG [13] et W. W. ADAMS [1] qui étudièrent la suite (nx) à une et plusieurs dimensions, en liaison avec "le type" du nombre x introduit par S. LANG ([13], [14]).

Le second problème conduisit J. LESCA à introduire la notion de suite eutaxique [16]. Ceci fut fait pour les suites d'éléments de $\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}$, mais peut se transposer sans complication à des groupes plus généraux :

Soient G un groupe abélien complet, muni d'une distance invariante par translation, et μ sa mesure de Haar normalisée. Soit (u_n) une suite d'éléments de G, (B_n) une suite de boules de G, u_n étant le centre de B_n, et soit B l'ensemble des éléments x de G pour lesquels il existe une infinité d'entiers n tels que $x \in B_n$ $(B = \bigcap_{N>0} \bigcup_{n \geqslant N} B_n)$.

La suite (u_n) est dite eutaxique si B est de complémentaire négligeable chaque fois que la suite $(\mu(B_n))$ est décroissante et la série $\sum \mu(B_n)$ divergente.

Parallèlement B. de MATHAN introduisit la notion de suite fortement eutaxique [19]. Les hypothèses étant les mêmes que précédemment, pour tout $x \in G$ et pour tout entier positif N, notons $\nu(x, N)$ le nombre d'entiers n tels que $1 \leqslant n \leqslant N$ et $x \in B_n$. La suite (u_n) est dite fortement eutaxique si, chaque fois que la suite $(\mu(B_n))$ est décroissante et la série $\sum \mu(B_n)$ divergente, on a la relation pour presque tout $x \in G$,

$$\nu(x, N) \sim \int \nu(x, N)\, d\mu(x) = \sum_{n=1}^N \mu(B_n) \quad (N \longrightarrow \infty) .$$

Remarquons que toute suite eutaxique est dense, que toute suite fortement eutaxique est équirépartie. Si la série $\sum \mu(B_n)$ converge, l'ensemble B est de mesure nulle. D'autre part, il faut supposer, dans les définitions, la suite $(\mu(B_n))$ décroissante ; on peut, en effet, toujours construire une suite de boules (B_n) telles que la série $\sum \mu(B_n)$ diverge et que l'ensemble B soit de mesure nulle.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons aux suites eutaxiques et fortement eutaxiques d'éléments de $(\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z})^q$ (q entier , $q > 0$), c'est-à-dire aux approximations simultanées des nombres réels par les éléments de certaines suites. Nous verrons que les méthodes et les résultats sont différents de ceux du premier problème. Par exemple, si dans $\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}$, l'inéquation $\|\theta - nx\| < \varepsilon_n$ (où (ε_n) désigne une suite décroissante de réels positifs telle que la série $\sum \varepsilon_n$ diverge) possède, pour tout θ , une infinité de solutions pour presque tout x , au contraire, l'ensemble des x pour lesquels la suite (nx) est eutaxique est de mesure nulle.

2. Les suites eutaxiques.

La notion de suite eutaxique fut donc dégagée par J. LESCA qui mis en évidence les premiers exemples de telles suites d'éléments de $\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}$: les suites à "rapports bornés" et la suite (nx) si, et seulement si, x est un élément de $\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}$ de constante de Markov $M(x)$ finie.

Soit $u = (u_n)$ une suite d'éléments de $\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}$. Pour tout entier positif N , notons $\Delta_N(u)$ (resp. $\delta_N(u)$) le maximum (resp. le minimum) de l'ensemble des mesures des parties connexes de $(\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}) - \{u_1 , \ldots , u_N\}$.

DÉFINITION. - La suite u est dite à rapports bornés si les nombres $\Delta_N(u)/\delta_N(u)$ sont majorés (indépendamment de N).

THÉORÈME 1 ([16]). - Les suites de $\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}$ à rapports bornés sont eutaxiques.

