

SÉMINAIRE DELANGE-PISOT-POITOU. THÉORIE DES NOMBRES

PHILIPPE ROBBA

Prolongement analytique pour les fonctions de plusieurs variables sur un corps valué

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 13, n° 1 (1971-1972), exp. n° 6, p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1971-1972__13_1_A5_0

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROLONGEMENT ANALYTIQUE
 POUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES SUR UN CORPS VALUÉ

par Philippe ROBBA

1. Introduction.

Soit K un corps valué ultramétrique complet et algébriquement clos. Comme dans le cas d'une variable, les séries de Laurent à plusieurs variables ne permettent pas de définir un prolongement analytique en dehors de leur domaine de convergence.

Suivant la technique inaugurée par M. KRASNER [2], on définit les éléments analytiques sur un ensemble A comme étant des limites uniformes sur A de fractions rationnelles sans singularité dans A , et l'on cherche pour quels ensembles A , dits analytiques, les éléments analytiques vérifient le principe du prolongement analytique.

Nous ne savons pas caractériser les ensembles analytiques, mais nous allons construire une classe K d'ensembles analytiques, qui, dans le cas d'une variable, coïncide avec la classe des quasi-connaux.

Auparavant, nous établirons des propriétés des singularités d'une fraction rationnelle au moyen d'une formule de Cauchy formelle.

2. Notations. Série de Laurent. Fonction de valuation.

2.1. $\bar{\mathbb{R}}$ désigne la droite numérique achevée : $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $\bar{\mathbb{R}}^m = (\bar{\mathbb{R}})^m$. On note $v(x) = -\log |x|$ la valuation de $x \in K$. On suppose que $v(K)$ est dense dans $\bar{\mathbb{R}}$. Pour $x = (x_1, \dots, x_m) \in K^m$, on notera

$$v(x) = (v(x_1), \dots, v(x_m)) \in \bar{\mathbb{R}}^m.$$

Pour μ et ν de $\bar{\mathbb{R}}^m$, $\mu \leq \nu$ équivaut à $\mu_i \leq \nu_i$ pour $i = 1, \dots, m$.

Soient $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}^m$ un multi-indice, $X = (X_1, \dots, X_m)$ une famille d'indéterminées, et $y \in \bar{\mathbb{R}}^m$, on pose

$$X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \dots X_m^{\alpha_m}, \quad \alpha y = \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^m |\alpha_i|,$$

et, pour $0 \leq \alpha \leq \beta$,

$$\binom{\beta}{\alpha} = \binom{\beta_1}{\alpha_1} \dots \binom{\beta_m}{\alpha_m}.$$

Soient $a_\alpha \in K$, définis pour tous les multi-indices α , considérons la série de Laurent $f = \sum_{\alpha} a_\alpha X^\alpha$.

On définit l'ensemble $\text{conv}(f) \subset \bar{\mathbb{R}}^m$ de la façon suivante :

2.2. Si $\mu \in \bar{\mathbb{R}}^m$, $\mu \in \text{conv}(f)$ équivaut à

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} [v(a_\alpha) + \alpha\mu] = +\infty.$$

Si, pour $i \in I = [1, \dots, m]$, $\mu_i = \varepsilon_i \infty$ ($\varepsilon_i = \pm 1$), et, pour

$$j \in J = [1, \dots, m] \setminus I,$$

$\mu_j \in \mathbb{R}$, $\mu \in \text{conv}(f)$ équivaut à $a_\alpha = 0$ pour $\varepsilon_i \alpha_i < 0$ et

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty, \alpha_i = 0} [v(a_\alpha) + \sum_{j \in J} \alpha_j \mu_j] = +\infty.$$

On voit que le domaine de convergence de la série f dans μ^m est l'image réciproque $v^{-1}(\text{conv}(f))$ de $\text{conv}(f)$.

2.3. Pour $\mu \in \text{conv}(f)$, on pose

$$v(f, \mu) = \inf_{a_\alpha \neq 0} (v(a_\alpha) + \alpha\mu)$$

(On convient que si $\alpha_i = 0$, $\alpha_i \mu_i = 0$).

Cette application de $\text{conv}(f)$ dans \mathbb{R} s'appelle la fonction de valuation de f .

2.4. Lorsqu'il y a un seul multi-indice β tel que $v(f, \mu) = v(a_\beta) + \beta\mu$, on pose $\beta = N(f, \mu)$. On note $\text{Reg}(f)$ l'ensemble des points où $N(f, \mu)$ est défini, et $Z(f) = \text{conv}(f) \setminus \text{Reg}(f)$.

