JEAN-MARIE HASQUENOPH

Localisation des zéros de polynômes par rapport au cercle unité

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 13, n° 2 (1971-1972), exp. n° 24, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1971-1972__13_2_A9_0>

LOCALISATION DES ZÉROS DE POLYNÔMES PAR RAPPORT AU CERCLE UNITÉ

par Jean-Marie HASQUENOPH

Nous reprendrons ici la méthode exposée par Alain CONNES [2] pour étudier la relation existant entre la position des racines d'un polynôme par rapport au cercle unité, et la forme des coefficients de ce polynôme. De façon plus précise, on verra que ces coefficients satisfont certaines inégalités suivant que le polynôme n'a pas, ou n'a qu'un seul zéro à l'intérieur du cercle unité, et on verra également que la méthode se généralise aux polynômes à plusieurs variables d'une part, et aux polynômes réciproques d'autre part.

1. Polynômes sans racines dans le cercle unité.

k désigne un corps muni d'une valeur absolue $|.|$ (archimédienne ou non), k_v son complété, et Ω une clôture algébrique de k_v.

THÉORÈME 1. - *Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients dans k, et séparable (i. e. dont les racines sont distinctes). Une condition nécessaire et suffisante pour que $P(X)$ n'ait pas de racines dans, ou sur, le cercle unité de Ω est que P admette un multiple Q de la forme*

$$Q(X) = a_q X^q + a_{q-1} X^{q-1} + \dots + a_0 \quad \text{avec} \quad |a_0| > \sum_{i=1}^q |a_i|$$

Démonstration. - La condition est évidemment suffisante, puisque, si $|\theta| \leq 1$, on a

$$|a_q \theta^q + \dots + a_1| \leq \sum_{i=1}^q |a_i| < |a_0| , \text{ donc } Q(\theta) \neq 0 .$$

Pour la nécessité, supposons d'abord P irréductible, et soit

$$K = k[X]/(P(X)) = k(\theta) .$$

$P(X)$ se décompose en facteurs irréductibles $P(X) = P_1(X) \dots P_r(X)$ sur k_v, et si $K_1, \dots, K_r$ sont les extensions correspondantes de k_v

$$([K:k] = \sum_{i=1}^r [K_i:k_v]) ,$$

on posera $A = K_1 \times \dots \times K_r$. Le plongement canonique

$$\sigma : K \longrightarrow A$$
$$\alpha \longmapsto (\sigma_1(\alpha) , \dots , \sigma_r(\alpha)) ,$$

permet de considérer A comme le séparé complété de K (muni de la topologie produit sur k).

Soit $f(X) = \sum b_i X^i$. En posant $\|f\| = \sum |b_i|$, on définit sur $k[X]$ une norme d'algèbre ($\|fg\| \leq \|f\| \, \|g\|$) , qui induit sur K , par passage au quotient, une semi-norme d'algèbre

$$\|\bar{f}\| = \inf_{P|(f-g)} \|g\| ,$$

que l'on peut prolonger en une semi-norme sur l'algèbre A .

Si $\|1\| = 0$, il existe $g(X) \in k[X]$ tel que $\|1 + Pg\| < 1$, autrement dit

$$Q(X) = Pg = \sum_{i=0}^{q} b_i X^i - 1 \quad \text{avec} \sum |b_i| < 1 ,$$

ou encore

$$Q(X) = \sum_{i=0}^{q} a_i X^i \quad \text{avec} \quad |a_0| = |1 - b_0| > \sum_{i=1}^{q} |b_i| = \sum_{i=1}^{q} |a_i| ,$$

et l'on obtient bien le multiple cherché.

Il reste donc à montrer que l'on ne peut avoir $\|1\| \neq 0$.

Or l'ensemble des éléments de A de semi-norme nulle est un idéal de A , donc de la forme

$$A^J = \{y = (y_1 , \ldots , y_r) \in A = K_1 \times \ldots \times K_r \mid y_i = 0 \text{ pour tout } i \in J\} ,$$

où J est une partie de $\{1 , 2 , \ldots , r\}$, et la détermination de A^J repose sur le lemme suivant

LEMME. - Soient $U = \{y \in A \mid \|y\| \leq 1\}$ la boule unité de la semi-norme $\| \, \|$, et $p_i : A \dashrightarrow K_i$ la i-ième projection.