La démonstration consiste à analyser $\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}$ par les intervalles découpés par les éléments d'une suite $u = (u_n)$ à rapports bornés. Soit (ε_n) une suite décroissante de nombres réels positifs tels que la série $\sum \varepsilon_n$ diverge. Pour tout entier n , soit $B_n =]u_n - \varepsilon_n , u_n + \varepsilon_n[$, pour u et v entiers, $1 \leq u < v$, posons $B_{u,v} = \bigcup_{u<n\leq v} B_n$, et désignons par B la limite supérieure des intervalles B_n . Pour tout entier n , notons P_n l'ensemble des parties connexes de

$$(\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}) - \{u_1 , \ldots , u_n\} .$$

La suite (u_n) étant à rapports bornés, il existe deux constantes strictement positives C_1 et C_2 telles que, pour tout entier $N > 0$ et tout intervalle I appartenant à un ensemble P_{n_0} $(n_0 \in \underset{\sim}{N})$, le nombre de points u_n tels que $1\leq n\leq N$ et $U_n \in I$ soit minoré par $C_1 N\mu(I)$ et majoré par $C_2 N\mu(I)$ (où μ désigne la mesure de Lebesgue sur $\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}$).

Soient n_0 un entier, et I un élément de P_{n_0} . Soit (t_s) une suite d'entiers telle que $(t_s/t_{s-1}) > \delta > 1$. Supposons $\varepsilon_{t_s} \geq 1/2t_s$. On a alors :

$$\mu(I \cap B_{t_{s-1},t_s}) \geq (C_1\, \mu(I)\, t_s - C_2\, \mu(I)\, t_{s-1} - 2)\; 1/2t_s$$

puisque le nombre de points u_n tels que $u_n \in I$ et $t_{s-1} < n \leq t_s$ est minoré par $C_1\, \mu(I)\, t_s - C_2\, \mu(I)\, t_{s-1}$.

Par conséquent, il existe une constante $C > 0$ telle que si $\mu(I \cap B) \leq C\mu(I)$, alors, pour toute suite d'entiers (t_s) "suffisamment lacunaire", on a $\varepsilon_{t_s} < \frac{1}{2t_s}$ pour s suffisamment grand.

La deuxième partie de la démonstration consiste à prouver, en utilisant la même méthode que précédemment, que si $n_0 \in \mathbb{N}$ et si I est un élément de P_{n_0} tel que $\mu(I \cap B) \leq C/4\, \mu(I)$, alors il existe une constante $D > 0$ et un entier $\delta > 0$ tels que :

$$\mu(I \cap B_{t_{s-1}, t_s} \setminus B_{r, t_{s-1}}) \geq B\, \delta^s\, \varepsilon_{\delta^s}$$

dès que s et r sont suffisamment grands. On en déduit qu'un tel intervalle I ne peut exister en remarquant que $\sum_s \delta^s \varepsilon_{\delta^s}$ est une série divergente.

Par conséquent, pour tout entier n_0 et pour tout intervalle $I \in P_{n_0}$, on a :

$$\mu(I \cap B) \geq (C/4)\, \mu(I) .$$

Le théorème de densité de Lebesgue montre alors que B est de complémentaire négligeable.

Le résultat du théorème 1 permit à J. LESCA d'établir le théorème suivant.

THÉORÈME 2 [16]. - Soit x $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. La suite (nx) est eutaxique si, et seulement si, x est de constante de Markov finie.

Si la constante de Markov $M(x)$ de x est finie, la suite (nx) est à rapports bornés. Ceci résulte en particulier du fait qu'il existe alors une constante $C > 0$ telle que, pour tout entier n positif, l'on ait : $\|nx\| > C/n$.

Le théorème 1 ne permet de caractériser qu'une famille négligeable de suites eutaxiques puisque l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ à rapports bornés est de mesure nulle (relativement à la mesure de Haar du groupe compact $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$). D'autre part, il est facile de voir qu'il existe des suites eutaxiques qui ne sont pas à rapports bornés. Enfin, la méthode utilisée pour caractériser les éléments x de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, tels que (nx) soit eutaxique, se généralise certainement très difficilement à plusieurs dimensions. Le problème est en effet analogue à celui de Littelwood selon lequel, si $(x_1 , \dots , x_q) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ $(q \geq 2)$, l'on a

$$\liminf_{n > 0} n\|nx_1\| \cdot \|nx_2\| \dots \|nx_q\| = 0 .$$

Cependant l'étude des méthodes précédentes conduisit B. de MATHAN à introduire la fonction suivante, qui permet d'analyser le tore, non plus avec les intervalles découpés par les éléments d'une suite (u_n) à rapports bornés, mais avec les intervalles du type $[\frac{k}{N} , \frac{k+1}{N}[$ pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k < N$ [20].