2.5. L'ensemble $\text{conv}(f)$ est convexe.

Preuve. - Soient p et $q \geq 0$, $p + q = 1$, λ et $\mu \in \text{conv}(f)$. Si λ et $\mu \in \mathbb{R}^m$

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} [v(a_\alpha) + \alpha(p\lambda + q\mu)] = p \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} [v(a_\alpha) + \alpha\lambda] + q \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} [v(a_\alpha) + \alpha\mu] = +\infty$$

et donc $p\lambda + q\mu \in \text{conv}(f)$.

Si $\lambda_i = -\infty$ (resp. $+\infty$), par $p\lambda_i + q\mu_i$, il faudra entendre n'importe quel nombre $\leq \mu_i$ (resp. $\geq \mu_i$). Avec cette convention, on vérifie encore que

$$p\lambda + q\mu \in \text{conv}(\beta).$$

2.6. La fonction $v(f, \mu)$ est concave.

Preuve. - C'est l'enveloppe inférieure d'une famille de fonctions **affines**.

2.7. Dans $\text{conv}^0(f)$, le graphe de la fonction $v(f, \mu)$ est un polyèdre (ayant éventuellement une infinité de faces).

2.8. L'ensemble $Z(f)$ est la projection des "arêtes" du polyèdre de valuation (Par arêtes, on entend les faces de dimension $n - 1$).

2.9. $\text{Reg}(f) \cap \text{conv}^0(f)$ est un ouvert. $v(f, \mu)$ y est différentiable et $N(f, \mu) = \text{grad } v(f, \mu)$, enfin $N(f, \mu)$ y est localement constante. Les composantes, où $N(f, \mu)$ garde une valeur constante, sont les polytopes convexes qui sont les projections des faces du polyèdre de valuation de f .

2.10. PROPOSITION. - Soit $\mu \in \text{conv}(f) \cap v(K^m) \cap \mathbb{R}^m$. On a

$$v(f, \mu) = \inf_{v(x)=\mu} v(f(x)) = \inf_{v(x-y) > \mu} v(f(x)),$$

pour tout y tel que $v(y) = \mu$, et si $\mu \in \text{Reg}(f)$, on a plus précisément

$$v(f(x)) = v(f, \mu) \quad \text{si} \quad v(x) = \mu.$$

Principe de la démonstration. - Il est clair que, pour tout x tel que $v(x) = \mu$

$$v(f(x)) \geq v(f, \mu).$$

Soit A l'ensemble des α tels que $v(a_\alpha) + \alpha\mu = v(f, \mu)$. A est non vide et fini. Si $\mu \in \text{Reg}(f)$, A est réduit à un seul élément, et, pour $v(x) = \mu$,

$$v(f(x)) = v(f, \mu).$$

Dans tous les cas, posons

$$g(x) = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha x^\alpha \quad \text{et} \quad h(x) = \sum_{\alpha \notin A} a_\alpha x^\alpha.$$

On voit que $v(h(x)) \geq v(h, \mu) > v(f, \mu)$. Tout revient alors à démontrer la proposition pour $g(x)$, et, en multipliant $g(x)$ par une puissance convenable de x , on se ramène au cas d'un polynôme.

2.11. COROLLAIRE. - Il y a unicité du développement en série de Laurent. Plus précisément, soient f et g deux séries de Laurent telles que

$$\text{conv}(f) \cap \text{conv}(g) \cap v(K^m) \cap \mathbb{R}^m \neq \emptyset.$$

Soit $\mu \in \text{conv}(f) \cap \text{conv}(g) \cap v(K^m) \cap \mathbb{R}^m$; si, pour tout x tel que $v(x) = \mu$, on a $f(x) = g(x)$, les deux séries coïncident.

2.12. Principe d'unicité : Soient A le domaine de convergence d'une série de Laurent, f , et $f(x)$ la somme de cette série. Si f s'annule au voisinage d'un point x_0 de A , f est identiquement nulle dans A .

Preuve. - Par un développement en série de Taylor autour de x , on commence par prouver que f est nulle dans le polycercle $\{x \mid v(x) = v(x_0)\}$, le résultat découle alors de 2.11.

