Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

François Gramain

Spectre de certaines fonctions presque périodiques (au sens de Bohr)

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 14, nº 2 (1972-1973), exp. nº 21, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1972-1973__14_2_A5_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
14e année, 1972/73, n° 21, 5 p.
9 avril 1973

SPECTRE DE CERTAINES FONCTIONS PRESQUE PÉRIODIQUES
(au sens de BOHR)

par François GRAMAIN

1. Introduction et résultats.

Un problème classique est la détermination d'ensembles fermés dénombrables Λ de nombres réels tels que toute fonction continue bornée de variable réelle à valeurs complexes, dont le spectre (support de la transformée de Fourier au sens des distributions) est contenu dans Λ, soit presque périodique. L. H. LOOMIS a montré, en 1950, que les compacts dénombrables ont cette propriété. Les autres exemples connus utilisent en général des propriétés arithmétiques. C'est en particulier le cas du suivant [1].

THÉORÈME. - Soit $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite tendant vers $+\infty$ de nombres réels linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Toute fonction continue bornée à spectre contenu dans $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \mathbb{Z}$ est presque périodique.

On en déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE. - Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel. Toute fonction continue bornée, à spectre contenu dans l'ensemble des racines n-ièmes des entiers naturels, est presque périodique.

En effet, il suffit pour obtenir ce corollaire de montrer que l'unité et les racines n-ièmes des nombres "n-free" sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Cela résulte du lemme suivant [3].

LEMME. - Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel. Soit $\{t_i\}$ un ensemble de réels non nuls. On suppose que, pour tout i, $t_i^n \in \mathbb{Q}$ et que les t_i^n ont des images distinctes dans le groupe $\mathbb{Q}^\times/\mathbb{Q}^{\times n}$, où $\mathbb{Q}^{\times n}$ désigne le groupe multiplicatif des puissances n des rationnels non nuls. Alors les t_i sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Pour démontrer ce lemme, on peut, sans perte de généralité, supposer les t_i positifs. Soit $\sum \lambda_i t_i = 0$ une relation de dépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ liant un nombre fini de t_i. Supposons que $\lambda_{i_0} \neq 0$. On a $\lambda_{i_0} + \sum_{i\neq i_0} \lambda_i (t_i/t_{i_0}) = 0$ avec t_i/t_{i_0} irrationnel, puisque $(t_i/t_{i_0})^n \notin \mathbb{Q}^{\times n}$. Soient $k_i = \mathbb{Q}(t_i/t_{i_0})$ et K une extension finie de $\mathbb{Q}$ contenant tous les t_i/t_{i_0} intervenant dans la relation de dépendance considérée. Alors

$$\mathrm{Tr}\, K/\mathbb{Q}(t_i/t_{i_0}) = \mathrm{Tr}_{k_i/\mathbb{Q}}[\mathrm{Tr}_{K/k_i}(t_i/t_{i_0})] = [K:k_i]\, \mathrm{Tr}_{k_i/\mathbb{Q}}(t_i/t_{i_0}) .$$

Si on a $\mathrm{Tr}_{k_i/\mathbb{Q}}(t_i/t_{i_0}) = 0$, on aura $\mathrm{Tr}\, K/\mathbb{Q}(\lambda_{i_0}) = 0$, ce qui est absurde. Il suffit donc de prouver que, si θ est un réel positif tel que $\theta^n \in \mathbb{Q}^\times$ et $\theta^n \notin \mathbb{Q}^{\times n}$, on a $\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(\theta) = 0$.

Soit m le plus petit entier positif tel que $\theta^m \in \mathbb{Q}$. On a $m \geqslant 2$, puisque $\theta \notin \mathbb{Q}$. Soit $b = \theta^m > 0$. Montrons que le polynôme $X^m - b$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$, ce qui prouvera que $\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(\theta) = 0$.

D'après le critère de Capelli ([2], p. 221), le polynôme $X^m - b$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ si, pour tout nombre premier p divisant m , le nombre b n'est pas dans $\mathbb{Q}^{\times p}$ et si, lorsque 4 divise m , le nombre b n'est pas dans $-4\mathbb{Q}^{\times 4}$.