Alors $p_i(y) = y_i = 0$ pour tout $y \in A$ tel que $\|y\| = 0$ si, et seulement si, $p_i(U)$ est bornée dans K_i .

Supposons alors $\|1\| \neq 0$. On a $A^J \neq A$, donc il existe j tel que $\|y\| = 0$ entraîne $y_j = 0$, et $p_j(U)$ est bornée dans K_j . Or

$$\sigma(\theta^n) \in U \quad \text{et} \quad p_j(\sigma(\theta^n)) = \sigma_j(\theta^n) \longrightarrow \infty ,$$

puisque $|\sigma_j(\theta)| > 1$ par hypothèse ; d'où la contradiction.

Reste à établir le lemme, qui sera encore utile pour la suite.

Si $p_i(U)$ est bornée et $\|y\| = 0$, on a $\lambda y \in U$ pour tout $\lambda \in k_v$, donc $|p_i(y)| \leq c/|\lambda|$ et, pour $|\lambda| \dashrightarrow \infty$, on voit que $p_i(y) = 0$.

Réciproquement, si $p_i(y) = 0$ pour tout $y \in A^J$, p_i passe au quotient $A/A^J \xrightarrow{p_i} K_i$, et $\| \, \|$ induit sur le k_v espace vectoriel A/A^J une norme équivalente à la norme $\|\alpha\|_\infty = \sup |\lambda_i|$, où $\alpha = \sum \lambda_i e_i$, après choix d'une base (e_i) de A/A^J .

Il est facile de voir alors que $p_i(U)$ est bornée.

Dans le cas où P n'est pas irréductible, mais n'admet que des racines simples, le quotient $K = k[X]/(P(X))$ est un produit $K'_1 \times \ldots \times K'_s$ d'extensions finies de k , et il suffit de remplacer le plongement $\sigma : K \dashrightarrow A$ par

$$\sigma : K = K'_1 \times \ldots \times K'_s \dashrightarrow A = A_1 \times \ldots \times A_s .$$

2. Polynômes à plusieurs variables.

Par une méthode analogue, on peut généraliser le résultat précédent pour des polynômes à plusieurs variables, à coefficients dans $\underset{\sim}{Q}$.

THÉORÈME 2. - Une condition nécessaire et suffisante pour que

$$P(X_1 , \dots , X_n) \in Q[X_1 , \dots , X_n]$$

n'ait aucun 0 dans le polydisuo unité $\{z = (z_1 , \dots , z_n) \in C^n \mid |z_i| \leqslant 1\}$ est que P admette un multiple de la forme

$$Q(X_1 , \dots , X_n) = \sum a_{i_1 \dots i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n} - 1 = \sum a_{(i)} X^{(i)} - 1$$

avec $\sum |a_{(i)}| < 1$ et $a_{(i)} \in \underset{\sim}{Q}$.

Démonstration. - Comme précédemment, posons

$$\|f\| = \sum |b_{(i)}| \quad \text{pour} \quad f(X_1 , \dots , X_n) = \sum b_{(i)} X^{(i)} .$$

Par passage au quotient, on obtient sur $A = \underset{\sim}{Q}[X_1 , \dots , X_n]/(P(X_1 , \dots , X_n))$, une semi-norme d'algèbre ; soient N l'idéal des éléments de semi-norme nulle et $A' = A/N$. Si $\|1\| = 0$, on obtient le multiple cherché Q comme dans le cas d'une variable. Sinon A' est une algèbre normée commutative sur $\underset{\sim}{Q}$, non réduite à $\{0\}$. Soient $\hat{A}'$ son complété (algèbre normée sur $\underset{\sim}{C}$) , et $\hat{\chi} : \hat{A}' \dashrightarrow \underset{\sim}{C}$ un caractère de cette algèbre. Soit χ le composé

$$\begin{array}{l} \chi : \underset{\sim}{Q}[X_1 , \dots , X_n] \longrightarrow A \xrightarrow{\subset} A' \xrightarrow{\subset} \hat{A}' \xrightarrow{\hat{\chi}} \underset{\sim}{C} \\ X_i \longmapsto \alpha_i \longmapsto \alpha_i' \longmapsto \alpha_i' \longmapsto \hat{\chi}(\alpha_i') = \chi(X_i) . \end{array}$$

Alors

$$|\chi(X_i)| = |\hat{\chi}(\alpha_i')| \leqslant \|\alpha_i'\|_{A'} = \|\alpha_i\|_A \leqslant \|X_i\| = 1 \quad \text{pour tout} \quad i ,$$

et $(\chi(X_1) , \dots , \chi(X_n))$ est un zéro de P contenu dans le polydisque unité, contrairement à l'hypothèse, ce qui achève la démonstration.