3. Formule de Cauchy dans les polycouronnes.

3.1. Dans 3.1. et 3.2., nous travaillons dans K (c'est-à-dire que $m = 1$).

Notons $C_r = \{x \mid |x| = r\}$ le cercle de centre 0 et de rayon r contenu dans K , r appartenant au groupe des valeurs de K . Notons $H(C_r)$ l'espace vectoriel des éléments analytiques sur C_r (c'est-à-dire des sommes de séries de Laurent sur C_r) muni de la norme de la convergence uniforme.

LEMME. - Il existe une forme linéaire φ_r continue sur $H(C_r)$, telle que $\varphi_r(x^n) = 0$ pour $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$ et $\varphi_r(1/x) = 1$.

Preuve. - Cela résulte du fait que les fonctions x^n , $n \in \mathbb{Z}$, sont topologiquement libres dans $H(C_r)$, et forment une famille totale.

3.2. LEMME. - r et r' appartenant au groupe des valeurs, $r > r'$, soit f définie sur $C_r \cup C_{r'}$, avec $f \in H(C_r) \oplus H(C_{r'})$. Alors la fonction

$$y(z) = \varphi_r(f(x)/(x-z)) - \varphi_{r'}(f(x)/(x-z)),$$

est développable en série de Laurent dans la couronne $r' < |z| < r$. Si, de plus, f est la restriction d'une fonction développable en série de Laurent dans la couronne $r' \leq |x| \leq r$, on a

$$f(z) = g(z) \text{ pour } r' < |z| < r.$$

Preuve. - On raisonne comme dans le cas complexe en développant $1/(x-z)$ suivant les puissances positives de z sur C_r et suivant les puissances négatives de z sur $C_{r'}$.

3.3. Etant données les formes linéaires continues $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ définies sur $H(C_1) \dots H(C_m)$, il leur correspond une forme $\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_m$ définie sur $\bigotimes_{1 \leq j \leq m} H(C_j) = H(\prod_{1 \leq j \leq m} C_j)$ où $H(\prod_{1 \leq j \leq m} C_j)$ désigne l'espace des fonctions développables en séries de Laurent sur $\prod_{1 \leq j \leq m} C_j$, muni de la norme de la convergence uniforme. On peut calculer $\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_m(f)$ par "intégrations" successives :

$$(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_m)(f(x_1, \dots, x_m)) = \varphi_1(\dots \varphi_m(f(x_1, \dots, x_m)) \dots),$$

le résultat ne dépendant pas de l'ordre d'intégration.

Etant donnés les couples de nombres (r_j, r'_j) , $1 \leq j \leq m$, appartenant au groupe des valeurs nous noterons D_m la polycouronne formée des $x \in K^m$ tels que $r'_j < |x_j| < r_j$, et \bar{D}_m la polycouronne formée des x tels que $r'_j \leq |x_j| \leq r_j$.

On appellera frontière distinguée de D_m l'ensemble $\partial D_m = \prod_{j=1}^m (C_{r_j} \cup C_{r'_j})$, et on notera $H(\partial D_m)$ l'espace des fonctions définies sur ∂D_m dont la restriction à chaque $\prod_{j=1}^m C_{p_j}$ ($p_j = r_j$ ou r'_j) appartient à $H(\prod_{j=1}^m C_{p_j})$. On pose

$$\bar{\varphi}_m = (\varphi_{r_1} - \varphi_{r'_1}) \otimes \dots \otimes (\varphi_{r_m} - \varphi_{r'_m}),$$

$\bar{\varphi}_m$ est une forme linéaire sur $H(\partial D_m)$.

PROPOSITION. - Si $f(x) \in H(\partial D_m)$, la fonction de $z = (z_1, \dots, z_m)$, $g(z) = \bar{\varphi}_m[f(x)/(x_1 - z_1) \dots (x_m - z_m)]$ est développable en série de Laurent dans D_m . Si f est la restriction à ∂D_m d'une fonction f définie dans D_m , séparément développable en série de Laurent en chacune des variables, on a, dans D_m , $f(z) = g(z)$.

Preuve. - La première partie de la proposition se démontre comme en 3.2. en développant $1/(x_1 - z_1) \dots (x_m - z_m)$ en série entière convenable suivant les différentes portions de ∂D_m .

