

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

MARTINE PATHIAUX

Sur les multiples de polynômes irréductibles associés à certains nombres algébriques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 14, n° 1 (1972-1973),
exp. n° 13, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1972-1973__14_1_A11_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES MULTIPLES DE POLYNÔMES IRRÉDUCTIBLES
 ASSOCIÉS À CERTAINS NOMBRES ALGÈBRIQUES

par Martine PATHIAUX

Introduction.

Marthe GRANDET et Charles PISOT [3] ont démontré que tout nombre de Pisot Salem est racine d'un polynôme de $\mathbb{Z}[x]$ dont les coefficients sont majorés par $|\theta|$. On peut penser que cette propriété s'étend au cas où le nombre n'est plus entier algébrique ; en particulier, si on examine les plus petits éléments de $\mathbb{S}_q[1]$ qui sont zéros de $qz^3 + (q-1)z^2 - qz - q$, $qz^4 - z^3 - q$, $qz^5 - z^4 - qz^3 + qz^2 - q, \dots$ on constate qu'ils sont racines d'un polynôme (et même irréductible) dont les coefficients sont majorés par $q|\theta|$. On se propose donc d'établir le résultat suivant :

THÉOREME. - Soient $\theta_1, \dots, \theta_s$ les zéros d'un polynôme $B(x) \in \mathbb{Z}[x]$ irréductible, primitif, dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à q et tels que :

$$|\theta_1| \geq |\theta_2| \geq \dots \geq |\theta_r| > 1 \geq |\theta_{r+1}|, \dots, |\theta_s|$$

alors, $\theta_1, \dots, \theta_s$ sont zéros d'un polynôme de $\mathbb{Z}[x]$ dont les coefficients sont majorés par $q \prod_{1 \leq i \leq r} |\theta_i|$.

La démonstration de [3] utilise le principe des tiroirs, on pouvait donc penser que le lemme de Minkowski p -adique permettrait d'obtenir le résultat espéré (lemme obtenu par Françoise BERTRANDIAS [2] déduit de résultats de Elisabeth LUTZ).

LEMME de Minkowski p -adique. - Soient $n+1$ formes $L_i^0(x)$ linéaires en (x_0, \dots, x_n) , à coefficients complexes, de déterminant $\Delta_0 \neq 0$ et telles qu'avec chaque forme figure sa conjuguée ; soient $n+1$ nombres c_i réels positifs tels que $c_i = c_j$ si L_i^0 et L_j^0 sont conjuguées.

Soient J une famille finie de nombres premiers p et pour $\forall p \in J$, $n+1$ formes $L_i^p(x)$, linéaires en (x_0, \dots, x_n) , à coefficients dans \mathbb{Q}_p , de déterminant $\Delta_p \neq 0$.

Soient $\rho_{p,i} \in \mathbb{Z}$ tels que l'ensemble de \mathbb{Q}_p^{n+1} , défini par les conditions

$$|L_i^p(x)|_p \leq p^{-\rho_{p,i}}$$

soit contenu dans \mathbb{Z}_p^{n+1} , il existe alors $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_p^{n+1}$ non nul tel que

$$\begin{cases} |L_i^0(x)| < c_i & p \in J \\ |L_i^p(x)|_p \leq p^{-\rho_{p,i}} & 1 \leq i \leq n+1 \end{cases}$$

dès que

$$\prod_{i=1, \dots, n+1} c_i \prod_{p \in J} \prod_{i=1, \dots, n+1} p^{-\rho_{p,i}} > |\Delta_0| \prod_{p \in J} |\Delta_p|_p .$$

Pour démontrer ce lemme, on utilise les deux propriétés suivantes :

1° L'ensemble de \tilde{Z}^{n+1} vérifiant $|L_i^p(x)|_p \leq p^{-\rho_{p,i}}$ pour $i = 1, \dots, n+1$ est un sous-groupe G_p de \tilde{Z}^{n+1} dont l'indice m_p dans \tilde{Z}^{n+1} est égal à $\frac{1}{\text{mes } K_p}$ où

$$K_p = \{x \in \tilde{Z}_p^{n+1} \mid |L_i^p(x)|_p \leq p^{-\rho_{p,i}} \text{ pour } i = 1, \dots, n\}$$

