Daniel Barsky

Mesures et éléments analytiques p-adiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 14, n° 2 (1972-1973), exp. n° 22, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1972-1973__14_2_A6_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
14e année, 1972/73, n° 22, 4 p.

7 mai 1973

MESURES ET ÉLÉMENTS ANALYTIQUES p-ADIQUES

par Daniel BARSKY

On donne une condition nécessaire pour qu'une série de Taylor, à coefficients dans $\underset{\sim}{C}_p$, soit un élément analytique au sens de KRASNER sur le cercle de centre 0 et de rayon 1^- .

1. Notations.

$\underset{\sim}{Z}_p$ est l'anneau des entiers p-adiques, $\underset{\sim}{Q}_p$ son corps des fractions, $\underset{\sim}{C}_p$ le complété de la clôture algébrique de $\underset{\sim}{Q}_p$. On note $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues de $\underset{\sim}{Z}_p$ dans $\underset{\sim}{C}_p$, et $\mathcal{C}'$ son dual. $M = \{x \in \underset{\sim}{C}_p \ ; \ |x| < 1\}$, $\mathfrak{a}_b(1^-)$ est l'espace des séries de Taylor à coefficients bornés de rayon de convergence 1^- . Si $\mu \in \mathcal{C}'$, on pose

$$\|\mu\| = \sup_{f\neq 0}(|\langle\mu|f\rangle|/\sup_{x\in \underset{\sim}{Z}_p} |f(x)|) \ .$$

2. Résultat.

Tout d'abord nous poserons quelques définitions.

DÉFINITION 1 [2]. - Une mesure μ est un élément du dual $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$.

DÉFINITION 2 [2]. - Une mesure μ est à densité au point x par rapport à la suite $i \longrightarrow h_i$ si, et seulement si, la limite suivante existe

$$\lim_{i\to+\infty} \langle\mu|\varphi_{x,h_i}\rangle = d_\mu(x) \ ,$$

où $\varphi_{x,h_i}(y)$ est la fonction caractéristique de la boule $\mathcal{B}(x \ , \ h_i)$ de centre x et de rayon $1/p^{h_i}$.

On sait [4] que si $(e_i)_{i\in N}$ est une base normale de $\mathcal{C}$, alors, si $(e_i^*)_{i\in N}$ sont des éléments de $\mathcal{C}'$ tels que $\langle e_i^*|e_j\rangle = \delta_i^j$, on peut écrire tout élément de $\mathcal{C}'$ sous la forme $\mu = \sum_{n\geq 0} a_n e_n^*$, où $(a_n)_{n\in N}$ est une suite bornée d'élément de $\underset{\sim}{C}_p$, la série du second membre convergeant au sens de la convergence simple sur $\mathcal{C}$, et $\|\mu\| = \sup_{n\geq 0} |a_n|$. Donc $\mathcal{C}' \simeq \ell^\infty$.

De même, si l'on munit $\mathfrak{a}_b(1^-)$ de la norme sup des coefficients, il est clair que l'on a un isomorphisme d'espace de Banach entre $\mathfrak{a}_b(1^-)$ et ℓ^∞ , donc entre $\mathcal{C}'$ et $\mathfrak{a}_b(1^-)$. Nous allons préciser maintenant ceci.

Soit $F(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \in \mathfrak{a}_b(1^-)$. On sait [1] que les polynômes $\binom{x}{n}$ $(n \geqslant 0)$ forment une base normale de $\mathcal{C}$. Donc on peut trouver une mesure μ_F telle que

$$\langle\mu_F|\binom{x}{n}\rangle = a_n \ , \quad \forall \ n \geqslant 0 \ .$$

On peut donc écrire

$$F(X) = \sum_{n\geq 0} \langle \mu_F | \binom{x}{n} \rangle X^n \Rightarrow F(X) = \langle \mu_F | \sum_{n\geq 0} \binom{x}{n} X^n \rangle .$$

Or $\sum_{n\geq 0} \binom{x}{n} X^n = (1 + X)^x$ si

$$|X| < 1, \quad F(X) = \langle \mu_F | (1 + X)^x \rangle .$$

PROPOSITION. - A tout élément $F \in \mathcal{A}_b(1^-)$, on peut associer de manière biunivoque un élément $\mu_F \in \mathcal{C}'$, défini par

$$\langle \mu_F | (1 + X)^x \rangle = F(X) , \quad \forall X \in M .$$

Si l'on muni $\mathcal{C}'$ de la norme $\| \; \|$, et $\mathcal{A}_b(1^-)$ de la norme sup des coefficients, cette correspondance est une isométrie d'espaces de Banach.