Soit $u = (u_n)$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Pour tout entier positif N , soit $\lambda(u , N)$ le nombre d'intervalles du type $[\frac{k}{N} , \frac{k+1}{N}[$ $(k = 0 , 1 , \dots , N-1)$ tels qu'il existe un point u_n avec $1 \leq n \leq N$ et $u_n \in [\frac{k}{N} , \frac{k+1}{N}[$. On pose

$$\lambda(u) = \liminf_N (\lambda(u , N))/N .$$

THÉORÈME 3 [20]. - Si $\lambda(u) = 0$, la suite u n'est pas eutaxique.

Ce résultat permit à B. de MATHAN de retrouver une partie du théorème 2.

COROLLAIRE 3.1 [20]. - Soit $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Si la constante de Markov de x est infinie, la suite (nx) n'est pas eutaxique.

On peut, en effet, montrer

$$\lambda((nx)) \leq 2\sqrt{\frac{2}{M(x)}} ,$$

où $M(x)$ désigne la constante de Markov de x .

Mais la condition $\lambda(u) > 0$ n'est certainement pas une condition suffisante d'eutaxie, car il existe des suites u , non partout denses, telles que $\lambda(u) > 0$. D'où l'idée d'introduire les fonctions suivantes [24].

Soit $u = (u_n)$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Pour tout intervalle I de mesure non nulle et pour tout entier positif N , soit $\lambda(I , u , N)$ le nombre d'entiers k tels que $0 \leq k < N$ et que l'intervalle $[\frac{k}{N} , \frac{k+1}{N}[\cap I$ contienne au moins un point u_n avec $1 \leq n \leq N$. Posons :

$$\lambda(I , u) = \liminf_N \frac{\lambda(I , u , N)}{N\mu(I)}$$

$$\chi(u) = \inf \lambda(I , u)$$

(I décrivant la famille des intervalles de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de mesures non nulles et à extrémités rationnelles).

Il est facile de généraliser ces fonctions à q dimensions en remplaçant les intervalles $[\frac{k}{N} , \frac{k+1}{N}[$ $(k \in \mathbb{N} , \; 0 \leq k < N)$ par les hypercubes

$$\prod_{i=1}^{q} \left[\frac{k_i}{[N^{1/q}]} , \frac{k_i + 1}{[N^{1/q}]}\right[\qquad (k_i \in \mathbb{N} , \; 0 \leq k_i < [N^{1/q}] \text{ pour } i = 1 , \dots , q)$$

et en définissant :

$$\chi(u) = \inf \lambda(K , u)$$

(K décrivant la famille des hypercubes de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ des mesures non nulles et à sommets rationnels).

On peut évidemment énoncer le théorème suivant ([23], [24]).

THÉORÈME 4. - Soit u une suite d'éléments de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$. S'il existe un hypercube K de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ de mesure non nulle tel que $\lambda(K , u) = 0$, la suite u n'est pas eutaxique.

Mais surtout ([23], [24]), on a le résultat suivant.

THÉORÈME 5. - Soit u une suite d'éléments de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$. Si $\chi(u)$ est strictement positif, la suite u est eutaxique.

La démonstration consiste en une généralisation de la méthode introduite par J. LESCA pour montrer que les suites à rapports bornés de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sont eutaxiques.

Pour $x = (x_1 , \dots , x_q) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$, posons :

$$M_q(x) = \limsup_{n>0} \left(1/n^{1/q} \sup_{i=1,\dots,q} \|nx_i\|\right)$$

(dans le cas $q = 1$, $M_1(x)$ est la constante de Markov de x).

On peut montrer [24]

$$\frac{1}{(1 + M_q(x))^q} \leqslant \chi((nx)) \leqslant \frac{5^q}{M_q(x)^{q/q+1}} .$$

Les théorèmes 4 et 5 permettent donc d'énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME 6. - Soit $x \in (\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z})^q$. La suite (nx) d'éléments de $(\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z})^q$ est eutaxique si, et seulement si, $M_q(x)$ est fini.

Ainsi la suite (nx) d'éléments de $(\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z})^q$ n'est eutaxique pour presque aucun x , comme il résulte du théorème métrique de Khintchine. Cependant, on a le théorème suivant.