La réciproque se démontre par récurrence sur m . Pour $m = 1$, cela résulte du lemme 3.2. Alors, les variables x_1, \dots, x_{m-1} étant fixées, on a

$$\begin{aligned} (\varphi_{r_m} - \varphi_{r'_m})[f(x)/(x_1 - z_1) \dots (x_m - z_m)] \\ = f(x_1, \dots, x_{m-1}, z_m)/(x_1 - z_1) \dots (x_{m-1} - z_{m-1}), \end{aligned}$$

d'après le lemme 3.2 et les hypothèses de la proposition. Il résulte alors de l'hypothèse de récurrence que

$$\begin{aligned} \varphi_{m-1}[f(x_1, \dots, x_{m-1}, z_m)/(x_1 - z_1) \dots (x_{m-1} - z_{m-1})] \\ = f(z_1, \dots, z_{m-1}, z_m) = f(z), \end{aligned}$$

d'où le résultat.

3.4. On en déduit le corollaire important qui nous servira par la suite.

THÉORÈME. - Si dans la polycouronne $\bar{D} = \{x \mid x \in K^m, r'_j \leq |x_j| \leq r_j\}$, où r_j et r'_j appartiennent au groupe des valeurs de K , f est séparément développable en série de Laurent par rapport aux variables x_j d'indices j tels que $r'_j \neq r_j$, et si dans les polycercles $\prod_{j=1}^m C_{p_j}$, où $p_j = r_j$ ou r'_j , f est développable en série de Laurent, alors f est développable en série de Laurent dans \bar{D} tout entier.

Preuve. - Si pour tout j , $r'_j < r_j$, il résulte de la proposition 3.3 que f est développable en série de Laurent dans D . On vérifie alors que cette série, converge dans \bar{D} , sa somme coïncide donc avec f dans \bar{D} .

Pour certains j , $r'_j = r_j$, on adapte les résultats de la proposition 3.3 en n'effectuant les "intégrations" successives que pour les j tels que $r'_j \neq r_j$.

3.5. Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer les assertions analogues variables pour des séries de Taylor.

3.6. Si K est supposé maximalement complet, le théorème de prolongement de Hahn-Banach est vrai pour les espaces normés sur K [1]. On peut alors, dans les lemmes 3.1 et 3.2, remplacer $H(C_r)$ par $B(C_r)$, espace vectoriel des fonctions définies sur C_r à valeurs dans K , muni de la norme de la convergence uniforme. Dans la proposition 3.3, on peut remplacer $H(\partial D_m)$ par $B(\partial D_m)$. On obtient alors le résultat suivant.

THÉORÈME. - Si dans la polycouronne $D = \{x \mid r'_j < |x_j| < r_j\}$ la fonction f est bornée et séparément développable en série de Laurent, f est globalement développable en série de Laurent.

4. Zéro d'une série de Laurent. Singularités d'une fraction rationnelle.

4.1. PROPOSITION. - Soient f une série de Laurent, et $\mu \in \text{conv}(f) \cap v(K^m) \cap \widetilde{R}^m$. Si $\mu \in \text{Reg}(f)$, $f(x)$ ne s'annule pas dans le polycercle $\{x \mid v(x) = \mu\}$; si $\mu \in Z(f)$, il existe x tel que $v(x) = \mu$ et $f(x) = 0$.

Preuve. - Si $\mu \in \text{Reg}(f)$, on sait que, pour $v(x) = \mu$, $v(f(x)) = v(f; \mu)$,

donc $f(x) \neq 0$. D'autre part, la propriété est bien connue pour $m = 1$ [3]. La démonstration se fait par récurrence sur m en fixant convenablement l'une des variables.

4.2. Soit $R(x) = P(x)/Q(x)$ une fraction rationnelle, où P et Q sont deux polynômes premiers entre eux. On prolonge par continuité, lorsque c'est possible, la fonction $R(x)$ aux points où P et Q ont des zéros communs.

Soit A l'ensemble des zéros de R , on note $Z(R)$ l'adhérence dans \bar{K}^m de $v(A)$. Soit B l'ensemble des singularités de R , on note $W(R)$ l'adhérence dans \bar{K}^m de $v(B)$. $Z(R)$ et $W(R)$ sont respectivement contenus dans $Z(P)$ et $Z(Q)$ d'après 4.1.

On pose $v(R, \mu) = v(P, \mu) - v(Q, \mu)$.

$v(R, \mu)$ est une fonction affine par morceaux, mais n'est plus concave. Son graphe est le polyèdre de valuation de R .

On note $\text{Reg}(R) = \mathbb{C}(Z(R) \cup W(R))$. Si $\mu \in \text{Reg}(R) \cap v(K^m)$, alors

$$v(R(x)) = v(R, \mu),$$

pour $v(x) = \mu$.

On note $N(R, \mu)$ le gradient de la fonction $v(R, \mu)$ pour $\mu \in \text{Reg}(R)$. Si $\mu \notin Z(P) \cup Z(Q)$, on a $N(R, \mu) = N(P, \mu) - N(Q, \mu)$.

