MARIE-FRANCE GUÉHO

Quaternions et $\zeta_k(-1)$

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 13, nº 2 (1971-1972), exp. nº 14, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1971-1972__13_2_A2_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
13e année, 1971/72, n° 14, 7 p.

14 février 1972

QUATERNIONS ET $\zeta_k(-1)$

par Marie-France GUÉHO

En 1937, EICHLER donne une formule reliant le nombre h de classes d'idéaux d'un corps de quaternions totalement défini sur un corps de nombres k et la valeur $\zeta_k(-1)$ au point -1 de la fonction zêta du corps k. Nous allons donner une forme nouvelle à ces résultats et en déduire des propriétés de h et de $\zeta_k(-1)$.

1. Groupe de Brauer.

Définitions.

- Une algèbre H de dimension finie sur un corps k est appelée une algèbre centrale simple sur k s'il existe un corps gauche D, de centre k, tel que H soit k-isomorphe à une algèbre de matrices sur D.

- Deux algèbres centrales simples sur k sont dites équivalentes si les corps gauches qui leur sont associés sont k-isomorphes.

- Le produit tensoriel munit par passage au quotient l'ensemble des classes d'une structure de groupe abélien ; ce groupe est le groupe de Brauer de k. On le note $Br(k)$.

Exemples.

- Si k est un corps fini ou algébriquement clos, $Br(k) = 0$.

- $Br(R) = Z/2Z$.

- Si k est un corps complet pour une valuation discrète à corps résiduel fini, on montre que :

$Br(k) = Q/Z$;

L'image dans $Br(k)$ d'un corps gauche de centre k, de dimension n^2 sur k, est de la forme a/n, avec $(a, n) = 1$;

Si L est une extension de k de degré ℓ, l'application de $Br(k)$ dans $Br(L)$, obtenue par extension des scalaires de k à L, est $\alpha \longrightarrow \ell\alpha$.

Groupe de Brauer d'un corps de nombres. - Si k est un corps de nombres, pour toute place v de k, notons k_v le complété de k pour la topologie définie par v. On montre que $Br(k)$ s'injecte naturellement dans $\bigoplus_v Br(k_v)$ et que la suite ci-dessous est exacte :

$$0 \longrightarrow Br(k) \longrightarrow \bigoplus_v Br(k_v) \xrightarrow{\sigma} Q/Z \longrightarrow 0 ,$$

où σ est l'application définie par $\sigma((\alpha_v)) = \sum_v \alpha_v$.

Soit H une algèbre centrale simple sur k . Une place v de k est dite ramifiée dans H si l'image α_v de $H \otimes_k k_v$ dans $Br(k_v)$ n'est pas nulle. Si H est de dimension 4 sur k , alors $\alpha_v = 0$ ou $1/2$, et l'exactitude de la suite montre que le nombre de places ramifiées est pair. Lorsque k est totalement réel et que toute place réelle de k est ramifiée dans H , on dit que H est un corps de quaternions totalement défini sur k , et H est caractérisé par l'ensemble des places finies de k qui se ramifient.

2. Ordres maximaux et idéaux. Norme réduite.

Soient k un corps de nombres, d'anneau d'entiers A , et H une algèbre centrale simple sur k , de dimension n^2 sur k .

Ordres et idéaux.

Un réseau de A dans H est appelé un ordre de H s'il contient 1 et si c'est un anneau d'entiers. Tout ordre est contenu dans un ordre maximal ; les ordres considérés dans la suite seront toujours des ordres maximaux.

Soit O un ordre ; un O-module à gauche P , projectif, de type fini, est appelé un idéal à gauche de O . Soit $P^{-1} = \{x \in H \mid Px \in O\}$, alors $O' = P^{-1}P$ est un ordre maximal, l'idéal P (resp. P^{-1}) à gauche de O (resp. O') est à droite de O' (resp. O). Si $P \subset O$, on dit que P est un idéal entier.

Deux idéaux P et P' sont dits équivalents s'il existe $x \in H$ tel que $P' = Px$. Leurs ordres à droite vérifient $P'^{-1}P' = x^{-1}P^{-1}Px$. Deux ordres O et O' tels que $O' = x^{-1}Ox$ sont dits du même type. Le nombre h des classes des idéaux à gauche d'un ordre est fini, indépendant du choix de l'ordre et appelé le nombre de classes d'idéaux de H .