THÉORÈME 7. - Presque toute suite d'éléments de $(\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z})^q$ est eutaxique (relativement à la mesure de Haar de $((\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z})^q)^{\underset{\sim}{N}}$).

On peut en effet montrer [24] que, pour presque toute suite u d'éléments de $(\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z})^q$, l'on a :

$$\chi(u) \geqslant \rho ,$$

où ρ désigne l'élément de l'intervalle $]0 , 1[$ tel que $\rho^\rho((1 - \rho)e)^{1-\rho} = 1$.

Ce théorème peut être précisé dans certains cas, par exemple, dans le suivant.

THÉORÈME 8 ([23], [24]). - Soit (a_n) une suite de nombres réels positifs telle que la série $\sum_n a_n/a_{n+1}$ converge. Alors la suite $(a_n x)$ modulo 1 est eutaxique pour presque tout $x \in \underset{\sim}{R}$.

Une modification de la fonction χ précédente donne une condition suffisante d'eutaxie plus faible que celle du théorème 5 : Soit u une suite d'éléments de $(\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z})^q$. Pour tout $x \in (\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z})^q$, soit $\chi_x(u) = \inf_K \lambda(K , u)$ (K décrivant la famille des hypercubes de $(\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z})^q$, contenant x , de mesures non nulles et à sommets rationnels). La même démonstration que celle du théorème 5 permet de prouver le résultat suivant.

THÉORÈME 5-bis. - Si $\chi_x(u) > 0$ pour presque tout $x \in (\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z})^q$, la suite u est eutaxique.

Il existe des suites u satisfaisant la condition de ce dernier théorème, et donc eutaxique, qui ne vérifient pas la condition $\chi(n) > 0$ du théorème 5, comme le montre la construction suivante (signalons que Francine DELMER a, auparavant, trouvé un autre exemple de suite eutaxique u telle que $\chi(u) = 0$ [5]) : Soit (u_n) la suite $\left(\frac{a}{3^k}\right)_{(a,k)\in\underset{\sim}{N}^2,(a,3)=1}$, ordonnée par l'ordre lexicographique.

Soit C l'ensemble triadique de Cantor et pour tout $h \in \underset{\sim}{N}^*$, soit C_h la réunion des 2^h intervalles fermés de longueur $1/3^h$ et ayant pour extrémités gauches les 2^h nombres

$$\varepsilon_1 \frac{2}{3} + \varepsilon_2 \frac{2}{3^2} + \dots + \varepsilon_h \frac{2}{3^h}$$

où $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_h$ sont égaux à 0 ou 1. On a $C = \bigcap_h C_h$. Considérons la famille de suites $(u(h))_{h \in \underset{\sim}{N}^*}$ d'éléments de $\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}$ définie comme suit :

$u^{(1)} = (u_n^{(1)})_n$ est la suite définie par :

$$u_n^{(1)} = \begin{cases} 2p/3^k & \text{si } U_n = (2p+1)/3^k \text{ et } U_n \in C_1 \\ U_n & \text{sinon} \end{cases}$$

$h > 1$: $u^{(h)} = (U_n^{(h)})_n$ est la suite définie par

$$u_n^{(h)} = \begin{cases} (2^h\, p)/3^k & \text{si } U_n^{(h-1)} = (2^{h-1}(2p+1))/3^k \text{ et } u_n^{(h-1)} \in C_h \\ u_n^{(h-1)} & \text{sinon} \end{cases}$$

et considérons la suite $v = (v_n) = \bigcap_{h \in \underset{\sim}{N}^*} u^{(h)}$.

Soit $h_0 \in \underset{\sim}{N}^*$. Si I_{h_0} est un intervalle fermé de longueur $1/3^{h_0}$ et dont l'extrémité gauche est du type $(\varepsilon_1 \frac{2}{3} + \dots + \varepsilon_{h_0}\, 2/3^{h_0})$, où $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{h_0}$ sont égaux à 0 ou 1, l'on a

$$\forall\, x \in \underset{\sim}{N},\quad \lambda(I_{h_0}, u^{(h)}, 3^x) \leq (3^x \mu(I_{h_0}))/2^{h_0} + O(1),\quad \forall\, h > h_0 .$$

Donc

$$\lambda(I_{h_0}, v) \leq 1/2^{h_0} .$$

Il résulte de ceci que la suite v est telle que $\chi_x(v) = 0$ pour tout $x \in C$. D'autre part, la suite v est eutaxique car, quel que soit l'entier positif h, v et $u^{(h)}$ coïncident hors de l'ensemble C_h, et $u^{(h)}$ est eutaxique puisque à rapports bornés.

