PIERRE KAPLAN

Cycles d'ordre au moins 8 dans le 2-groupe des classes des corps quadratiques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 14, nº 1 (1972-1973), exp. nº 11, p. 1

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1972-1973__14_1_A9_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU (Théorie des nombres) 14e année, 1972/73, n° 11, 1 p.

8 janvier 1973

CYCLES D'ORDRE AU MOINS 8 DANS LE 2-GROUPE DES CLASSES DES CORPS QUADRATIQUES

par Pierre KAPLAN

Il s'agit d'une méthode qui permet d'obtenir de nombreux résultats concernant l'existence de cycles d'ordre au moins 8 dans le 2-groupe (C_2) des classes d'idéaux au sens strict des corps quadratiques $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, où D est un entier quadrat frei. Si $D > 0$ ($\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ réel), on obtient simultanément des résultats concernant la résolubilité des équations "non pelliennes" $x^2 - Dy^2 = d$, où $d \neq 1$ est un diviseur quadrat frei du discriminant de $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$.

Voici un exemple de résultat nouveau obtenu ainsi. $C(m)$ désigne un groupe cyclique d'ordre m , $C(\geq 2^n)$ un groupe cyclique d'ordre 2^k , où $k \geqslant n$. p désigne un nombre premier.

Il s'agit du cas $D = 2p$, où $p = a^2 + b^2 \equiv 1 \pmod 8$ avec $b \equiv 0 \pmod 4$: $(C_2) = C(\geqslant 8)$ si, et seulement si, $a \equiv \pm 1$ et $b \equiv 0 \pmod 8$. Sinon $(C_2)=C(4)$.

La méthode de démonstration est élémentaire, n'utilise rien d'autre que la théorie des formes quadratiques binaires, et permet de retrouver les résultats nécessaires concernant la réciprocité biquadratique, par exemple la formule :

$$(p/p')_4 \ (p'/p)_4 = ((aa' + bb')/p) = ((aa' + bb')/p') ,$$

où $p = a^2 + b^2 \equiv p' = a'^2 + b'^2 \equiv 1 \pmod 4$, $(p/p') = 1$ et $b \equiv b' \equiv 0 \pmod 2$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KAPLAN (P.). - Divisibilité par 8 du nombre des classes des corps quadratiques réels dont le 2-sous-groupe des classes est cyclique, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 275, 1972, Série A, p. 887-890.

[2] KAPLAN (P.). - Divisibilité par 8 du nombre des classes des corps quadratiques dont le 2-sous-groupe des classes est cyclique et réciprocité biquadratique, J. math. Soc. Japan, t. 25, 1973, n° 3.

[3] KAPLAN (P.). - 2-groupe des classes et facteur principal de $\mathbb{Q}(\sqrt{pq})$, où $p \equiv - q \equiv 1 \pmod 4$, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 276, 1973, Série A, p. 89-92.

[4] KAPLAN (P.). - Sur le 2-groupe des classes des corps quadratiques, J. für reine und angew. Math. (à paraître).

[5] KAPLAN (P.). - Cycles d'ordre au moins 16 dans le 2-groupe des classes de certains corps quadratiques (à paraître).

(Texte reçu le 29 mai 1973)

Pierre KAPLAN
9 rue des Soeurs Macarons
54000 NANCY