3. Polynômes ayant un seul zéro à l'intérieur du cercle unité.

Dans tout ce qui suit, la méthode repose encore sur l'étude d'une certaine semi-norme, dont la définition exige cette fois la notion de convexité dans le corps K . C'est pourquoi nous nous limiterons au cas $k = \underset{\sim}{Q}$.

THÉORÈME 3. - Une condition nécessaire et suffisante pour que $P(X) \in \underset{\sim}{Q}[X]$ à racines distinctes ait une seule racine θ à l'intérieur du cercle unité $(|\theta| < 1)$ et toutes les autres à l'extérieur $(|\theta^{(2)}| > 1 , \dots , |\theta^{(p)}| > 1)$, est que P admette un multiple Q de la forme

$$Q(X) = a_q X^q + \dots + a_1 X + a_0 \quad \text{avec} \quad a_i \in \underset{\sim}{Q} \quad \text{et} \quad |a_1| > \sum_{i \neq 1} |a_i| .$$

Si, de plus, P est de degré p , on peut choisir Q de telle sorte que p + 1 , au plus, des coefficients a_i soient non nuls.

Démonstration. - La condition est évidemment suffisante en vertu du théorème de

Rouché. Pour la nécessité, nous supposerons d'abord P irréductible de degré p, de racines $\theta = \theta^{(1)}$ (avec $|\theta| < 1$), et $\theta^{(2)}, \dots, \theta^{(p)}$ (avec $|\theta^{(j)}| > 1$).

Les quelques notions élémentaires sur les espaces vectoriels topologiques utilisées ici se trouveront par exemple dans [1], ou [3], Chap. IV.

Dans le corps $K = \underset{\sim}{Q}(\theta)$, considérons

$$B = \{\textstyle\sum_{\text{finies}} a_i\, \theta^i \mid \sum |a_i| \leqslant 1\} .$$

Il est facile de vérifier que B est :

- convexe (dans K considéré comme espace vectoriel sur $\underset{\sim}{Q}$),
- équilibré (i. e. $\lambda B \subset B$ pour tout $\lambda \in \underset{\sim}{Q}$, $|\lambda| \leqslant 1$),
- absorbant (i. e. $\forall\, x \in K$, $\exists\, \lambda \in \underset{\sim}{Q}$ tel que $\lambda\, x \in B$), car les θ^j engendrent le corps K,
- stable par produit.

Alors la jauge de B,

$$\|x\| = \inf_{\underset{\sim}{R}^+} \{|\lambda| \mid x \in \lambda B , \ \lambda \in \underset{\sim}{Q}\} ,$$

définit, sur le Q-espace-vectoriel K muni de la topologie produit sur $\underset{\sim}{Q}$, une semi-norme continue, dont la boule unité $U = \{x \mid \|x\| \leqslant 1\}$ est l'adhérence de B.

$\theta = \theta^{(1)}, \dots, \theta^{(s)}$, désignant les racines réelles de P,
$\theta^{(s+1)}, \bar{\theta}^{(s+1)}, \dots, \theta^{(s+t)}, \bar{\theta}^{(s+t)}$ les racines complexes,
on peut considérer $A = \underset{\sim}{R}^s \times \underset{\sim}{C}^t$ comme le séparé complété de K pour la topologie produit, et le plongement canonique

$$\sigma : K \longrightarrow A = \underset{\sim}{R}^s \times \underset{\sim}{C}^t ,$$

permet de prolonger la semi-norme définie sur K en une semi-norme d'algèbre de A.

Déterminons l'idéal A^J des éléments $y = (y_1, \dots, y_{s+t})$ de A de semi-norme nulle. D'après le lemme, on a, en désignant par U' la boule unité de $\|\ \|$ dans A :

$j \in J \Longleftrightarrow p_j(U')$ borné (dans $\underset{\sim}{R}$ ou $\underset{\sim}{C}$),
$\Longleftrightarrow p_j(U' \cap \sigma(K)) = p_j(\sigma(\bar{B}))$ borné (car $\sigma(K)$ dense dans A),
$\Longleftrightarrow$ l'ensemble des $\sum a_i(\sigma_j(\theta^i))$ avec $\sum |a_i| \leqslant 1$ est borné,
$\Longleftrightarrow j = 1$ puisque $|\theta^{(j)}|^i \longrightarrow +\infty$ pour $j \neq 1$.