Norme réduite. - Soit K un corps algébriquement clos contenant k , on sait que $H \otimes_k K$ est K-isomorphe à $M_n(K)$. On note i l'injection naturelle de H dans $H \otimes_k K$, et λ un K-isomorphisme de $H \otimes_k K$ sur $M_n(K)$. Si $x \in H$, le déterminant de $\lambda \circ i(x)$ est indépendant du choix de λ , K , appartient à k , et est appelé la norme réduite de x . On le note $Nrd(x)$. Si P est un idéal à gauche de O , pour toute place finie v de k , on note P_v (resp. O_v) l'image de P (resp. de O) dans $H \otimes_k k_v$. On sait qu'il existe $b_v \in H \otimes_k k_v$ tel que $P_v = O_v b_v$. Par définition, la norme réduite de P est

$$Nrd(P) = \prod_v (Nrd(b_v)) .$$

3. Formule d'Eichler.

Nous supposons dans la suite que H désigne un corps de quaternions totalement défini sur un corps de nombres k . La relation d'équivalence considérée dans le groupe des idéaux de k est l'équivalence au sens restreint.

La fonction zêta de H relative à une classe R d'idéaux à gauche d'un ordre O est définie par

$$\zeta_H(s\ ,\ R) = \sum_P [N_{k/Q} \circ \mathrm{Nrd}(P)]^{-2s}\ ,$$

où $N_{k/Q}$ est la norme absolue de k , et où P parcourt l'ensemble des idéaux entiers de la classe R . La fonction zêta de H est

$$\zeta_H(s) = \sum_R \zeta_H(s\ ,\ R)\ .$$

Ces fonctions sont méromorphes dans C , et ont pour résidu au point 1 :

$$\lim_{s=1}(s-1)\ \zeta_H(s\ ,\ R) = \lambda/w_R\ ,$$

$$\lim_{s=1}(s-1)\ \zeta_H(s) = \lambda/2^{n-1}\ h_k\ \zeta_k(-1) \prod_{y|\Delta_H} (1 - N_{k/Q}(y))\ ,$$

où :

w_R est l'indice dans le groupe des unités de l'ordre à droite d'un idéal de classe R , du sous-groupe formé par les unités de k ,

λ est une constante ne dépendant que du corps k ,

h_k , $\zeta_k(\cdot)$, n désignent respectivement le nombre de classes d'idéaux (au sens ordinaire), la fonction zêta, le degré absolu du corps k ,

Δ_H est le produit des idéaux premiers de k correspondant aux places finies ramifiées dans H .

On pose :

$$\zeta_k^{(H)}(-1) = \zeta_k(-1)\prod_{y|\Delta_H}(1 - N_{k/Q}(y))\ ,$$

et on obtient la formule d'Eichler en écrivant l'égalité entre résidus

$$\lim_{s=1}(s-1)\ \zeta_H(s) = \sum_R \lim_{s=1}(s-1)\ \zeta_H(s\ ,\ R)\ .$$

FORMULE D'EICHLER. - Avec les notations précédentes,

$$\zeta_k^{(H)}(-1) = 2^{n-1}/h_k \sum_R 1/w_R\ .$$

La norme réduite définissant un homorphisme surjectif de H^* (H privé de 0) sur le groupe des éléments de k totalement positifs, les idéaux de classe R ont leurs normes réduites équivalentes dans k (au sens restreint). On peut écrire :

$$\sum_R 1/w_R = \sum_X \sum_{\mathrm{Nrd}(R)\subset X} 1/w_R\ ,$$

avec X parcourant l'ensemble des classes d'idéaux de k .

Nous allons montrer que $\sum_{\mathrm{Nrd}(R)\subset X} 1/w_R$ est indépendant du choix de X .

Soit P' , un idéal à gauche de O , de norme réduite dans X^{-1} , d'ordre à droite O' . L'application $Q \longrightarrow P'Q$ définit par passage au quotient une bijection de l'ensemble des classes des idéaux à gauche de O' , de norme réduite dans X , sur l'ensemble des classes des idéaux à gauche de O , de norme réduite principale. Mais $\sum_{\mathrm{Nrd}(R)\subset X} \zeta_H(s\ ,\ R)$ est indépendant du choix de l'ordre O , il en est de même pour son résidu au point $s = 1$. La bijection précédente montre que ce résidu est aussi indépendant du choix de la classe X . On obtient

$$\zeta_k^{(H)}(-1) = 2^{n-1}\, h_k^+/h_k \sum_{\mathrm{Nrd}(R)\subset X} 1/w_R ,$$

où h_k^+ est le nombre de classes d'idéaux de k (au sens restreint).