Soit p un nombre premier divisant m . Si on avait $b = c^p$ avec $c \in \mathbb{Q}^\times$, on aurait $\theta^{m/p} = |c|$, ce qui contredirait la minimalité de m . De plus, on ne peut avoir $b = -4c^4$ avec $c \in \mathbb{Q}^\times$ car b est positif. Le lemme est donc démontré.

2. Démonstration du théorème.

Dans ce qui suit, $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de réels linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, et toutes les fonctions utilisées sont de variable réelle. Le théorème est une conséquence de la proposition suivante.

PROPOSITION. - *Soit* φ *une fonction continue à valeurs complexes telle que* $\varphi = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *avec* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < +\infty$ *et* $\mathrm{Spec}\, f_n \subset \alpha_n \mathbb{Z}$. *Alors, pour tout* n , f_n *est égale presque partout à une fonction continue (et, par suite,* φ *est presque périodique).*

Pour démontrer cette proposition, on utilise les lemmes suivants :

LEMME 1. - *Soit* $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions continues, périodiques de période* 1 , *à valeurs réelles, telles que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|s_n\|_\infty < +\infty$. *Alors*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left[\sum_{n\in\mathbb{N}} s_n(\beta_n t)\right] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in\mathbb{R}} s_n(t) .$$

C'est une conséquence directe du théorème de Kronecker.

LEMME 2. - *Soit* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions réelles de* $L^\infty(\mathbb{R})$ *telle que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < +\infty$ *et* $\mathrm{Spec}\, f_n \subset \alpha_n \mathbb{Z}$. *Si on a* $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t) \geqslant 0$ *presque partout, alors on a* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \inf \mathrm{ess}\, f_n \geqslant 0$.

Ce résultat est obtenu à partir du lemme 1 après régularisation des fonctions f_n par un noyau de sommation.

Pour prouver la proposition, on se ramène au cas où les f_n et φ sont réelles en séparant leurs parties réelles et imaginaires (ce qui ne change pas le spectre puisqu'il est symétrique par rapport à l'origine). On montre qu'alors, l'oscillation essentielle de chacune des fonctions f_n

$$\Omega(f_n\ ,\ x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\sup_{[x-\varepsilon,x+\varepsilon]}\text{ess}\ f_n - \inf_{[x-\varepsilon,x+\varepsilon]}\text{ess}\ f_n\Big]$$

est partout nulle (ce qui montre que f_n est presque partout égale à une fonction continue). Pour cela, on verra qu'il suffit qu'elle soit nulle en point, et nous allons montrer qu'elle l'est presque partout.

On peut supposer que f_n est une fonction borélienne bornée $(\frac{2\pi}{\alpha_n})$-périodique et que $\varphi = \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} f_n$ presque partout. Soit

$$\omega'_d(f_n\ ,\ x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big[\sup_{[x,x+\varepsilon]}\text{ess}\ f_n(t) - f_n(x)\Big] \geqslant 0 \quad \text{presque partout,}$$

$$\omega''_d(f_n\ ,\ x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big[f(x) - \inf_{[x,x+\varepsilon]}\text{ess}\ f_n(t)\Big] \geqslant 0 \quad \text{presque partout.}$$

On définit de manière analogue ω'_g et ω''_g en changeant ε en $-\varepsilon$, et l'on a

$$\Omega(f_n\ ,\ x) \leqslant \omega'_d(f_n\ ,\ x) + \omega''_d(f_n\ ,\ x) + \omega'_g(f_n\ ,\ x) + \omega''_g(f_n\ ,\ x) \quad \text{presque partout.}$$

De $\varphi = \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} f_n$, on déduit

$$\inf_{[x-\varepsilon,x]}\text{ess}\ f_i + \sum_{j\neq i}\sup_{[x-\varepsilon,x]}\text{ess}\ f_j \geqslant \inf_{[x-\varepsilon,x]}\text{ess}\ \varphi\ .$$

Comme φ est continue, son oscillation partielle $\omega''_g(\varphi\ ,\ x)$ est nulle. On a donc

$$(1) \qquad -\omega''_g(f_i\ ,\ x) + \sum_{j\neq i}\omega'_g(f_j\ ,\ x) \geqslant 0 \quad \text{presque partout.}$$

