Ariane Delalande

Fonctions entières sur un corps valué non archimédien

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 13, nº 2 (1971-1972), exp. nº G3, p. G1-G4
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1971-1972__13_2_A13_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Groupe d'étude de Théorie des nombres)
13e année, 1971/72, n° G3, 4 p.

13 décembre 1971

FONCTIONS ENTIÈRES SUR UN CORPS VALUÉ NON ARCHIMÉDIEN

par Ariane DELALANDE

On étudie l'espace noté $K\langle x\rangle$ des fonctions entières sur un corps K non archimédien, complet, muni d'une valuation non triviale.

Le point de départ de cette étude est un article de RAGHUNATHAN [3] qui définit une topologie métrique sur cet espace.

Lors d'études plus générales, si I est un intervalle de $\overline{\underset{\sim}{R}}$, KRASNER [1] et LAZARD [2] ont défini une même topologie sur l'espace $L_K(I)$ des séries de Laurent à coefficients dans K qui convergent pour tout x tel que $v(x)$ appartienne à I. En particulier, l'espace $L_K(]-\infty , +\infty]) = K\langle x\rangle$ des fonctions entières, à coefficients dans K, peut être munie de cette topologie.

Nous voulons comparer ces deux topologies et étudier quelques propriétés de $K\langle x\rangle$ et de son dual.

L'intérêt principal de cette étude est sans doute le suivant :

On sait que l'espace $K\langle x\rangle$, muni de la topologie de LAZARD, est métrisable, soient f et g deux éléments de $K\langle x\rangle$.

$f(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ et $g(X) = \sum_{n\geq 0} b_n X^n$, la distance,

$d(f , g) = \max(|a_0 - b_0| , \sup_{n\geq 1} |a_n - b_n|^{1/n})$, définie par RAGHUNATHAN, réalise une métrique de cet espace.

Nous allons tout d'abord rappeler les définitions et propriétés élémentaires relatives aux topologies de KRASNER et RAGHUNATHAN.

1. Rappels sur la topologie définie par KRASNER et LAZARD.

Soit K un corps valué complet pour une valuation v. Une famille (u_n) d'éléments de K est sommable si, et seulement si, $v(u_n)$ tend vers $+\infty$ avec $|n|$. Soit $f(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ une série de Laurent à coefficients dans K, la condition de convergence de f en un point x est $v(a_n) + nv(x) \dashrightarrow +\infty$ avec $|n|$.

On définit alors conv f ainsi :

1° Si $\mu \in \underset{\sim}{R}$, $\mu \in \text{conv } f \Longleftrightarrow \lim_{|n|\to\infty} [v(a_n) + n\mu] = +\infty$,
2° Si $\mu = +\infty$ (resp. $-\infty$), $\mu \in \text{conv } f \Longleftrightarrow a_n = 0$, $\forall\, n < 0$ (resp. $\forall\, n > 0$).

On montre que conv f est un intervalle de $\overline{\underset{\sim}{R}}$.

Si $\mu \in \underset{\sim}{R}$, on pose $v(f , \mu) = \inf_{n\in \underset{\sim}{Z}} [v(a_n) + n\mu]$, $v(f , \mu) \in \overline{\underset{\sim}{R}}$.

Si $\mu = \pm\infty$ et $\mu \in \text{conv } f$, on pose $v(f , \mu) = v(a_0)$.

Ainsi $v(f, \mu)$ est, sur conv f, une fonction à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Définition. - Soit I un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$, on note $L_K(I)$ l'espace des séries de Laurent f, à coefficients dans K, telles que $I \subset$ conv f.

Si $I = [m_1, m_2] \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, I non réduit à $\{+\infty\}$ (ou $\{-\infty\}$), on munit $L_K(I)$ de la topologie métrique suivante :

Un système fondamental de voisinages de 0 est constitué des V_v $(v \in \mathbb{R}^+)$, définis par :

$$V_v = \{f \in L_K(I) \mid \inf[v(f, m_1), v(f, m_2)] \geqslant v\}.$$

On montre que, pour cette topologie, $L_K(I)$ est une algèbre normée complète, dont la norme est multiplicative.

Si maintenant I est un intervalle quelconque de $\overline{\mathbb{R}}$ (non réduit à $\{+\infty\}$ ou à $\{-\infty\}$), la topologie sur $L_K(I)$ est définie comme étant la moins fine de celles qui rendent continues les inclusions de $L_K(I)$ dans $L_K(J)$ lorsque J parcourt l'ensembles des sous-intervalles fermés de I.

On montre que, pour cette topologie, $L_K(I)$ est une algèbre séparée complète.
En particulier, l'algèbre $L_K(]-\infty, +\infty])$ des fonctions entières sur K, que nous noterons $K\langle x\rangle$, est ainsi muni d'une structure d'algèbre séparée et complète.

2. Définitions et propriétés relatives à la topologie de RAGHUNATHAN.

Si on considère $f(X) = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$, $a_n \in K$, cette série converge au point x si, et seulement si, $|a_n||x|^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$; f est une fonction entière si $\lim_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = 0$, ce qui est équivalent au fait que la série converge pour tout x de K.

RAGHUNATHAN pose $\|f\| = \max(|a_0|, \sup_{n\geqslant 1}|a_n|^{1/n})$.
On vérifie que

$\|f + g\| \leqslant \sup(\|f\|, \|g\|)$,
$\|\lambda f\| \leqslant A(\lambda)\|f\|$, où $A(\lambda) = \sup(1, |\lambda|)$.