2° La mesure d'un ensemble \mathcal{E} de \tilde{Q}_p^{n+1} défini par

$$\mathcal{E} = \{|\Delta_j(x)|_p \leq 1, x \in \tilde{Q}_p^{n+1}\}$$

où $\Delta_j(x)$ sont $n+1$ formes linéaires en (x_0, \dots, x_n) à coefficients p -adiques de déterminant $\Delta \neq 0$ est égal à

$$\text{mes } \mathcal{E} = \frac{1}{|\Delta|_p^{-1}} .$$

Le principe de la démonstration consiste à trouver des entiers

$$(d_0, \dots, d_n) \in \tilde{Z}^{n+1} ,$$

tels que le nombre rationnel $\prod_{i=1, \dots, s} d_n \theta_i^n + \dots + d_0$ soit petit, et tels que son dénominateur, qui est un diviseur de q^{ns} , soit petit ; ce qui sera réalisé si $|\prod_{i=1, \dots, s} d_n \theta_i^n + \dots + d_0|_p$ est petit pour $\forall p|q$.

Soient $\theta_{1,p}, \theta_{2,p}, \dots, \theta_{s,p}$ les racines de $B(x)$ dans Ω_p . On a :

$$\prod_{i=1, \dots, s} (d_n \theta_i^n + \dots + d_0) = \prod_{i=1, \dots, s} (d_n \theta_{i,p}^n + \dots + d_0) , \quad \forall p .$$

En particulier, si $p|q$, et si on range les racines telles que

$$|\theta_{1,p}|_p \geq \dots \geq |\theta_{s_p,p}|_p > 1 \geq |\theta_{s_p+1,p}|_p > \dots > |\theta_{s,p}|_p ,$$

alors, $s_p \geq 1$; il suffit de déterminer $d_0, \dots, d_n \in \tilde{Z}^{n+1}$ tels que

$$|d_n \theta_{i,p} + \dots + d_0|_p$$

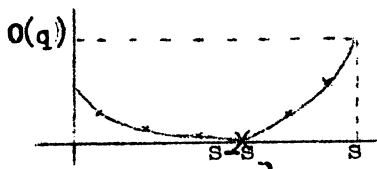
soit petit pour $p|q, 1 \leq i \leq s_p$.

Mais le théorème de Minkowski n'est vrai que si les coefficients des formes linéaires appartiennent à \tilde{Q}_p et en général, $\theta_{i,p} \in \Omega_p$. On introduit donc

$$(1) \quad a_{n,p} = \theta_{1,p}^n + \theta_{2,p}^n + \dots + \theta_{s_p,p}^n .$$

LEMME 1. - $a_{n,p} \in \tilde{Q}_p$: D'après les propriétés du polygone de Newton, $B(x)$ pour $p|q$ se décompose dans $\tilde{Q}_p[x]$ sous la forme :

$$B(x) = B_1(x) B_2(x) ,$$



polygone de Newton de B_1
polygone de Newton de B_2

où

$$(2) \quad \begin{aligned} B_1(x) &= qx^{s_p} + \dots + q'_{0,p} \in \mathbb{Q}_p[x] \\ B_2(x) &= x^{s_p-s_p} + \dots + q''_{0,p} \in \mathbb{Q}_p[x] \end{aligned}$$

avec $|q'_{0,p}| = 1$ et où $\theta_{1,p}, \dots, \theta_{s_p,p}$ sont les zéros de $B_1(x)$.

Donc $a_{n,p}$, qui est une fonction symétrique de $\theta_{1,p}, \dots, \theta_{s_p,p}$, s'exprime en fonction des coefficients de $B_1(x)$, donc appartient à \mathbb{Q}_p . De plus, $a_{n,p}$ vérifie

$$(3) \quad q_{n+s_p,p} a_{n+s_p,p} + \dots + q'_{0,p} a_{n,p} = 0 \quad \forall n \geq s_p.$$

LEMME 2. - Si $d_0, \dots, d_n \in \mathbb{Q}$ vérifient

$$I_p \begin{cases} |d_n a_{n,p} + \dots + d_0|_p \leq p^{-\mu_p} \\ \vdots \\ |d_n a_{n+s_p-1,p} + \dots + d_0 a_{s_p-1,p}|_p \leq p^{-\mu_p} \end{cases}$$

et si on pose

$$I_{p'} \begin{cases} |d_n \theta_{1,p}^n + \dots + d_0|_p \leq p^{-\lambda_p} \\ \vdots \\ |d_n \theta_{s_p,p}^n + \dots + d_0|_p \leq p^{-\lambda_p} \end{cases}$$

alors le système $I_{p'}$, est vérifié, où λ_p ne dépend que de μ_p et de
 $\theta_{1,p}, \dots, \theta_{s_p,p}$.