Posons

$$\varphi_{-j-1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x + j + 1| > 1/p^{h(j)+1} \\ 1 & \text{si} \quad |x + j + 1| \leq 1/p^{h(j)+1} \end{cases}$$

C'est la fonction caractéristique de la boule $\mathcal{B}(-j-1 , h(j)+1)$ de centre $-j-1$ et de rayon $1/p^{h(j)+1}$ ($j = j_0 + j_1 p + \dots + j_{h(j)} p^{h(j)}$).

On sait [3] que $(\varphi_{-j-1}(x))_{j\geq 0}$ est une base normale de $\mathcal{C}$. Donc

(1) $\langle \mu_F | (1 + X)^x \rangle = \lim_{h\to+\infty} \sum_{j=0}^{p^h-1} \langle \mu_F | \varphi_{-j-1} \rangle \left((1 + X)^{-j-1} - (1 + X)^{-j-1+j_{h(j)} p^{h(j)}} \right)$

ou encore, en posant $b_j^h = \langle \mu_F | \varphi_{-j-1,h} \rangle$,

$$\langle \mu_F | (1 + X)^x \rangle = \lim_{h\to+\infty} \sum_{j=0}^{p^h-1} \langle \mu_F | \varphi_{-j-1,h} \rangle / (1 + X)^{j+1} = \lim_{h\to+\infty} \sum_{j=0}^{p^h-1} b_j^h / (1 + X)^{j+1}$$

LEMME 1. - Soit $F_h(X) = \sum_{j=0}^{p^h-1} b_j^h / (1 + X)^{j+1}$ une suite de fractions rationnelles convergeant simplement sur M vers $F(X) \in \mathcal{A}_b(1^-)$. Pour que $b_j^h = \langle \mu_F | \varphi_{-j-1,h} \rangle$, il faut et il suffit que, $\forall h \geq 0$, $\forall X \in M$,

$$|F_h(X) - F(X)| \leq |1 - 1/(1 + X)^{p^h}| \; |\varepsilon(X)|$$

(où $\varepsilon(X)$ est borné pour tout $X \in M$).

La condition nécessaire découle de l'expression (1). La condition suffisante provient de :

$$F_h(u - 1) - F(u - 1) = 0$$

si $u \in V_h$ groupe des racines p^h-ième de l'unité. D'après la condition nécessaire, ceci entraîne que, $\forall u \in V_h$,

$$\sum_{j=0}^{p^h-1} \left(\langle \mu_F | \varphi_{-j-1} \rangle - b_j^h \right) / u^{j+1} = 0$$

donc $\langle \mu_F | \varphi_{-j-1} \rangle - b_j^h = 0$.

THÉORÈME. - Tout élément analytique au sens de KRASNER de $\mathfrak{a}_b(1^-)$ possède une mesure associée qui est à densité sur les entiers strictement négatifs pour la suite $h \rightarrow h!$.

On peut montrer que la mesure associée est aussi à densité sur les entiers positifs ou nuls. Nous allons utiliser 2 lemmes pour démontrer ce théorème.

LEMME 2. - Les mesures à densités au point x pour la suite $i \rightarrow h_i$ forment un sous-espace fermé de $\mathcal{C}'$ muni de la norme $\| \ \|$.

Soient $(\mu_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ et μ des mesures telles que

$$\lim_{n\to+\infty} \|\mu_n - \mu\| = 0 \ ,$$

on suppose qu'au point x , et pour la suite $i \rightarrow h_i$, les μ_n sont à densité.

Pour n et m assez grands,

$$|\langle \mu_n | \varphi_{x,h_i} \rangle - \langle \mu_m | \varphi_{x,h_i} \rangle| < \varepsilon \ ,$$

donc $|d_{\mu_n}(x) - d_{\mu_m}(x)| < \varepsilon$. La suite $d_{\mu_n}(x)$ est donc de Cauchy, elle admet une limite ℓ . Montrons que $\ell = \lim_{i\to+\infty} \langle \mu | \varphi_{x,h_i} \rangle$. Or on a

$$\ell - \langle \mu | \varphi_{x,h_i} \rangle = \ell - d_{\mu_n}(x) + d_{\mu_n}(x) - \langle \mu_n | \varphi_{x,h_i} \rangle + \langle \mu_n | \varphi_{x,h_i} \rangle - \langle \mu | \varphi_{x,h_i} \rangle \ ,$$

et la conclusion du lemme en découle.