Remarquons que cette construction peut être généralisée : on peut en effet, montrer par la même méthode que quelque soit l'ensemble $E \subset \underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}$ négligeable, il existe des suites eutaxiques telles que $\chi_x(u) = 0$ pour tout $x \in E$.

3. Les suites fortement eutaxiques.

Le seul critère de forte-eutaxie est le suivant [21].

THÉORÈME 9. - Soient (U_n) une suite d'éléments de $\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}$. Supposons qu'il existe une suite croissante de nombres réels positifs (R_k) tendant vers $+\infty$, et, pour tout k, un recouvrement de $\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z}$ par une famille $(J_1^i)_{1 \leq i \leq H_k}$ de H_k intervalles de mesures $1/R_k$, tels que les conditions suivantes soient vérifiées :

(i) $H_k = R_k + O(1)$;

(ii) Pour tout couple d'entiers (M, N) tels que $0 \leq M < N$, désignons par $\pi(J_k^i, M, N)$ le nombre d'entiers n tels que $M < n \leq N$ et que $U_n \in J_k^i$. Alors

$$\pi(J_k^i, M, N) \leq (N - M)/R_k + O(1)$$

(uniformément par rapport à M, N, k et i) ;

(iii) $R_{k+1}/R_k = O(1)$;

Alors la suite (U_n) est fortement eutaxique. De façon plus précise, soit une suite d'intervalles (I_n) de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, de centres (U_n), de mesures (ε_n), telle que la suite (ε_n) soit décroissante et la série $\sum \varepsilon_n$ divergente. Pour N entier positif et $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, désignons par $\nu(x, N)$ le nombre d'entiers n, tels que $0 < n \leqslant N$ et que $x \in I_n$. Posons $S(N) = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n$. Pour presque tout x, on a l'estimation suivante (relativement à N) :

$$\nu(x, N) = S(N) + O(S(N)^{5/6} (\log S(N))^{1+\varepsilon})$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

La démonstration utilise une méthode différente des précédentes. Elle consiste à prouver d'abord dans $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ l'équivalence de $\nu(x, N)$ et de $S(N)$ $(N \to +\infty)$, puis, à l'aide d'un raffinement du théorème de Fischer-Riesz ([25], [26], [22]), de passer à l'équivalence presque partout.

Ainsi, si une suite d'éléments de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ possède une famille suffisamment riche d'intervalles de restes bornés, elle est fortement eutaxique. La suite (nx), pour $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de constante de Markov finie, possède une telle famille d'intervalles, comme l'a montré J. LESCA grâce à sa "relation de réciprocité" [15]. D'où le corollaire suivant.

COROLLAIRE 9.1 [21]. - Si la constante de Markov de x est finie, la suite (nx) d'éléments de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est fortement eutaxique. De façon plus précise, on a l'estimation du théorème 9, pour presque tout x ;

$$\nu(x, N) = S(N) + O(S(N)^{5/6} (\log S(N))^{1+\varepsilon})$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

4. Problèmes non résolus.

Il reste à trouver une condition nécessaire et suffisante d'eutaxie. Peut-être que le théorème 5-bis en donne une. Il reste aussi à étudier l'eutaxie de certaines familles de suites, par exemple : les suites $(xP(n))_{n\in\mathbb{N}}$, où P désigne un polynôme, et les suites $(x\theta^n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $\theta > 1$ est un nombre réel.

Il serait intéressant d'étudier les rapports entre les notions d'eutaxie, de forte-eutaxie et d'équirépartition. Nous ne savons pas, par exemple, s'il existe des suites eutaxiques et équiréparties qui ne soient pas fortement-eutaxiques. Nous ne savons d'ailleurs rien de la mesure de l'ensemble des suites fortement-eutaxiques.

Il serait aussi intéressant de généraliser à plusieurs dimensions le résultat de forte-eutaxie sur la suite (nx).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADAMS (W. W.). - Simultaneous asymptotic diophantine approximations, Mathematika, London, t. 14, 1967, p. 173-180.

