Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres

Marie-Claude Sarmant

Forme de certaines fonctions automorphes ayant une infinité dénombrable de pôles dans une couronne

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 14, n° 1 (1972-1973), exp. n° 8, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1972-1973__14_1_A6_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
14e année, 1972/73, n° 8, 7 p.

4 décembre 1972

FORME DE CERTAINES FONCTIONS AUTOMORPHES AYANT UNE INFINITÉ DÉNOMBRABLE DE PÔLES DANS UNE COURONNE

par Marie-Claude SARMANT

1. Introduction.

Nous nous plaçons dans le corps $k = \hat{\Omega}_p$. Soit $\lambda \in k$, $|\lambda| \neq 1$. Nous savons ([2] et [3]) que toute fonction f analytique uniforme automorphe de période λ, n'ayant qu'un nombre fini de pôles dans toute couronne de k centrée en 0, peut se mettre sous la forme d'un produit infini :

$$f(x) = C \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\prod_{i=0}^{I} \frac{\lambda^n x - a_i}{\lambda^n x - b_i} \right) ,$$

où C est une constante, où les a_i sont les zéros, et les b_i sont les pôles de f (modulo multiplicativement λ), et ceux-ci sont tels que :

$$\prod_{i=1}^{I} (a_i/b_i) = 1 .$$

Il existe des fonctions automorphes de forme un peu analogue possédant une infinité de pôles dans une couronne $r \leqslant |x| \leqslant |\lambda|\, r$:

Soient $\{b_i\}_{i \in \underset{\sim}{N}}$ et $\{a_i\}_{i \in \underset{\sim}{N}}$ deux suites infinies d'éléments de k, telles que :

$$\lim_{i \to \infty} (a_i/b_i) = 1 \quad \text{et} \quad \prod_{i \in \underset{\sim}{N}} (a_i/b_i) = 1 .$$

Soit $C \in k$ une constante $\neq 0$. Alors la fonction :

$$G(x) = C \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\prod_{i \in \underset{\sim}{N}} \frac{\lambda^n x - a_i}{\lambda^n x - b_i} \right]$$

est automorphe.

Réciproquement, nous allons chercher si certaines conditions permettent à une fonction automorphe de se mettre sous cette forme. Pour cela, on va utiliser un théorème qui ne concerne pas seulement les fonctions automorphes :

2. Théorème de décomposition en produit.

Hypothèses (%). - Soient r_1, $r_2 \in \underset{\sim}{R}$, tels que $0 < r_1 < r_2 < \infty$. Posons :

$$C_{r_1}^{r_2} = \{ x \mid x \in k \mid r_1 \leqslant |x| \leqslant r_2 \} .$$

Soit $\{b_i\}_{i \in \underset{\sim}{N}}$ une suite dénombrable d'éléments de $C_{r_1}^{r_2}$ telle que :

$$D = C_{r_1}^{r_2} - - \{b_i\}_{i \in \underset{\sim}{N}}$$

soit quasi-connexe [1] (la notation $- -$ désignant une différence ensembliste) et que :

$$\inf_{i \neq j,\, i,j \in \underset{\sim}{N}} |b_i - b_j| = \rho_0 > 0 .$$

Posons, pour $r \in \underset{\sim}{R}$, $r < r_1$:

$$D_r = C_{r_1}^{r_2} - - \bigcup_{i \in \underset{\sim}{N}} C(b_i , r)$$

Alors $D = D_0$, et si $r < \rho_0$, tous les trous de D_r sont isolés.

On supposera ici, au besoin en faisant une homothétie, que $\rho_0 > 1$.

Soit $F(x)$ une fonction analytique uniforme de support D [1] telle que $F|D_r$ soit élément analytique pour tout $r < \rho_0$.