Si on pose $u_i = d_n \theta_{i,p}^n + \dots + d_0$ $1 \leq i \leq s_p$, on voit que le système I_p s'écrit

$$I_p \begin{cases} |u_1 + \dots + u_{s_p}|_p \leq p^{-\mu_p} \\ |u_1 \theta_1 + \dots + u_{s_p} \theta_{s_p}|_p \leq p^{-\mu_p} \\ \dots \\ |\theta_1^{s_p} u_1 + \dots + \theta_{s_p}^{s_p} u_{s_p}|_p \leq p^{-\mu_p} \end{cases}$$

En résolvant le système de Cramer en u_1, \dots, u_{s_p} dont le déterminant est $\prod_{i,j} (\theta_{i,p} - \theta_{j,p}) \neq 0$, $1 \leq i \leq s_p$, $1 \leq j \leq s_p$, $i \neq j$ puisque

$$\prod_{i,j} (\theta_i - \theta_j) = \prod_{i,j} (\theta_{i,p} - \theta_{j,p}) \neq 0, \quad 1 \leq i \leq s, \quad 1 \leq j \leq s, \quad i \neq j,$$

on obtient le résultat.

Dans l'application du lemme il y a une condition sur les constantes $\rho_{i,p}$, d'où le lemme suivant :

Notations. - On pose

$$\Delta_{n,p} = \begin{vmatrix} a_{n,p} & \dots & a_{n-s_p+1,p} \\ a_{n+s_p-1,p} & \dots & a_{n,p} \end{vmatrix}$$

On a en particulier

$$\Delta_{s_p-1,p} = \prod_{i,j} (\theta_{i,p} - \theta_{j,p})^2, \quad 1 \leq i \leq s_p, \quad 1 \leq j \leq s_p, \quad i \neq j$$

et soit $\mu_p \in \mathbb{Z}$ tel que

$$(4) \quad p^{\mu_p} = \sup_{\Delta^*} \frac{|\Delta_{s_p-1,p}^*|_p}{|\Delta_{s_p-1,p}|_p},$$

où Δ^* parcourt les mineurs de rang s_p-1 de $\Delta_{s_p-1,p}$.

LEMME 3. - L'ensemble (d_0, \dots, d_n) de \mathbb{Q}_p^{n+1} , défini par les inégalités

$$\begin{cases} |d_n a_{n,p} + \dots + d_0 a_{0,p}|_p \leq p^{-\mu_p} \\ \dots \\ \dots \\ |d_n a_{n+s_p-1,p} + \dots + d_0 a_{s_p-1,p}|_p \leq p^{-\mu_p} \\ |d_{n-s_p}|_p \leq 1 \\ \dots \\ |d_0|_p \leq 1 \end{cases}$$

où μ_p est définie par (4), est contenu dans \mathbb{Z}_p^{n+1} .

Soient $(d_0, \dots, d_n) \in \mathbb{Z}_p^{n-s_p+1} \times \mathbb{Q}_p^{s_p}$, solution du système et

$$(\alpha_0, \dots, \alpha_{s_p-1}) \in \mathbb{Q}_p^{s_p},$$

tels que $|\alpha_i| \leq p^{-\mu_p}$ et $d_n a_{n+k,p} + \dots + d_0 a_{k,p} = \alpha_k$.

En résolvant le système de Cramer en $d_n, d_{n-1}, \dots, d_{n-s_p+1}$, on obtient

$$d_{n-j} = \frac{1}{\Delta_{n,p}} \begin{vmatrix} a_{n,p} & \dots & a_{n-j+1,p} & \alpha_0 & a_{n-j-1,p} & \dots & a_{n-s_p+1,p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+s_p-1} & & a_{n-j+s_p,p} & \alpha_{s_p-1} & a_{n-j+s_p-1,p} & & a_{n,p} \end{vmatrix}$$

$$+ \frac{1}{\Delta_{n,p}} \sum_{i=0}^{n-s} d_i \begin{vmatrix} a_{n,p} & \dots & a_{n-j+1,p} & a_{i,p} & a_{n-j-1,p} & \dots & a_{n-s_p+1,p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+k,p} & & \vdots & a_{i+k,p} & \vdots & & a_{n+k-s_p+1,p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+s_p-1} & & a_{n-j+s_p,p} & a_{i+s_p-1,p} & a_{n-j+s_p-1,p} & & a_{n,p} \end{vmatrix}$$