Nous remarquons que w_R ne dépend que du type T des ordres à droite des idéaux de classe R, aussi nous le notons w_T, et en appelant $\mathcal{T}_X$ l'ensemble des types des ordres à droite des idéaux de norme réduite dans X, l'égalité précédente s'écrit

$$\zeta_k^{(H)}(-1) = 2^{n-1}\, h_k^+/h_k \sum_{T\in\mathcal{T}_X} n_T/w_T ,$$

où n_T est le nombre de classes des idéaux de norme réduite dans X, dont l'ordre à droite est du type T. L'application $X \longrightarrow \mathcal{T}_X$ définit sur l'ensemble des types d'ordres de H, une partition telle que deux types d'ordres T et T' sont équivalents (c'est-à-dire, appartiennent à un même $\mathcal{T}_X$) si et seulement s'il existe un idéal P de norme réduite principale, à gauche d'un ordre du type T, à droite d'un ordre du type T'. Donc n_T ne dépend que de la classe du type T.

Considérons maintenant un idéal P, de norme réduite dans X, dont l'ordre à droite O' est du type T ; l'application $Q \longrightarrow PQ$ définit par passage au quotient une bijection des classes des idéaux de norme réduite principale, bilatères de O', sur les classes des idéaux de norme réduite dans X, dont l'ordre à droite est du type T.

Nous montrons ensuite que n_T est une puissance de 2. Les normes réduites caractérisent les idéaux bilatères d'un ordre O et se mettent de façon unique sous la forme QB^2, où B est un idéal de k et Q un idéal entier de k divisant Δ_H. Soient (A_i), $i = 1, \dots, 2^e$, un système de représentants des classes d'idéaux de k, de carré principal, et $(\mathcal{P}_j)$, $j = 1, \dots, 2^{s'}$, des idéaux bilatères de O, de norme réduite $Q_j B_j^2$ principale, où (Q_j), $j = 1, \dots 2^{s'}$, est l'ensemble des diviseurs de Δ_H de classe un carré. Les idéaux bilatères de O, de norme réduite principale, s'écrivent de façon unique $\mathcal{P}_j A_j x$, $x \in H$, et leur nombre de classes n_T divise $2^{e+s'}$. On le note 2^t.

Enfin, soient E_T le groupe des unités d'un ordre du type T, $\hat{w}_T$ l'ordre du sous-groupe de E_T formé des unités de norme réduite 1, E_k^+ le groupe des unités totalement positives de k. Nous avons les égalités suivantes :

$$2w_T = \hat{w}_T\,[\mathrm{Nrd}(E_T) : E_k^2] = 2^n\, \hat{w}_T\,[E_k^+ : \mathrm{Nrd}(E_T)]^{-1} ,$$

$$h_k^+ = h_k\, 2^n\, [E_k : E_k^+]^{-1} ,$$

$$h_k^+/(2h_k\, w_T) = [E_k^+ : \mathrm{Nrd}(E_T)]/\hat{w}_T .$$

Nous avons montré le théorème suivant.

THÉORÈME. - <u>Avec les notations précédentes,</u>

$$\zeta_k^{(H)}(-1) = 2^{n+t} \sum_{T\in\mathcal{T}} [E_k^+ : \mathrm{Nrd}(E_T)]/\hat{w}_T .$$

4. Classes d'idéaux.

Deux idéaux P et P' à gauche d'un ordre O,

1° appartiennent à la même classe, si, et seulement si, $P' = Px$, $x \in H$;

2° ont leurs ordres à droite du même type, si, et seulement si, $P' = QPx$, $x \in H$, Q idéal bilatère de O ;

3° ont les types de leurs ordres à droite équivalents, si, et seulement si, $P' = QPR$, Q idéal bilatère de O, $\mathrm{Nrd}(R)$ principale. Pour cela, il faut et il suffit que l'idéal $\mathrm{Nrd}(P)\,\mathrm{Nrd}(P')^{-1}$ soit équivalent dans k à la norme réduite d'un idéal bilatère.