Donc $J = \{1\}$. Désignons par $e_1, \dots, e_p$ la base canonique de A sur $\underset{\sim}{R}$. On a $\|e_2\| = \dots = \|e_p\| = 0$, d'où

$$\|y\| = \|y_1\, e_1 + \dots + y_p\, e_p\| \leqslant |y_1|\ \|e_1\|$$

$$\text{et} \quad \|y_1\, e_1\| = \|y - (y_2\, e_2 + \dots + y_p\, e_p)\| \leqslant \|y\| ,$$

ce qui montre que $\|y\| = K|y_1|$.

Pour déterminer K, remarquons que $1 \in B$, donc $\|1\| = K \leqslant 1$, et comme

$\|1\| \neq 0$, l'inégalité $\|1.1\| \leqslant \|1\|.\|1\|$ entraîne $\|1\| \geqslant 1$, donc $K = 1$.

On en déduit $\|\theta\| = |\theta| < 1$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{Q}$, $0 < \lambda < 1$ tel que

$$\theta = \lambda \textstyle\sum_i b_i \theta^i \ , \quad 0 \leqslant i \leqslant n, \text{ avec } \sum |b_i| \leqslant 1 \ ,$$

et θ , qui est dans l'enveloppe convexe des $\pm \lambda b_i \theta^i$, est en fait dans l'enveloppe convexe de $p + 1$ seulement d'entre eux. De plus, pour un certain $\lambda' \in \mathbb{Q}$, $\lambda' \geqslant 1$, θ se trouve sur le bord de cette enveloppe, donc dans l'enveloppe convexe de p points seulement, ce qui permet d'écrire $\theta = \sum a_i \theta^i$, où p seulement des a_i sont nuls, et $\sum |a_i| < 1$, ce qui achève la démonstration.

Si P n'est pas irréductible, on a $P = P_1 \dots P_\ell$ et on remplace K par le produit $K = K(\theta_1) \times \dots \times K(\theta_\ell)$ (avec $|\theta_1| < 1$, $|\theta_2| > 1$, ... , $|\theta_\ell| > 1$) .

Si $\theta = (\theta_1 , \dots , \theta_\ell)$, les θ^n engendrent le $\mathbb{Q}$-espace-vectoriel K (théorème chinois), et on considère

$$B = \{\textstyle\sum a_i \theta^i \in K \ , \ \sum |a_i| \leqslant 1\} \ .$$

Les ℓ plongements $K(\theta_i) \longrightarrow \mathbb{R}^{s_i} \times \mathbb{C}^{t_i}$ définissent un plongement canonique $K \xrightarrow{\sigma} \mathbb{R}^s \times \mathbb{C}^t$, et l'on procède comme précédemment.

Remarques. - La méthode précédente est descriptive et ne permet pas la détermination explicite du polynôme Q . Cependant, par des calculs purement algébriques (et donc valables dans un corps k muni d'une valeur absolue quelconque), Martine PATHIAUX [5], a obtenu une méthode effective pour trouver le multiple d'un polynôme P séparable, de degré p , ayant toutes ses racines, sauf une, à l'intérieur du cercle unité. On obtient alors Q sous la forme

$$Q(X) = a_q X^q + a_{q-1} X^{q-1} + a_{p-2} X^{p-2} + \dots + a_0 \quad \text{avec} \quad |a_{q-1}| > \textstyle\sum_{i \neq q-1} |a_i| \ ,$$

et l'on est assuré de l'existence de ce polynôme dès que $q > 1 - c/\log |\theta_2|$, où c est une constante qui ne dépend que du degré p de P , de la racine θ à l'extérieur du cercle unité, et du discriminant du corps $k(\theta)$, et où θ_2 est la racine à l'intérieur du cercle unité de plus grand module.