[2] ADAMS (W. W.). - Simultaneous asymptotic diophantine approximations to a basis of a real cubic number field, J. of Number Thoery, t. 1, 1969, p. 179-194.

[3] ADAMS (W. W.). - Simultaneous asymptotic diophantine approximations to a basis of a real number field, Nagoya Math. J., t. 42, 1971, p. 79-87.

[4] CASSELS (J. W. S.). - Some metrical theorems in diophantine approximation, I., Proc. Cambridge phil. Soc., t. 46, 1950, p. 209-218.

[5] DELMER (Francine). - Une remarque sur l'eutaxie, C. R. Acad. Sc. Paris (à paraître).

[6] ERDÖS (P.). - Some results in diophantine approximation, Acta Arithm., Warszawa, t. 5, 1959, p. 359-369.

[7] GALLAGHER (P. X.). - Metric simultaneous diophantine approximation, I., J. London math. Soc., t. 37, 1962, p. 387-390.

[8] GALLAGHER (P. X.). - Metric simultaneous diophantine approximation, II., Mathematika, London, t. 12, 1965, p. 123-127.

[9] KHINTCHINE (A.). - Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der diophantischen Approximationen, Math. Annalen, t. 92, 1924, p. 115-125.

[10] KHINTCHINE (A.). - Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen, Math. Z., t. 24, 1926, p. 706-714.

[11] LANG (S.). - Asymptotic approximation to quadratic irrationalities, I., Amer. J. Math., t. 87, 1965, p. 481-487.

[12] LANG (S.). - Asymptotic approximation to quadratic irrationalities, II., Amer. J. Math., t. 87, 1965, p. 488-496.

[13] LANG (S.). - Asymptotic diophantine approximations, Proc. Nat. Acad. of Sc., U. S. A., t. 55, 1966, p. 31-34.

[14] LANG (S.). - Introduction to diophantine approximations. - Reading, Addison-Wesley Publishing Company, 1966 (Addison-Wesley Series in Mathematics).

[15] LESCA (J.). - Sur la répartition modulo 1 des suites $(n\alpha)$, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 8e année, 1966/67, n° 2, 9 p.

[16] LESCA (J.). - Sur les approximations diophantiennes à une dimension, Thèse Sc. math., Grenoble, 1968.

[17] Le VEQUE (W. J.). - On the frequency of small fractional parts in certain real sequences, II., Trans. Amer. math. Soc., t. 94, 1960, p. 130-149.

[18] Le VEQUE (W. J.). - On the frequency of small fractional parts in certain real sequences, III., J. für reine und angew. Math., t. 202, 1959, p. 215-220.

[19] de MATHAN (B.). - Approximations diophantiennes dans un corps local, Bull. Soc. math. France, Mémoire 21, 1970, 93 p.

[20] de MATHAN (B.). - Un critère de non-eutaxie, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 273, 1971, Série A, p. 433-436.

[21] de MATHAN (B.). - Un problème métrique d'approximation diophantienne, Bull. Soc. math. France, t. 99, 1971, p. 369-385.

[22] PHILIPP (W.). - Some metrical theorems in number theory, Pacific J. Math., t. 20, 1967, p. 109-127.

[23] REVERSAT (M.). - Un critère d'eutaxie, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 277, 1973, Série A, p. 405-407.

[24] REVERSAT (M.). - Approximations diophantiennes par les éléments de certaines suites, Thèse 3e cycle, Math., Bordeaux, 1973.

[25] SCHMIDT (W. M.). - A metrical theorem in diophantine approximation, Canad. J. of Math., t. 12, 1960, p. 619-631.

[26] SCHMIDT (W. M.). - Metrical theorems on fractional parts of sequences, Trans. Amer. math. Soc., t. 110, 1964, p. 493-518.

[27] SCHMIDT (W. M.). - Simultaneous approximation to a basis of a real number field, Amer. J. Math., t. 88, 1966, p. 517-527.

(Texte reçu le 19 avril 1974)

Marc REVERSAT
E.R.A. du C.N.R.S. n° 362
Université de Bordeaux I
U.E.R. de Mathématiques et Informatique
351 cours de la Libération
33405 TALENCE