On définit ainsi 3 relations d'équivalence dont les nombres de classes $h_1 = h$, h_2 (le nombre de types d'ordres), h_3 ne dépendent pas du choix de O. La norme réduite définit par passage au quotient, une application surjective des classes d'idéaux de H (au sens du (1°)) sur les classes d'idéaux de k et le nombre de classes des normes réduites des idéaux bilatères d'un ordre est $2^{s-s'-e}\,h_k^+$. On en déduit

$$h_3 = 2^{s'+e-s} .$$

Il est clair que l'on peut écrire

$$h_2 = \sum_{\mathcal{C}} n_{\mathcal{C}} ,$$

la somme étant effectuée sur les classes $\mathcal{C}$, au sens du (3°) et $n_{\mathcal{C}}$ désignant le nombre de types d'ordres de classe $\mathcal{C}$. Enfin nous avons

$$h = h_1 = \sum_R 1 = \sum_X \sum_{\mathrm{Nrd}(R)\subset X} 1 = \sum_X \sum_{\mathcal{C}_X} 2^t\, n_{\mathcal{C}} = h_k^+\, 2^{s-s'-e} \sum_{\mathcal{C}} 2^t\, n_{\mathcal{C}} .$$

THÉORÈME. - Avec les notations précédentes,

$$h = h_k^+\, 2^{s-s'-e} \sum_{\mathcal{C}} 2^t\, n_{\mathcal{C}} .$$

5. Application au nombre de classe d'idéaux d'un corps de quaternions.

PROPOSITION. - Il n'y a qu'un nombre fini de corps de quaternions totalement définis sur un corps de nombres de degré donné, ayant un nombre de classes donné.

En effet, h étant donné, $n_{\mathcal{C}}$ et 2^t ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs ; n étant donné, il en est de même pour $\hat{w}_T$, donc aussi pour $\zeta_k(-1)$ et pour $\prod_{y|\Delta_H}(1 - N_{k/Q}(y))$. Comme

$$\zeta_k(-1) = d_k^{3/2}\, \zeta_k(2)\, (2\pi)^{-2n} , \quad |\zeta_k(2)| > 1 ,$$

le discriminant de k ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, d'où un nombre fini de possibilités pour k et Δ_H.

Remarque. - Il existe 13 algèbres de quaternions totalement définies sur un corps quadratique réel qui sont principales. Ce sont les algèbres H, avec Δ_H égal à

$1 , 3\mathfrak{P}_2 , 5\mathfrak{P}_2 , \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_7^{(1)} , \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}^{(2)}$, sur $Q(\sqrt{2})$,

$1 , 2\mathfrak{P}_5 , 2\mathfrak{P}_{11}^{(1)} , 2\mathfrak{P}_{11}^{(2)}$, sur $Q(\sqrt{5})$,

$1 , 2\mathfrak{P}_3^{(1)} , 2\mathfrak{P}_3^{(2)}$, sur $Q(\sqrt{13})$,

1 sur $Q(\sqrt{17})$.

Dans cet énoncé, $\mathfrak{P}_2 , \mathfrak{P}_7^{(1)} , \mathfrak{P}_7^{(2)} , \mathfrak{P}_5 , \mathfrak{P}_{11}^{(1)} , \mathfrak{P}_{11}^{(2)} , \mathfrak{P}_3^{(1)} , \mathfrak{P}_3^{(2)}$ désignent les idéaux premiers du centre de l'algèbre au-dessus du nombre premier écrit en indice.

6. Application à $\zeta_k(-1)$.

1° Pour tout nombre premier p et pour tout entier m , soit $x_{p,m}$ une racine d'ordre p^m de l'unité, et soit $n_k(p)$ le plus grand des entiers m tels que $[k(x_{p,m}) : k] \leq 2$. Le p. p. c. m. des ordres des groupes finis de quaternions sur k est [4]

$$w = 2\prod_p p^{n_k(p)} ,$$

on a donc

$$w\zeta_k^{(H)}(-1) \in 2^n Z .$$

On en déduit un résultat démontré par J.-P. SERRE [5].

PROPOSITION. - Avec les notations précédentes, $w\zeta_k(-1) \in 2^n Z$.

C'est immédiat, si n est pair, car il existe H tel que $\Delta_H = (1)$. Si n est impair, il suffit de considérer les corps de quaternions totalement définis sur k tels que $\Delta_H = (\mathfrak{P}_2)$ et $\Delta_H = (\mathfrak{P}_q)$, où q parcourt l'ensemble des nombres premiers divisant $1 - N_{k/Q}(\mathfrak{P}_2)$, en notant $\mathfrak{P}_2$ (resp. $\mathfrak{P}_q$) un idéal premier de k au-dessus de 2 (resp. q).