Nous allons préciser la forme de $Z(R)$ et $W(R)$.

4.3. LEMME. - Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille enchaînée d'ouverts contenus dans K^m . Soit f définie sur $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ telle que sa restriction à chaque A_i soit développable en série de Laurent. Alors f est développable en série de Laurent dans A .

C'est une conséquence immédiate de 2.11 et 2.12.

4.4. LEMME. - Soit Π une composante convexe de $\text{Reg}(Q)$. Alors $R = P/Q$ est développable en série de Laurent dans $v^{-1}(\Pi)$.

Preuve. - Soit $Q(x) = \sum_{\alpha \in I} a_{\alpha} x^{\alpha}$. D'après 2.8, il existe β tel que, dans $v^{-1}(\Pi)$, on ait $v(a_{\alpha} x^{\alpha}) > v(a_{\beta} x^{\beta})$ pour $\alpha \neq \beta$. Posons

$$Q'(x) = \sum_{\alpha \neq \beta} a_{\alpha} / a_{\beta} x^{\alpha - \beta}.$$

On a alors

$$R(x) = \frac{P(x)}{a_{\alpha} x^{\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} [Q'(x)]^n,$$

la série convergeant dans $v^{-1}(\Pi)$.

4.5. THÉOREME. - Les composantes convexes de $\mathbb{C}W(R)$ sont des polytopes convexes, et R est développable en série de Laurent dans les images réciproques de

ces composantes connexes.

Preuve. - Soit Π une composante connexe de $\mathbb{C}W(R)$. Π est ouvert puisque $W(R)$ est fermé. $v(K^m) \cap \text{Reg}(Q)$ est dense dans $\mathbb{C}W(R)$. Les cubes fermés contenus dans Π ayant leurs sommets dans $v(K^m) \cap \text{Reg}(Q)$ forment donc une famille enchaînée engendrant Π . Soit Σ un de ces cubes. Dans la polycouronne $v^{-1}(\Sigma)$, R est séparément développable en série de Laurent. Si σ est un sommet de Σ , dans le polycercle $v^{-1}(\sigma)$, R est développable en série de Laurent d'après le lemme 4.4. Il résulte alors du théorème 3.4 que R est développable en série de Laurent dans $v^{-1}(\Sigma)$. Il résulte alors du lemme 4.3 que R est développable en série de Laurent dans $v^{-1}(\Pi)$. D'après 2.4, cette série converge dans $v^{-1}(\widehat{\Pi})$, où $\widehat{\Pi}$ désigne l'enveloppe convexe de Π . Dans $v^{-1}(\widehat{\Pi})$, R n'a donc pas de singularités, il en résulte que $\widehat{\Pi} \cap W(R) = \emptyset$, et donc $\widehat{\Pi} = \Pi$. Π est donc convexe. Le fait que ce soit un polytope résulte du fait que $W(R) \subset Z(Q)$.

4.6. Par définition, si $a \in K^m$ est une singularité de R , $v(a) \in W(R)$, réciproquement on a le théorème suivant.

THÉORÈME. - Si $\mu \in N(R) \cap v(K^m)$, la fraction rationnelle R a des singularités dans le polycercle $v(x) = \mu$.

Preuve. - Soit $\mu \in W(R) \cap v(K^m)$, et supposons que $R(x)$ n'ait pas de singularités dans le polycercle $v(x) = \mu$.

Supposons d'abord qu'il existe un segment, centré en μ et parallèle à l'un des axes de \mathbb{R}^m (par exemple, l'axe $o\mu_m$), intersectant $W(R)$ seulement au point μ . Soient (μ', ρ) et (μ', r) les deux extrémités de ce segment, avec $r < \mu_m < \rho$ et r appartenant à $v(K^-)$.