A titre d'exemple, le polynôme irréductible du plus petit nombre de Pisot, $P(X) = X^3 - X - 1$ admet pour multiple le polynôme

$$Q(X) = 37X^{18} - 49X^{17} + 3X^2 - 7 \ .$$

Les mêmes calculs s'appliquent également aux polynômes dont toutes les racines sont à l'intérieur du cercle unité. On trouve cette fois Q sous la forme

$$Q(X) = a_q X^q + a_{p-1} X^{p-1} + \dots + a_0 \quad \text{avec} \quad |a_q| > \textstyle\sum_{i=0}^{p-1} |a_i| \ ,$$

et l'on est assuré de l'existence de Q pour

$$q > - \frac{\log \rho}{\log p^2 \gamma^{p-1}} \quad \text{où} \quad \rho = \max|\theta_i| < 1 \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1 - \rho^{2p}}{1 - \rho^2} \ .$$

Par contre, cette méthode de calcul ne s'applique pas dans les deux cas étudiés ci-après.

4. Polynômes réciproques.

Soit $P(X) = X^{2p} P(1/X) = a_0 X^{2p} + \dots + a_{p-1} X^{p+1} + 2a_p X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \dots + a_0$ un polynôme réciproque. Le théorème de Rouché montre que, si $|a_p| \geqslant \sum_i |a_i|$, $0 \leqslant i \leqslant p-1$, P admet exactement p zéros à l'intérieur du cercle unité, donc p à l'extérieur, et aucun sur le cercle. La méthode de CONNES permet alors de montrer le résultat suivant.

THÉORÈME 4. - Une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$, réciproque et de degré $2p \geqslant 4$, de racines distinctes, n'admette aucun zéro sur le cercle unité, est qu'il admette un multiple réciproque Q de la forme :

$$Q(X) = X^{2q} Q(1/X) = b_0 X^{2q} + \dots + 2b_q X^q + b_{q-1} X^{q-1} + \dots + b_0 ,$$

avec $|b_q| > \sum_{i=0}^{q-1} |b_i|$.

De plus, on peut choisir les b_i de sorte que $p+1$ au plus d'entre eux soient non nuls.

D'autre part, un résultat de COHN [5], dont la démonstration est basée sur le théorème de Rouché, montre que le polynôme $P(X)$ ci-dessus admet, à l'intérieur du cercle unité, autant de zéros que le polynôme

$$P_1(X) = X^{2p-1} P'(1/X) .$$

Il résulte facilement de cette règle que, pour $|a_{p-1}| > p \sum_{i \neq p-1} |a_i|$, $P(X)$ admet exactement 2 racines sur le cercle unité, $p-1$ à l'intérieur et $p-1$ à l'extérieur. Nous démontrerons le théorème ci-dessous.

THÉORÈME 5. - Soit $P(X)$ un polynôme réciproque séparable, de degré $2p \geqslant 4$, admettant exactement 2 racines sur le cercle unité. Alors P admet un multiple Q réciproque de la forme :

$$Q(X) = b_{2q} X^{2q} + \dots + b_{q-1} X^{q+1} + 2b_q X^q + b_{q-1} X^{q-1} + \dots + b_0 ,$$

avec $|b_{q-1}| > \sum_{i \neq q-1} |b_i|$. On peut choisir Q de sorte que $p+1$ au plus des b_i soient non nuls.

On remarquera que la règle indiquée ci-dessus ne permet malheureusement pas de conclure quant au nombre de racines du polynôme Q sur le cercle unité.

Démonstration du théorème 5. - Soient τ et $\bar{\tau} = 1/\tau$ les racines de module 1. Posons $T = \tau + 1/\tau$, et désignons par $T^{(j)}$ les conjugués de T.

Nous considérerons cette fois le corps $K = \mathbb{Q}(T)$ de degré p, et dans ce corps l'ensemble

$$B = \{\sum a_i T_i \mid a_i \in \mathbb{Q} , \sum |a_i| \leqslant 1\},$$

où l'on a posé $T_n = \tau^n + 1/\tau^n$. Les T_n engendrent K et satisfont la relation

$$T_n T_m = T_{n+m} + T_{n-m} ,$$

d'où l'on déduit $B.B \subset 2B$, ce qui montre que la jauge de B vérifie l'inégalité $\|x_1 x_2\| \leq 2\|x_1\|.\|x_2\|$.

Enfin il est immédiat que

$|T_n| < 2$ pour tout n , et $|T_n^{(j)}| \longrightarrow +\infty$ pour $n \longrightarrow \infty$ $(j = 2 , \ldots , p)$.

Comme dans le § 3, on montre alors que la semi-norme ne dépend que de la première composante, avec cette fois

$$\|1\| = 1/2 \quad \text{et} \quad \|T\| = 1/2|T| < 1 ,$$

et la démonstration s'achève de la même manière.