2° Soit $e_k(2)$ l'exposant de 2 dans $\zeta_k(-1)$. On a $e_k(2) = n - n_k(2) - 1$, si h_k^+ est impair, et si $(2) = \mathfrak{P}_2^{2^{n_k(2)-2}}$ est la décomposition de l'idéal (2) dans **k**.

Soit H tel que $\Delta_H = (1)$ (resp. $\Delta_H = \mathfrak{P}_2$) si n est pair (resp. n impair), H est le corps usuel de quaternions sur k de base $1 , i , j , ij$, avec $i^2 = j^2 = -1$, $ij = -ji$. Comme h_k^+ est impair, $e = 0$, $s' = s$, $h_3 = 0$, $t \leq s$. Si n est pair, $s = 0$; si n est impair, $s = 1$, mais $t = 0$ (En effet, soit O un ordre de H contenant $x_{2,n_k(2)} \in k(i)$, et j , l'idéal premier, bilatère de O , au-dessus de 2 , est engendré par l'idéal premier P_2 , au-dessus de 2 dans $k(i)$ [4], qui est principal). On a donc

$$\zeta_k^{(H)}(-1) = 2^n \sum_T 1/\hat{w}_T .$$

Tout ordre de type T , tel que $\hat{w}_T = 2^{n_k(2)+1}$, s'envoie par un automorphisme intérieur de H sur un ordre contenant $x_{2,n_k(2)}$ et j . Cet ordre est unique si

n est impair ; si n est pair, il y en a 2 qui sont du même type : 0 et $P_2^{-1} 0 P_2$. L'unicité du type d'ordre tel que $\hat{w}_T = 2^{n_k(2)+1}$ montre que $e_k(2) = n - n_k(2) - 1$.

Exemple. - Si k_m est le sous-corps réel maximal de $Q(x_{2,m})$, l'exposant de 2 dans $\zeta_{k_m}(-1)$ est

$$e_{k_m}(2) = 2^{m-2} - m - 1 .$$

On montre même, à l'aide des nombres de Bernoulli généralisés, que le quotient $\zeta_{k_{m+1}}(-1)/\zeta_{k_m}(-1)$ est un entier, et que $\zeta_{k_m}(-1) \in 2^{2^{m-2}-m-1} Z$, pour $m \geqslant 5$.

3° PROPOSITION. - On a

$$e_k(2) = -2 , \text{ pour } k = Q , Q(\sqrt{2}) ,$$

$$e_k(2) = -1 , \text{ pour } k = Q(\sqrt{2+\sqrt{2}}) , Q(\sqrt{m}) ,$$

avec m premier, $m \equiv -3 \bmod 8$, éventuellement pour les corps $Q(\sqrt{m})$ avec $m \equiv 2 \bmod 4$ ou $m \equiv 3 \bmod 8$

$$e_k(2) \geqslant 0 \text{ dans les autres cas.}$$

Les cas $k = Q(\sqrt{2})$, $Q(\sqrt{2+\sqrt{2}})$, Q sont des cas particuliers de l'exemple précédent. Il reste à étudier les corps quadratiques $Q(\sqrt{m})$, où m est un entier sans facteurs carrés, différent de 2 . Le cas m premier, $m \equiv -3 \bmod 8$, est un cas particulier de (2). Pour la démonstration du reste de la proposition, on pourra se reporter à [4].

BIBLIOGRAPHIE

[1] COXETER (H. S. M.). - The binary polyhedral groups and other generalizations of the quaternion group, Duke math. J., t. 7, 1940, p. 367-379.

[2] DEURING (Max). - Algebren. - Berlin, J. Springer, 1935 (Ergelnisse der Mathematik, 4, Heft 1).

[3] EICHLER (M.). - Über die Idealklassenzahl total definiter Quaternionenalgebren, Math. Z., t. 43, 1937, p. 102-109.

[4] GUEHO (Marie-France). - Corps de quaternions sur un corps de nombres algébriques, Thèse 3e cycle, Bordeaux, 1972.

[5] GUÉHO (Marie-France). - Corps de quaternions et fonction zêta au point -1 , C. R. Acad. Sc. Paris, t. 274, 1972, Série A, p. 296-298.

[6] SERRE (J.-P.). - Cohomologie des groupes discrets, Prospects in Mathematics, p. 77-169. - Princeton, Princeton University Press, 1971 (Annals of Mathematics Studies, 70).

(Texte reçu le 5 juin 1972)

Marie-France GUÉHO
Université de Bordeaux-I
U. E. R. de Mathématiques
351 cours de la Libération
33405 TALENCE