Si on avait $\omega'_g(f_i\ ,\ x) \geqslant a > 0$ presque partout, la fonction f_j ne serait pas bornée. On a donc $\inf\text{ess}\ \omega'_g(f_i\ ,\ x) = 0$. De plus, comme les fonctions f_n sont $(\frac{2\pi}{\alpha_n})$-périodiques, il en est de même de $\omega''_g(f_n\ ,\ x)$ et de $\omega'_g(f_n\ ,\ x)$. Le lemme 2, appliqué à l'expression (1), fournit donc

$$\inf\text{ess}\big[-\omega''_g(f_i\ ,\ x)\big] \geqslant 0$$

et, par suite,

$$\omega''_g(f_i\ ,\ x) = 0 \quad \text{presque partout.}$$

On montre de la même manière que

$$\omega'_d(f_i\ ,\ x) = \omega''_d(f_i\ ,\ x) = \omega'_g(f_i\ ,\ x) = 0 \quad \text{presque partout,}$$

donc que $\Omega(f_i\ ,\ x) = 0$ presque partout.

Il reste à montrer que $\Omega(f_i\ ,\ x) = 0$ pour tout x. Soit, par exemple $i = 0$. Pour $j \neq 0$, il existe x_j tel que $\Omega(f_j\ ,\ x_j) = 0$. Si $\Omega(f_0\ ,\ x)$ n'est pas identiquement nulle, il existe x_0 tel que $\Omega(f_0\ ,\ x_0) = 4a > 0$. Alors, il existe un entier N tel que $\sum_{n\geqslant N+1}\|f_n\|_\infty < a$, donc $\sum_{n\geqslant N+1}\Omega(f_n\ ,\ x) < 2a$ pour tout x.

Par hypothèse, les α_j/α_0 et 1 sont linéairement indépendants sur $\underset{\sim}{Q}$. Le théorème de Kronecker montre que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des entiers $p_0\ ,\ \dots\ ,\ p_N$ tels que

$$\Big|p_0\frac{\alpha_j}{\alpha_0} - (x_j - x_0)\frac{\alpha_j}{2\pi} - p_j\Big| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour} \quad j = 1\ ,\ \dots\ ,\ N\ .$$

Soit $\xi = x_0 + p_0\,(2\pi/\alpha_0) = x_j + p_j\,(2\pi/\alpha_j) + t_j$. On a $|t_j| \leqslant \varepsilon\,(2\pi/(|\alpha_j|))$.
La périodicité de f_0 entraîne que $\Omega(f_0\,,\,\xi) = 4a$.

D'autre part, l'oscillation essentielle d'une fonction bornée est semi-continue supérieurement, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\Omega(f_j\,,\,t_j + x_j) < \frac{a}{N} \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant N \quad \text{et} \quad |t_j| \leqslant \varepsilon\,\frac{2\pi}{|\alpha_j|}\,.$$

Alors, la périodicité des f_j entraîne que $\Omega(f_j\,,\,\xi) < a/N$. Or

$$f_0 = \varphi - \sum_{j=1}^{N} f_j - \sum_{n\geqslant N+1} f_n\,,$$

donc

$$\Omega(f_0\,,\,\xi) \leqslant N.\frac{a}{N} + 2a < 4a$$

ce qui contredit le fait que $\Omega(f_0\,,\,\xi) = 4a$. On a bien $\Omega(f_i\,,\,x) = 0$ pour tout i et pour tout x , et la proposition est démontrée.