Conclusion. - Pour tout $\alpha \in k$, sauf peut-être pour un ensemble $\mathfrak{A}$ dénombrable, fini ou infini, d'éléments de k , à tout b_i correspond un ensemble fini ou dénombrable $\{a_\gamma^i\}_{\gamma \in A_i}$ de zéros de $F(x) + \alpha$ tels que :

$$\prod_{\gamma \in A_i} (b_i / a_\gamma^i)$$

existe et tende vers 1 quand i devient infini.

De plus, $F(x) + \alpha$ peut être mis sous la forme :

$$F(x) + \alpha = H(x) \times \prod_{i \in \underset{\sim}{N}} \prod_{\gamma \in A_i} \frac{x - a_\gamma^i}{x - b_i} ,$$

où $H(x)$ est une fonction analytique uniforme sur $C_{r_1}^{r_2}$, n'ayant qu'un nombre fini de pôles dans $C_{r_1}^{r_2}$.

Démonstration. - Prenons $r \in \underset{\sim}{R}$, $r < \rho_0$.

D'après le 1er théorème Mittag-Löfflerien [1] appliqué à $F|D_r$:

$$F(x) = f_{r_1}^r(x) + f_{r_2}^r(x) + \sum_{i=1}^{\infty} f_i^r(x - b_i)$$

sur D_r avec :

$f_{r_1}^r(x)$: série de Laurent en x , sans terme de degré $\geqslant 0$, convergente si $|x| \geqslant r_1$,

$f_{r_2}^r(x)$: série de Taylor en x , convergente si $|x| \leqslant r_2$,

$f_i^r(x - b_i)$: série de Laurent en $x - b_i$, sans terme de degré $\geqslant 0$, convergente si $|x - b_i| \geqslant r$.

$\sum_{i=1}^{\infty} f_i^r(x - b_i)$ converge uniformément sur D_r , mais pas sur D .

Ce développement est unique.

$$f_i^{r'} = f_i^r \text{ si } |x - b_i| \geqslant \sup(r' , r)$$

Donc $f_i^{r'}$ et f_i^r ont les même coefficients.

$f_i^r = f_i$ ne dépend pas de r et converge si $|x - b_i| > 0$. (Il en est de même pour $f_{r_1}^r$ et $f_{r_2}^r$, puisque tous les trous sont isolés.)

$$F(x) = f_{r_1}(x) + f_{r_2}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x - b_i) .$$

$$F(x) = \Phi(x) + \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x - b_i) .$$

$\Phi(x)$: série de Laurent en x , donc sans pôle et avec un nombre fini de zéros dans $C_{r_1}^{r_2}$.

Etude de $f_i(x - b_i)$. - $\forall\, r < \rho_0$, $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x - b_i)$ converge uniformément sur D_r , donc :

$$\sup_{x \in D_r} |f_i(x - b_i)| \to 0 \quad \text{si} \quad i \to +\infty$$

$f_i(x - b_i)$ est une série de Laurent en $x - b_i$, sans terme de degré $\geqslant 0$:

$$\sup_{|x-b_i| \geqslant r} |f_i(x - b_i)| = \sup_{x \in D_r} |f_i(x - b_i)|$$

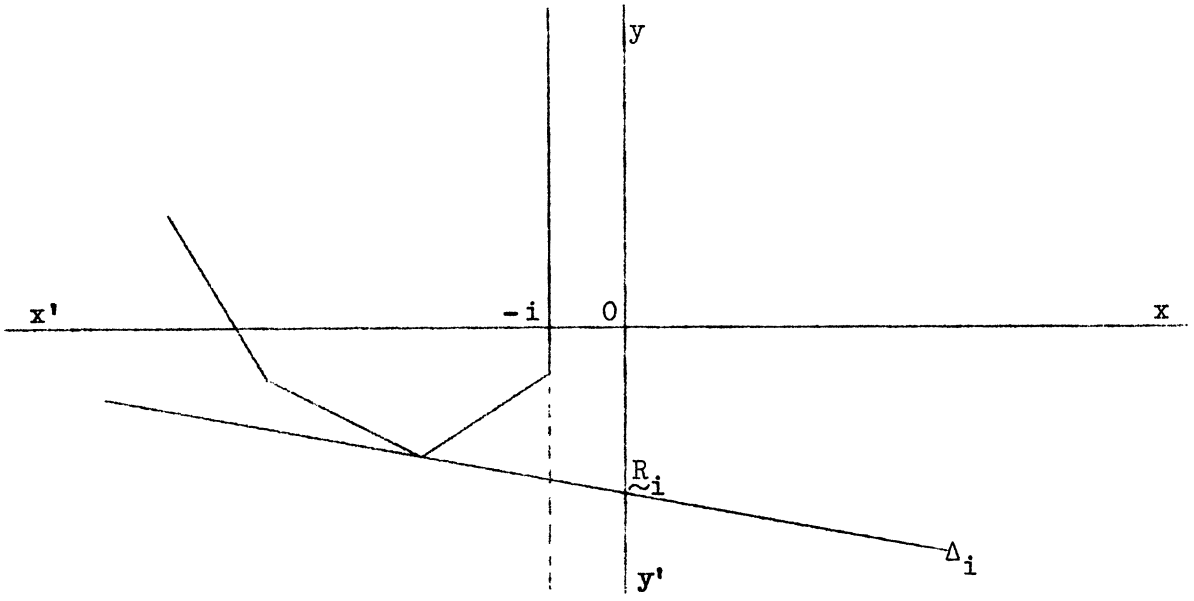
$$\sup_{|x-b_i| \geqslant r} |f_i(x - b_i)| \to 0 \quad \text{si} \quad i \to +\infty$$

$$\inf_{v(x-b_i) \leqslant -\log_p r} v[f_i(x - b_i)] \to +\infty \quad \text{si} \quad i \to +\infty$$

Si $v(x - b_i) \leqslant - \log_p r$: $- v(x - b_i) \geqslant \log_p r$

Posons $x - b_i = t$, $f_i(x - b_i) = \varphi_i(t)$

Polygone de Newton de $\varphi_i(t)$:



pente de Δ_i : $\tau(r) = \log_p r$

$$\overline{OR}_i = \inf_{v(x-b_i) \leqslant -\log_p r} v[f_i(x - b_i)]$$

Quand $i \to +\infty$, $\overline{OR}_i \to +\infty$: R_i tend vers le point à l'infini sur OY .

$\forall\, r$ fixé , $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, I$ tel que :

$$i > I \Rightarrow \inf_{v(x-b_i) \leqslant -\log_p r} v[f(x - b_i)] > \varepsilon$$

ou quel que soit A_0 sur $Y'Y$, il existe I tel que $i > I$ entraîne $\overline{OA}_i > \overline{OA}_0$.

Etude de $F(b_I + t)$.

$$F(x) = \phi(x) + \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x - b_i)$$

$$\sup_{x \in D_r} |F(x)| = M_r \quad \text{fini}$$

Etudions le développement en série de Laurent de $F(x)$ autour d'un b_I , pour un I fixé :

$$x - b_I = t$$

$$F^{(I)}(t) = F(b_I + t) = \phi(b_I + t) + \sum_{i \neq I, i \in \underset{\sim}{N}} f_i(b_I - b_i + t) + f_I(t)$$

$$R_I(t) = \phi(b_I + t) + \sum_{i \neq I, i \in \underset{\sim}{N}} f_i - (b_I - b_i + t)$$