Pour le cas du théorème 4, comme aucun des $|T_n^j|$ ne reste borné, on obtient, comme dans le § 1, que $\|1\| = 0$.

5. Polynômes tels que $P(X) = \pm X^m P(-(1/X))$.

En éliminant le cas où $\pm i$ est racine, on voit qu'un tel polynôme est en fait de la forme

$$P(X) = (-1)^p X^{2p} P(-(1/X)) ,$$

donc s'écrit $P(X) = a_0 X^{2p} + a_1 X^{2p-1} + \ldots + 2a_p X^p - a_{p-1} X^{p-1} + \ldots + (-1)^p a_0$.
Les racines réelles se groupent par 2 : τ et $-1/\tau$, et les racines complexes, y compris celles sur le cercle unité, se groupent par 4 : $\tau , -1/\tau , \bar{\tau} , -1/\bar{\tau}$.

Lorsque $|a_p| > \sum_i |a_i|$, $0 \leq i \leq p-1$, le théorème de Rouché montre encore qu'il n'y a pas de racines sur le cercle unité, mais nous ne connaissons pas d'analogue au théorème de Cohn pour les autres cas. Par contre, la méthode appliquée aux polynômes réciproques s'applique de la même manière, à condition simplement de remplacer T et T_n par $T' = \tau - 1/\tau$ et $T'_n = \tau^n + (-1)^n 1/\tau^n$, ce qui conduit aux deux résultats suivants :

THÉORÈME 6. - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$, à racines distinctes, de degré 2p et satisfaisant à la condition $P(X) = (-1)^p X^{2p} P(-1/X)$ n'admette aucun zéro sur le cercle unité, est qu'il admette un multiple de la forme :

$$Q(X) = b_0 X^{2q} + \ldots + 2b_q X^q - b_{q-1} X^{q-1} + \ldots + (-1)^q b_0 ,$$

dans lequel $P + 1$ au plus des b_i sont non nuls, et $|b_q| > \sum_i |b_i|$, $0 \leq i \leq q-1$.

THÉORÈME 7. - Sous les mêmes hypothèses, si P(X) admet exactement 4 racines $(\tau , \bar{\tau} , -1/\tau , -1/\bar{\tau})$ sur le cercle unité, il admet un multiple

$$Q(X) = b_0 X^{2q} + \ldots + 2b_q X^q - b_{q-1} X^{q-1} + b_{q-2} X^{q-2} + \ldots + (-1)^q b_0 ,$$

dans lequel $|b_{q-2}| > \sum_{i \neq q-2} |b_i|$.

Par exemple, $X^4 + X^3 + X^2 - X + 1$, sans racines sur le cercle unité, admet pour multiple $X^8 - X^7 + 7X^4 + X + 1$, tandis que $X^4 + X^2 + 1$, dont les 4 racines sont sur le cercle unité, admet pour multiple $X^6 + 4X^5 + 4X^3 + 4X - 1$.

Parmi les problèmes ouverts, il serait intéressant d'obtenir des énoncés analogues pour les polynômes réciproques ayant toutes leurs racines sur le cercle unité, ou toutes sauf deux racines réelles τ et $1/\tau$. Dans les cas des § 1 et 2, il faudrait pouvoir obtenir un multiple Q unitaire, c'est-à-dire dans lequel $a_q = 1$, les autres coefficients a_i étant entiers.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Espaces vectoriels topologiques. Chap. 1-2. - Paris, Hermann, 1953 (Act. scient. et ind., 1189 ; Bourbaki, 15).

[2] CONNES (Alain). - Ordres faibles et localisation de zéros de polynôme, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 12e année, 1970/71, n° 18, 11 p.

[3] GARSOUX (Julien). - Espaces vectoriels topologiques et distributions. - Paris, Dunod, 1963 (Collection universitaire de mathématiques, 13).

[4] MARDEN (Morris). - The geometry of the zeros of polynomial in a complex variable. - New York, American mathematical Society, 1949 (Mathematical Surveys, 3).

[5] PATHIAUX (Martine). - Détermination effective des polynômes de Connes relativement à un nombre de Pisot, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 13e année, 1971/72 : Groupe d'étude de théorie des nombres, n° G5.

(Texte reçu le 12 juin 1972)

Jean-Marie HASQUENOPH
7 rue des Sources
77400 LAGNY