En utilisant la formule de récurrence vérifiée par $a_{n,p}$ (3), on voit que

$$(5) \quad \Delta_{n,p} = \left(\frac{q_{0,p}}{q}\right)^{n+1-s_p} \Delta_{s_p-1,p}.$$

D'autre part, soit $\Delta_{n,p}^*$ un mineur de rang $s_p - 1$ de $\Delta_{n,p}$

$$\Delta_{n,p}^* = \begin{vmatrix} a_{n,p} & \cdots & a_{n-j+1,p} & a_{n-j-1,p} & a_{n-s_p+1,p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+l-1,p} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n+l-s_p,p} \\ a_{n+l+1,p} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n+l+2-s_p,p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+s_p-1,p} & a_{n-j+s_p,p} & a_{n-j+s_p-1,p} & a_{n,p} & \end{vmatrix}$$

En remplaçant la première colonne, en utilisant la relation

$$a_{n+k} = - \sum_{r=1}^{s_p} \frac{q_{s_p-r,p}}{q} a_{n+k-r},$$

on obtient

$$\Delta_{n,p}^* = (-1)^j \frac{q_{s_p-j,p}}{q} \Delta_{n-1,p}^* \frac{q_0}{q} \Delta_{n-1,p}^{**},$$

où $\Delta_{n-1,p}^*$ et $\Delta_{n-1,p}^{**}$ sont deux mineurs de rang $s_p - 1$ de $\Delta_{n-1,p}$. D'où

$$|\Delta_{n,p}^*|_p \leq \left|\frac{1}{q}\right|_p \sup_{\Delta^*} |\Delta_{n-1,p}^*|_p$$

et donc

$$(6) \quad |\Delta_{n,p}^*|_p \leq \left|\frac{1}{q}\right|_p^{n+1-s_p} \sup_{\Delta^*} |\Delta_{s_p-1,p}^*|_p = \left|\frac{1}{q}\right|_p^{n+1-s_p} p^{\mu_p} |\Delta_{s_p-1,p}|_p.$$

Les relations (5) et (6) permettent donc de majorer la première partie de d_{n-j} .

Montrons, d'autre part, qu'il existe $\beta_0^{(n)}, \dots, \beta_{s_p-1}^{(n)} \in \mathbb{Z}_p$, tels que

$$(7) \quad a_{i+k,p} = \beta_{s_p-1}^{(n)} a_{n+k-s_p+1,p} + \dots + \beta_0^{(n)} a_{n+k,p} \text{ pour } 0 \leq k \leq s_p - 1.$$

La propriété est vraie pour $n = s_p$, d'après la relation de récurrence vérifiée par $a_{i,p}$, et $|q_{0,p}|_p = 1$.

Supposons donc la propriété vraie pour le rang $(n-1)$, c'est-à-dire

$$a_{i+k,p} = \beta_{s_p-1}^{(n-1)} a_{n+k-s_p,p} + \dots + \beta_0^{(n-1)} a_{n+k-1,p}$$

avec $|\beta_i^{(n-1)}|_p \leq 1$, $0 \leq k \leq s_p - 1$.

En remplaçant $a_{n+k-s_p,p}$ dans cette relation par

$$a_{n+k-s_p,p} = - \left(\frac{q_{1,p}}{q_{0,p}}\right) a_{n+k+1-s_p,p} + \dots + \frac{q}{q_{0,p}} a_{n+k,p}$$

on obtiendra

$$a_{i+k,p} = \beta_{s_p-1}^{(n)} a_{n+k+1-s_p,p} + \dots + \beta_0^{(n)} a_{n+k,p},$$

avec

$$\beta_j^{(n)} = \beta_{j-1}^{(n-1)} - \frac{q_{s_p-j}}{q_{0,p}},$$

et donc $|\beta_j^{(n)}|_p \leq 1$.