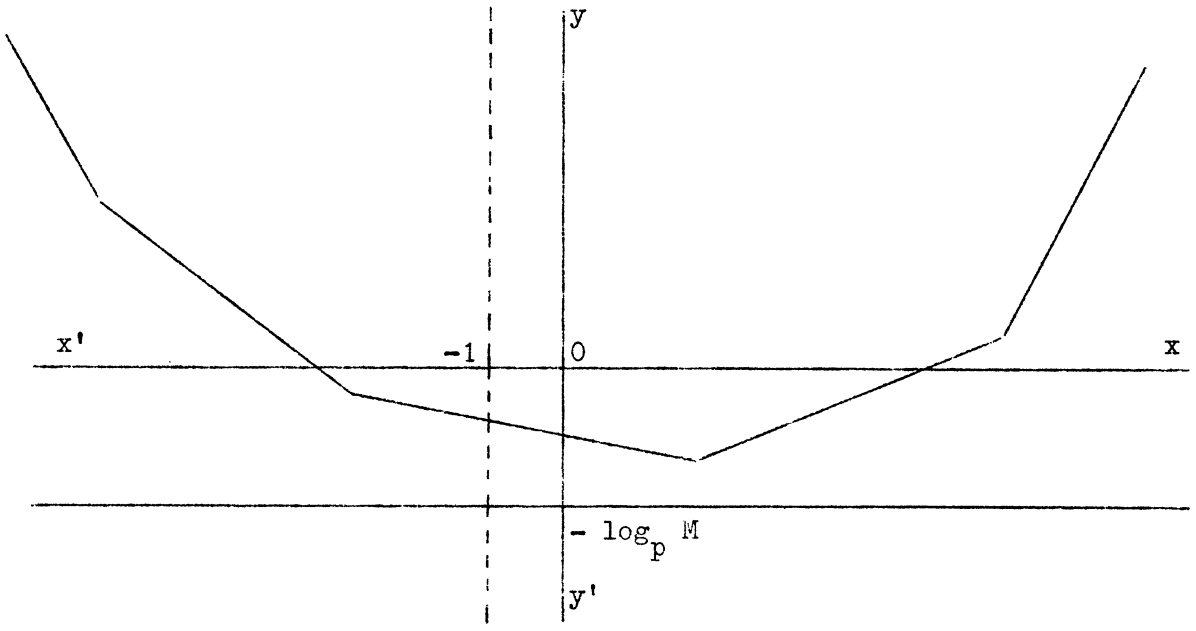
$R_I(t)$ est développable en série de Taylor, convergente au moins pour $|t| < \rho_0$.

Si $r = 1$, $\sup_{x \in D_1} |F(x)| = M$ est fini

Le polygone de Newton du développement en série de Laurent de $F(b_I + t)$ est donc situé au-dessus de la droite :

$$Y = - \log_p M$$

et M ne dépend pas de I .



A gauche de OY , nous avons soit, si b_I est d'ordre fini, un nombre fini de côtés finis, puis un côté vertical ; soit, si b_I est point singulier essentiel, un nombre infini de côtés finis dont la pente tend vers $- \infty$: ces côtés proviennent du polygone de Newton de $f_I(t)$. A droite de OY , nous avons des côtés qui proviennent du polygone de $R_I(t)$.

Soit S_I le terme constant du développement de $F^{(I)}$. Soit α un élément quelconque de k . Le terme constant de $F^{(I)}(t) + \alpha$ est $S_I + \alpha$.

Nous allons utiliser dans la suite l'hypothèse que $|S_I + \alpha|$ est inférieurement bornée quelque soit I ; dans le cas contraire, si $\{|S_I + \alpha|\}_{i \in \underset{\sim}{N}}$ a pour point d'accumulation 0 , $\{S_I\}_{I \in \underset{\sim}{N}}$ a pour point d'accumulation $- \alpha$. Ceci exige que la

suite S_I ait un ou plusieurs points d'accumulation ; ainsi apparaît l'ensemble exceptionnel $\mathfrak{A}$ de l'énoncé, ensemble (éventuellement vide) des points d'accumulation de S_I . Nous supposerons pour la suite que $\alpha \notin \mathfrak{A}$.