On en déduit que $K\langle x\rangle$, muni de la distance $d(f, g) = \|f - g\|$, est un espace métrique complet totalement discontinu.

Mais le symbole $\|f\|$ ne représente pas une norme et, de plus, on peut montrer que la topologie précédente ne peut pas être définie par une norme.

C'est pourquoi, dorénavant, pour éviter toute confusion, nous noterons $d(f, 0)$ au lieu de $\|f\|$.

RAGHUNATHAN étudie ensuite le dual de $K\langle x\rangle$, noté $\overline{K\langle x\rangle}$, et montre qu'il peut être considéré comme l'espace des séries entières de rayon de convergence non nul.

Plus précisément, on montre le théorème suivant,

THÉORÈME 1. - Soit C_K l'espace des suites $(c_n)_{n\geqslant 0}$ tel que $\overline{\lim}|c_n|^{1/n} < +\infty$.

1° *Soit* $c = (c_n) \in C_K$, *l'application* $\varphi_c : K\langle x\rangle \longrightarrow K$.

$$f = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \dashrightarrow \varphi_c(f) = \sum_{n\geq 0} a_n c_n$$

est une forme linéaire continue sur $K\langle x\rangle$.

2° *L'application* $c \dashrightarrow \varphi_c$ *de* C_K *dans* $\overline{K\langle x\rangle}$ *est une bijection.*

Ce théorème se démontre à partir du lemme suivant,

LEMME. - *Une série* $\sum_{n\geq 0} a_n c_n$ *est convergente pour toute suite* (a_n) *telle que* $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0$ *si, et seulement si, la suite* $(|c_n|^{1/n})$ *est bornée.*

Cette propriété permet de considérer $K\langle x\rangle$ comme un sous-espace de $\overline{K\langle x\rangle}$.

Soit $\varphi = \sum_{n\geq 0} c_n X^n \in \overline{K\langle x\rangle}$; posons $d(\varphi , 0) = \max(|c_0| , \sup_{n\geq 1} |c_n|^{1/n})$.

On définit ainsi sur $\overline{K\langle x\rangle}$ une métrique qui coïncide, sur $K\langle x\rangle$, avec celle de RAGHUNATHAN.

Cette topologie est strictement plus fine que la topologie faible du dual.

Pour cette topologie, $\overline{K\langle x\rangle}$ *est un espace métrique complet, mais ce n'est pas un espace vectoriel métrique.* On peut trouver, par exemple, une suite (λ_n) tendant vers 0 et un élément φ de $\overline{K\langle x\rangle}$ tel que $\lambda_n \varphi$ ne tende pas vers zéro.

On peut alors caractériser $K\langle x\rangle$ comme sous-espace de $\overline{K\langle x\rangle}$: $K\langle x\rangle$ est l'unique espace vectoriel métrique maximal de $\overline{K\langle x\rangle}$.

Pour compléter l'étude de RAGHUNATHAN, on peut étudier la multiplication dans $K\langle x\rangle$: on montre que $K\langle x\rangle$ *est une algèbre topologique.*

Ainsi, $K\langle x\rangle$ *est une algèbre, évidemment séparée, et complète, de même que pour la topologie de KRASNER et LAZARD.*

3. Comparaison des topologies de LAZARD et RAGHUNATHAN.

THÉORÈME 2. - *Les deux topologies précédemment définies sur* $K\langle x\rangle$ *sont identiques.*

Ce théorème se démontre par une démonstration directe.

On peut, et cela fournit une autre démonstration de l'identité des deux topologies, étudier le dual $\overline{K\langle x\rangle}$ de $K\langle x\rangle$ pour la topologie de KRASNER et LAZARD.

On montre que $\overline{K\langle x\rangle}$ peut être considéré comme l'espace des séries entières de rayon de convergence non nul.

Plus précisément, on montre le théorème suivant :

THÉORÈME 3. - *Soit* $C_K^!$ *l'espace des suites* $(c_n)_{n\geq 0}$, *telles que* $\exists\, r > 0$ *tel que la suite* $(|c_n| r^n)$ *soit bornée.*

1° *Soit* $c = (c_n) \in C_K^!$, *l'application* φ_c *de* $K\langle x\rangle$ *dans* K *qui à* $f = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ *fait correspondre* $\varphi_c(f) = \sum_{n\geq 0} c_n a_n$ *est une forme linéaire continue sur* $K\langle x\rangle$.

2° *L'application* $c \dashrightarrow \varphi_c$ *de* $C_K^!$ *dans* $\overline{K\langle x\rangle}$ *est une bijection.*

Ce théorème se démontre à partir du lemme suivant.

LEMME. - La série $\sum_{n\geq 0} c_n a_n$ est convergente pour toute suite (a_n) telle que $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0$ si, et seulement si, il existe $\rho > 0$ tel que la suite $|c_n| \rho^n$ converge vers 0.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KRASNER (Marc). - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets, Colloques internationaux du C. N. R. S. n° 143: Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres [1964. Clermont-Ferrand], p. 97-141. - Paris, Centre Narional de la Recherche Scientifique, 1966.

[2] LAZARD (Michel). - Les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 14, p. 47-76).

[3] RAGHUNATHAN (T. T). - On the space of entire functions over certain non-archimedian fields, Boll. Unione mat. Ital., Bologna, Série 4, t. 1, 1968, p. 517-526.

(Texte reçu le 15 février 1972)

Ariane DELALANDE
18 rue des Cordelières
75013 PARIS