La démonstration du théorème nécessite un dernier lemme :

LEMME 3. - <u>Soit</u> $\varphi = a + \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} f_n$, <u>où</u> $\{f_n\}_{n\in\underset{\sim}{N}}$ <u>est une suite de fonctions complexes continues telles que</u> $\sum_{n\in\underset{\sim}{N}} \|f_n\|_\infty < +\infty$ <u>et</u> $a \in \underset{\sim}{C}$. <u>Si</u> Spec $f_n \subset \alpha_n \underset{\sim}{Z}^*$, <u>alors</u>

$$\|\varphi\|_\infty \geqslant 1/5(|a| + \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} \|f_n\|_\infty)\,.$$

En effet, soient $a = \alpha + i\beta$ avec α et β réels, et $f_n(t) = s_n(\beta_n\,t)$ avec $\beta_n = \alpha_n/2\pi$. Soit $s_n(t) = \sigma_n(t) + i\tau_n(t)$, les fonctions σ_n et τ_n étant à valeurs réelles. Comme 0 n'est pas dans le spectre de f_n , on a

$$\int_0^1 \sigma_n = \int_0^1 \tau_n = 0\,,$$

donc

(2) $$\sup \sigma_n \geqslant 0 \geqslant \inf \sigma_n \quad \text{et} \quad \sup \tau_n \geqslant 0 \geqslant \inf \tau_n\,.$$

Soit $\mu = \sup_{t\in\underset{\sim}{R}} |\alpha + \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} \sigma_n(t)|$ et $\nu = \sup_{t\in\underset{\sim}{R}} |\beta + \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} \tau_n(t)|$. D'après le lemme 1, on a

$$\mu \geqslant \alpha + \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} \sup \sigma_n \quad \text{et} \quad \mu \geqslant -\alpha + \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} \sup(-\sigma_n)$$

soit $\mu \geqslant -\alpha - \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} \inf \sigma_n$, d'où

$$\mu \geqslant \frac{1}{2} \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} (\sup \sigma_n - \inf \sigma_n) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} \|\sigma_n\|_\infty$$

d'après l'inégalité 2. On a un résultat analogue pour ν , donc

$$\|\varphi\|_\infty \geqslant \frac{1}{2}(\mu + \nu) \geqslant \frac{1}{4} \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} (\|\sigma_n\|_\infty + \|\tau_n\|_\infty) \geqslant \frac{1}{4} \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} \|s_n\|_\infty = \frac{1}{4} \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} \|f_n\|_\infty\,.$$

D'autre part, comme φ est presque périodique de moyenne a , on a $\|\varphi\|_\infty \geqslant |a|$, donc

$$\|\varphi\|_\infty \geqslant \frac{1}{5}|a| + \frac{4}{5}\,\frac{1}{4} \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} \|f_n\|_\infty = \frac{1}{5}(|a| + \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} \|f_n\|_\infty)\,.$$

Le théorème s'obtient alors facilement : Soit K_j le noyau de Fejer d'ordre j .

On a $\varphi * K_j = \varphi_j = a_j + \sum_{n\in\mathbb{N}} P_{j,n}$ avec $a_j \in \mathbb{C}$ et $P_{j,n}$ est un polynôme trigonométrique à spectre dans $\alpha_n \mathbb{Z}^*$, la somme étant en fait finie puisque α_n tend vers l'infini. Comme l'intégrale de K_j est l'unité, on a $\|a_j + \sum_{n\in\mathbb{N}} P_{j,n}\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty$, et le lemme 3 fournit

$$|a_j| + \sum_{n\in\mathbb{N}} \|P_{j,n}\|_\infty \leq 5\|\varphi\|_\infty .$$

Par compacité, en prenant au besoin une sous-suite, on peut supposer que a_j tend vers a, et que $P_{j,n}$ tend faiblement vers un élément f_n de $L^\infty(\mathbb{R})$ dont le spectre est contenu dans $\alpha_n \mathbb{Z}$. On a alors $|a| + \sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty \leq 5\|\varphi\|_\infty$. Comme les séries considérées convergent normalement, φ_j converge faiblement vers $a + \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Or φ_j converge vers φ uniformément sur tout compact, donc $\varphi = a + \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ presque partout, et la proposition donne le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GRAMAIN (F.) et MEYER (Y.). - Ensembles de fréquences et fonctions presque périodiques, Colloquium Mathematicum (à paraître).

[2] LANG (S.). - Algebra, 2nd edition. - Reading, Addison-Wesley, 1967.

[3] POURCHET (Y.). - Communication orale.

(Texte reçu le 7 mai 1973)

François GRAMAIN
28 avenue du Panorama
92340 BOURG-LA-REINE