Le terme constant de $F^{(I)}(t) + \alpha$ est borné inférieurement :

$$|S_I + \alpha| \geqslant N \quad N \text{ constante réelle } \neq 0$$

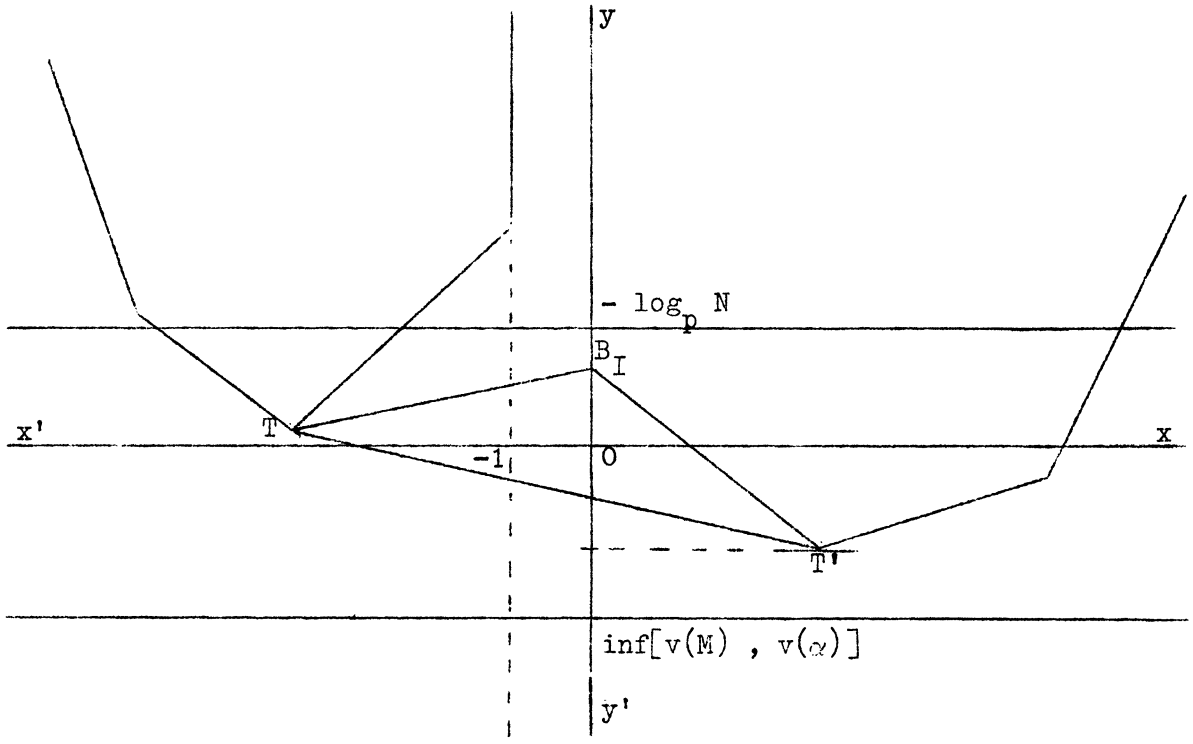
$$v(S_I + \alpha) < - \log_p N$$

D'autre part,

$$\sup_{x \in D_1} |F(x) + \alpha| \leqslant \sup[\sup_{x \in D_1} |F(x)| , |\alpha|] \leqslant \sup [M , |\alpha|]$$

On appelle B_I le point de coordonnées $(0 , v(S_I))$, premier sommet du polygone de $R_I(t) + \alpha$.

Le polygone de $F(b_I + t) + \alpha$ aura donc la forme suivante :



Etudions l'ensemble des côtés du polygone de Newton de $F^{(I)}(t) + \alpha$ qui se trouvent à gauche de OY : tous ces côtés ont une pente inférieure à celle de la tangente commune TT' au polygone de $f_I(t)$ et à celui de $R_I(t) + \alpha$, donc à celle de la tangente $B_I T$ au polygone de $f_I(t)$ issue de B_I : nous allons montrer que ces pentes tendent vers $- \infty$ quand I devient infini.