Des relations (5), (6) et (7) on en déduit

$$|d_{n-j}|_p \leq \max\left(\left|\frac{q}{q_{0,p}}\right|_p^{n+1-s_p} \left|\frac{1}{q}\right|_p^{n+1-s_p}, 1\right) = 1,$$

pour $j = 0, 1, \dots, s_p - 1$, d'où le résultat.

Soient $D \neq 0$ le déterminant de Vandermonde, construit sur $(\theta_1, \dots, \theta_r)$ et D^* un majorant des mineurs de D de rang $r-1$ et $\delta = (rD^*)/D$.

LEMME 4. - Si $(d_0, \dots, d_r) \in \tilde{\mathbb{Z}}^{n+1}$ est solution du système

$$\left\{ \begin{array}{l} |d_n \theta_1^n + \dots + d_0| < A \\ |d_n \theta_2^n + \dots + d_0| < A \\ \dots \\ |d_n \theta_r^n + \dots + d_0| < A \\ d_{n-r} = 0 \\ \vdots \\ d_{n-t} = 0 \text{ où } t \geq r \\ |d_{n-t-1}| < B \\ \dots \\ |d_0| < B \end{array} \right.$$

où A et B vérifient

$$(8) \quad \delta \left(\frac{A}{|\theta_r|^{n-r+1}} + \frac{B}{|\theta_r|^{t-r+1} (|\theta_r| - 1)} \right) < 1,$$

alors $|d_i| < B$ pour $i = 0, \dots, n$.

Preuve. - Soit $(d_0, \dots, d_n) \in \tilde{\mathbb{Z}}^{n+1}$ une solution du système, on obtient alors

$$|d_n \theta_1^{r-1} + \dots + d_{n-r+1}| < \frac{A}{|\theta_r|^{n-r+1}} + \frac{B}{|\theta_r|^{t-r+1} (|\theta_r| - 1)}$$

...

$$|d_n \theta_r^{r-1} + \dots + d_{n-r+1}| < \frac{A}{|\theta_r|^{n-r+1}} + \frac{B}{|\theta_r|^{t-r+1} (|\theta_r| - 1)}$$

et en résolvant le système de Cramer en d_n, \dots, d_{n-r+1} on obtient

$$|d_k| < \delta \left(\frac{A}{|\theta_r|^{n-r+1}} + \frac{B}{|\theta_r|^{t-r+1} (|\theta_r| - 1)} \right) < 1$$

soit $d_k = 0$ pour $k = n, n-1, \dots, n-r+1$.

Démonstration du théorème. - Soient $\mu_p \in \mathbb{Z}$ définies par (4) pour $p|q$. On cherche à résoudre dans \mathbb{Z}^{n+1} le système

$$I \left\{ \begin{array}{l} |d_n \theta_1^n + \dots + d_0| < A \\ \dots \\ |d_n \theta_r^n + \dots + d_0| < A \\ |d_{n-r}| < 1 \\ \dots \\ |d_{n-t}| < 1 \\ |d_{n-t-1}| < B \\ \dots \\ |d_0| < B \\ |d_n a_{n,p} + \dots + d_0|_p \leq p^{-\mu_p} \\ \dots \\ |d_n a_{n+s_p-1,p} + \dots + d_0 a_{s_p-1,p}|_p \leq p^{-\mu_p} \quad \forall p|q \\ |d_{n-s_p}|_p \leq 1 \\ |d_0|_p \leq 1 \end{array} \right.$$

D'après le lemme de Minkowski et le lemme 3, ce système admet une solution dans \mathbb{Z}^{n+1} dès que

$$A^r B^{n-t} \prod_{p|q} p^{-\mu_p \cdot s_p} \geq |D| \cdot |\theta_1 \times \dots \times \theta_r|^{n-r+1} \prod_{p|q} |\Delta_{n,p}|_p,$$

mais d'après (5)

$$|\Delta_{n,p}|_p = \left| \frac{1}{q} \right|_p^{n+1-s_p} |\Delta_{s_p-1,p}|_p.$$

Il existe donc une constante γ , ne dépendant que de $\theta_1, \dots, \theta_s$, telle que, si

$$A^r B^{n-t} \geq \gamma \prod_{p|q} \frac{1}{|q|_p^n} \times |\theta_1 \times \dots \times \theta_r|^n,$$

alors le système I admet une solution dans \mathbb{Z}^{n+1} non nulle, ou encore

$$(9) \quad A^r B^{n-t} \geq \gamma q^r |\theta_1 \times \dots \times \theta_r|^n.$$

Supposons donc que, A, B, n, t , vérifient (9) et que $d_0, \dots, d_r \in \mathbb{Z}^{n+1}$ soit solution de I, en appliquant le lemme 2, on obtient

$$\prod_{p|q} \prod_{i=1, \dots, s} |d_n \theta_i^n + \dots + d_0|_p \leq \prod_{p|q} p^{-\lambda_p s_p} \leq \alpha,$$

où α ne dépend que de $\theta_1, \dots, \theta_s$.