LEMME 3. - Toute fraction rationnelle sans pôle dans M admet une mesure associée qui est à densité sur les entiers négatifs pour la suite $h \rightarrow h!$.

Il suffit de montrer le lemme pour les fractions du type $1/(X - a)^i$, où $a \notin M$. On va raisonner par récurrence sur i . Si $i = 1$, on a

$$\frac{1}{X - a} = \lim_{h\to+\infty} \frac{1}{1 - (1 + a)^{p^h}} \sum_{j=0}^{p^h-1} \frac{(1 + a)^j}{(1 + X)^{j+1}} \ ,$$

$$= \lim_{h\to+\infty} \frac{1}{1 - (1 + a)^{p^h}} \frac{1 - \left(\frac{1 + a}{1 + X}\right)^{p^h}}{X - a} \ ,$$

$$= \lim_{h\to+\infty} \frac{1}{X - a} + \left(1 - \frac{1}{(1 + X)^{p^h}}\right) \frac{(1 + a)^{p^h}}{1 - (1 + a)^{p^h}} \frac{1}{X - a}$$

donc, d'après le lemme 1,

$$\langle \mu_a | \varphi_{-j-1,h} \rangle = \frac{(1 + a)^j}{1 - (1 + a)^{p^h}} \ ;$$

- si $|a| > 1$, alors

$$\lim_{h\to+\infty} \langle \mu_a | \varphi_{-j-1,h!} \rangle = 0$$

- si $|a| = 1$ et si ξ_a est la racine $(p^r - 1)$-ième la plus proche de $1 + a$, on a

$$\lim_{h\to+\infty} \langle \mu_a | \varphi_{-j-1,h!} \rangle = (1 + a)^j / 1 - \xi_a$$

(on note μ_a la mesure associée à $1/X - a$). Notons $\mu_a^{(i)}$ la mesure associée à $1/(X - a)^i$, et faisons l'hypothèse de récurrence suivante

$$\begin{cases} 1^\circ \quad \lim_{h\to+\infty} \langle \mu_a^{(i)} | \varphi_{-j-1,h!} \rangle = \begin{cases} \binom{j}{i-1} \dfrac{(1 + a)^{j-i+1}}{1 - \xi_a} & \text{si } |a| = 1 \\ 0 \quad \text{si } |a| > 1 \, . \end{cases} \\ 2^\circ \quad \text{la convergence est uniforme en } j \text{ pour } j \in \underset{\sim}{N} \, . \end{cases}$$

Grâce au lemme 1, on montre, en utilisant le fait que $1/(X-a)^{i+1} = 1/(X-a)^i . 1/X-a$, que

$$\langle \mu_a^{(i+1)} | \varphi_{-j-1,h!} \rangle = \sum_{k=0}^{j-1} \langle \mu_a^{(i)} | \varphi_{-k-1,h!} \rangle \langle \mu_a | \varphi_{-j+k,h!} \rangle + \sum_{k=j}^{p^{h!}-1} \langle \mu_a^{(i)} | \varphi_{-k-1,h!} \rangle \langle \mu_a | \varphi_{-p^{h!}+k-j,h!} \rangle$$

et le lemme 3 découle de cette formule.

Le théorème découle immédiatement des lemmes 2 et 3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Yvette). - Interpolation p-adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-180 (Thèse Sc. math., Paris 1963).

[2] AMICE (Yvette). - Mesures p-adiques, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, 6e année, 1964/65, n° 16, 6 p.

[3] BARSKY (Daniel). - Fonctions k-lipschitziennes sur un anneau local et polynômes dont les dérivées sont à valeurs entières, Thèse 3e cycle, Math., Univ. Paris-7, 1972.

[4] SERRE (Jean-Pierre). - Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 12, p. 69-85).

(Texte reçu le 9 mai 1973)

Daniel BARSKY
10 avenue Stéphane Mallarmé
75017 PARIS