$f_I(t) \to 0$ uniformément en t dans $1 > |t| > r$ quand $I \to + \infty$, donc :

$\forall\, r \in \underset{\sim}{R}$ fixé, $\forall\, \lambda > 0$, $\exists\, I(r)$ tel que $I > I(r) \Rightarrow \inf_{v(t) < -\log_p r} v[f_I(t)] > \lambda$

Prenons $\lambda = - \log_p N$,

$\forall\, r$ fixé, $\exists\, I'(r)$ tel que $I > I'(r) \Rightarrow \inf_{v(t) \leqslant -\log_p r} v[f_I(t)] > - \log_p N$

Les tangentes au polygone de $f_I(t)$ issues d'un point de Y'OY situé au-dessous

du point d'ordonnée $-\log_p N$ seront alors de pente inférieure à $\log_p r$:

$$\forall\ \mu \in \underset{\sim}{R}\ ,\quad \exists\ J \text{ tel que } I > J \Rightarrow \text{pente de } B_I T < \mu$$

Pour $F^{(I)}(t) + \alpha$, nous avons l'inégalité :

$$v[F^{(I)}(t) + \alpha] \geqslant \inf[v[f_I(t)]\ ,\ v[\alpha + R_I(t)]] \geqslant \inf[v(M)\ ,\ v(\alpha)]$$

si $|t| = r$.

Soient alors $\{\varepsilon^I_\gamma\}_{\gamma \in A_I}$ les zéros de $F^{(I)}(t) + \alpha$ correspondant aux côtés du polygone qui se trouvent à gauche de $Y'OY$ (y compris la tangente TT').

A_I est un ensemble fini si b_I est un pôle d'ordre fini, et $\underset{\sim}{N}$ si b_I est un point singulier essentiel.

$$\forall\ \mu \in \underset{\sim}{R}\ ,\quad \exists\ J(\mu) \text{ tel que } I > J \Rightarrow \begin{array}{l} -v(\varepsilon^I_\gamma) < \mu\ ,\quad \forall\ \gamma \in A_I \\ v(\varepsilon^I_\gamma) > -\mu\ ,\quad \forall\ \gamma \in A_I \end{array}$$

Soient $a^I_\nu = b_I + \varepsilon^I_\nu$ les zéros correspondants de $F(x) + \alpha$:

$$\forall\ \mu \in \underset{\sim}{R}\ ,\quad \exists\ J(\mu) \text{ tel que } I > J = v(a^I_\nu - b_I) - \mu\ ,\quad \forall\ \nu \in A_I$$

$$\text{ou}\quad |a^I_\nu - b_I| < p^\mu$$

$$\text{ou}\quad \left|\frac{a^I_\nu}{b_I} - 1\right| < \frac{p^\mu}{r_1}$$

Donc :

$$\forall\ \varepsilon \in \underset{\sim}{R^+}\ ,\quad \exists\ J \text{ tel que } I > J \Rightarrow \left|\frac{a^I_\nu}{b_I} - 1\right| < \varepsilon\ ,\quad \forall\ \nu \in A_I\ .$$

Et par conséquent

$$\left|\prod_{\nu \in A_I} (a^I_\nu / b_I) - 1\right| < \varepsilon$$

($\prod_{\nu \in A_I} (a^I_\nu / b_I)$ est défini même si A_I est infini : les zéros de $\varepsilon^I_\gamma = a^I_\gamma - b_I$ de $F_I(t)$ tendent vers 0 lorsque ν devient infini, car le développement en série de Laurent de $F_I(t)$ converge pour tout $t \neq 0$) .

$\prod_{\nu \in A_I} (a^I_\nu / b_I)$ converge donc vers 1 quand I devient infini.