Soit

$$\prod_{p|q} |\prod_{i=1, \dots, s} (d_n \theta_i^n + \dots + d_0)|_p \leq \alpha,$$

et si $\prod_{i=1, \dots, s} d_n \theta_i^n + \dots + d_0$ est différent de 0, on obtient

$$\left| \prod_{i=1, \dots, s} d_n \theta_i^n + \dots + d_0 \right| \geq \frac{1}{\alpha},$$

puisque

$$\prod_{p|q} \left| \prod_{i=1, \dots, s} d_n \theta_i^n + \dots + d_0 \right|_p \times \left| \prod_{i=1, \dots, s} d_n \theta_i^n + \dots + d_0 \right| \geq 1,$$

Mais, d'autre part, d'après le lemme 4, et si A, B, n, t vérifient (8) et (9), on a alors

$$\left| \prod d_n \theta_i^r + \dots + d_0 \right| < A^r (B.n + 1)^{s-r}.$$

Il suffit donc de déterminer des constantes n, A, B, t telles que

$$(10) \quad \begin{cases} A^r \cdot (B.n + 1)^{s-r} < 1/\alpha \\ \delta \left(\frac{A}{|\theta_r|^{n-r+1}} + \frac{B}{|\theta_r|^{t-r+1} (|\theta_r| - 1)} \right) < 1 \\ A^r B^{n-t} \geq \gamma q^n |\theta_1 \times \dots \times \theta_r|^n \end{cases}$$

et si ceci est réalisé, il existera $d_0, \dots, d_r \in \mathbb{Z}^{n+1}$ vérifiant

$$|d_i| < B \text{ pour } i = 0, \dots, r \text{ et } d_n \theta_i^r + \dots + d_0 = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, s.$$

Il suffit de choisir $B = [q|\theta_1, \dots, \theta_r|] + 1$, t assez grand, tel que

$$\frac{\delta ([q|\theta_1 \times \dots \times \theta_r|] + 1)}{|\theta_r|^{t-r+1} (|\theta_r| - 1)} < \frac{1}{2},$$

n assez grand, tel que

$$\frac{1}{2\alpha \cdot (n+1)^{s-r}} ([q|\theta_1 \times \dots \times \theta_r|] + 1)^{n-s+r-t} > \gamma |\theta_1 \times \dots \times \theta_r|^n q^n$$

et tel que $\frac{\delta}{(2\alpha)^{1/r}} \frac{1}{|\theta_r|^{n-r+1}} < \frac{1}{2}$. Et

$$A = \frac{1}{(2\alpha)^{1/r}} \left(\frac{1}{([q|\theta_1 \times \dots \times \theta_r|] + 1)(n+1)} \right)^{\frac{s}{r}-1}$$

Remarque. - Le théorème est encore vrai si le polynôme n'est pas irréductible ; il suffit de rajouter des inégalités dans le système.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMARA (M.). - Ensembles fermés de nombres algébriques (Thèse Sc. math., Paris, 1967).
- [2] BERTRANDIAS (Françoise). - Ensembles remarquables d'adèles algébriques, Bull. Soc. math., France, Mémoire 4, 1965, 104 p. (Thèse Sc. math., Paris, 1965).
- [3] HUGOT (Marthe GRANDET-) et PISOT (Charles). - Sur certains entiers algébriques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 246, 1958, p. 2831-2833.

- [4] LUTZ (Elisabeth). - Sur les approximations diophantiennes linéaires p -adiques.
- Paris, Hermann, 1955 (Act. scient. et ind., 1224 ; Publ. Inst. Math. Univ.
Strasbourg, 12).

(Texte reçu le 9 avril 1973)

Martine PATHIAUX
Avenue de Paris
78470 SAINT RÉMY LES CHEVREUSES