Nous savons donc que le produit infini :

$$\prod_{I \in \underset{\sim}{N}} \prod_{\nu \in A_I} ((x - a^I_\nu)/(x - b_I))$$

existe pour $x \notin \{b_I\}_{I \in \underset{\sim}{N}}$

Etudions la fonction :

$$H(x) = [F(x) + \alpha]\left[\prod_{i \in \underset{\sim}{N}} \prod_{\nu \in A_I} ((x - b_I)/(x - a^I_\nu))\right]$$

Elle n'a aucun zéro dans les cercles $C(b_I\ ,\ R)$ où

$$-\log_p R = \log_p N - \inf[v(M)\ ,\ v(\alpha)]$$

(Cette valeur correspond à la plus petite pente possible pour une tangente TT' ne passant pas par B_I).

Par conséquent aucun b_I ne peut être point singulier essentiel pour $H(x)$.

Supposons que $H(x)$ ait une infinité de pôles dans $C_{r_1}^{r_2}$. Nous pourrions alors réappliquer le procédé précédent : la pente de la tangente TT' devrait tendre vers 0 , ce qui donnerait des zéros dans une infinité de cercles $C(b_I , R)$, ce qui est impossible.

$H(x)$ n'a donc qu'un nombre fini de pôles dans $C_{r_1}^{r_2}$, et c'est une fonction analytique uniforme dans $C_{r_1}^{r_2}$ ($H(x)$ n'aura aussi, bien sûr, qu'un nombre fini de zéros dans $C_{r_1}^{r_2}$).

3. Application aux fonctions automorphes.

Soit $F(x)$ une fonction automorphe de période λ vérifiant les hypothèses (※) pour $r_2 = |\lambda| r_1$.

Posons

$$K(x) = \prod_{n\in\underset{\sim}{Z}} \prod_{I\in\underset{\sim}{N}} \prod_{\nu\in A_I} ((\lambda^n x - a_\nu^I)/(\lambda^n x - b_I))$$

$K(\lambda x) = K(x)$: K est automorphe de période λ . $(F(x) + \alpha)/K(x))$ est donc une fonction automorphe qui n'a qu'un nombre fini de pôles dans chaque couronne $C_r^{|\lambda| r}$, et elle peut être mise sous la forme [3] :

$$K(x) = C \prod_{n\in\underset{\sim}{Z}} \prod_{i\in\Lambda} (\lambda^n x - a'i)/(\lambda^n x - b_i)$$

C constante appartenant à k , Λ ensemble fini d'indices, et $\prod_{i\in\Lambda} (a_i'/b_i)=1$. D'où :

$$F(x) + \alpha = C\, K(x) \prod_{n\in\underset{\sim}{Z}} \prod_{i\in\Lambda} (\lambda^n x - a_i')/(\lambda^n x - b_i)$$

Soit encore, en réunissant Λ avec les A_i ,

$$F(x) + \alpha = C \prod_{n\in\underset{\sim}{Z}} \prod_{I\in\underset{\sim}{N}} \prod_{\nu\in A_I'} (\lambda^n x - a_\nu'^I)/(\lambda^n x - b_I) .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] KRASNER (Marc). - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets, Colloques internationaux du C. N. R. S. : Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres [143. 1964. Clermont-Ferrand], p. 97-141. - Paris, Centre national de la Recherche Scientifique, 1966.

[2] ROQUETTE (Peter). - Analytic theory of elliptic functions over local fields. - Göttingen, Vandenhoech und Ruprecht, 1970. (Hamburger mathematische Einzelschriften, 1).

[3] SARMANT (Marie-Claude). - Fonctions automorphes dans un corps valué non archimédien, Séminaire Delange-Pisot-Poitou ; Théorie des nombres, 11e année, 1969/70, 8 p.

(Texte reçu le 5 mars 1973)

Marie-Claude SARMANT
36 rue des plantes
75014 PARIS