Il résulte du théorème 4.5 que R est développable en série de Laurent dans les polycercles $v(x) = (\mu', \rho)$ et $v(x) = (\mu', r)$. Lorsque x' est fixé avec $v(x') = \mu'$, on voit que $R(x', x_m)$ est développable en série de Laurent par rapport à la variable x_m . Il résulte alors du théorème 3.4 que R est développable en série de Laurent dans $A = \{x \mid v(x') = \mu', r \leq v(x) \leq \rho\}$. Soient Π et Π' les composantes connexes de $\mathbb{C}W(R)$ contenant (μ', ρ) et (μ', r) respectivement. Posons $B = v^{-1}(\Pi)$ et $B' = v^{-1}(\Pi')$. Le triplet (A, B, B') est enchaîné. Comme R est développable en série de Laurent dans A, B et B' (théorème 4.5), il résulte du lemme 4.3 que R est développable en série de Laurent dans $A \cup B \cup B'$ et donc dans $v^{-1}(\widehat{\Pi \cup \Pi'})$. R n'a pas de singularités dans $v^{-1}(\widehat{\Pi \cup \Pi'})$, donc $W(R) \cap (\widehat{\Pi \cup \Pi'}) = \emptyset$, ce qui contredit le fait que $\mu \in W(R) \cap (\widehat{\Pi \cup \Pi'})$. R a donc des singularités dans le polycercle $v(x) = \mu$.

S'il n'existe pas de segment contenant μ , parallèle à son axe et non contenu dans $W(R)$, on se ramène au cas précédent par un changement de variable (polynomial) convenable.

5. Ensembles saturés projectivement connexes.

5.1. L'ouvert $A \subset K^m$ est dit saturé si $v^{-1}(v(A)) = A$; autrement dit si $x \in A$ et $v(y) = v(x)$ impliquent $y \in A$.

Le domaine de convergence d'une série de Laurent est saturé, c'est ce qui motive cette définition.

5.2. L'ensemble saturé A est dit projectivement connexe s'il existe Ω , ouvert connexe de \mathbb{R}^m , tel que $\Omega \cap v(K^m) \subset v(A) \subset \bar{\Omega} \cap v(K^m)$.

5.3. THÉOREME. - Soient A un ensemble saturé projectivement connexe, et f un élément analytique sur A . Alors f est somme d'une série de Laurent convergent sur A .

Preuve. - Soit R une fraction rationnelle sans singularités dans A . Montrons que $W(R) \cap \Omega = \emptyset$, $W(R)$ est formé de polyèdres de dimension $m - 1$ contenus dans des hyperplans orthogonaux à des vecteurs de coordonnées entières. Comme $v(K)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{Q} , et est dense dans \mathbb{R} , il en résulte que $W(R) \cap v(K^m)$ est dense dans $W(R)$. Alors $W(R) \cap \Omega$ étant ouvert dans $W(R)$, $W(R) \cap \Omega \cap v(K^m)$ est dense dans $W(R) \cap \Omega$. Mais

$$W(R) \cap \Omega \cap v(K^m) \subset W(R) \cap v(A) ,$$

et, puisque A est saturé et que R n'a pas de singularités dans A ,

$$W(R) \cap v(A) = \emptyset ,$$

d'où le résultat.

Ω , étant connexe, est donc contenu dans une des composantes connexes de $C W(R)$, soit Π ; et alors $v(A) \subset \Pi$ puisque $v(A) \cap W(R) = \emptyset$. Rappelons que, dans Π , $v(R, \mu)$ est une fonction concave.

Soit alors R une suite de fractions rationnelles sans singularités dans A convergent uniformément vers f sur A . Soit Π_n le polytope convexe associé à R_n contenant Ω . Dans Π_n , R_n est développable en série de Laurent (théorème 4.5), soit $F_n = \sum_{\alpha} a_{\alpha, n} X^{\alpha}$ cette série. Soit $\mu \in v(A)$, alors $v(F_n - F_m, \mu) \rightarrow +\infty$, quand n et m tendent vers $+\infty$, ce qui montre que, pour α fixé, $a_{\alpha, n}$ est une suite de Cauchy qui converge vers un élément a_{α} de K . Soit alors $F = \sum_{\alpha} a_{\alpha} X^{\alpha}$. On voit que $\mu \in \text{conv}(F)$ et que, pour $v(x) = \mu$, on a

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\alpha} a_{\alpha, n} x^{\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = f(x) .$$

5.4. THÉOREME. - Un ensemble saturé projectivement connexe est un ensemble analytique.

C'est une conséquence immédiate de 2.12 et du théorème précédent.

5.5. Notons \mathcal{C} la classe des ouverts saturés projectivement connexes (une ori-

gine et des axes ayant été choisis une fois pour toutes). Nous dirons que f est \mathbb{C} -analytique sur Λ , si $\Lambda = \bigcup_{i \in I} \Lambda_i$, la famille (Λ_i) étant enchaînée, si f est un élément analytique sur chaque Λ_i et si les Λ_i appartiennent à \mathbb{C} .

PROPOSITION. - Les fonctions \mathbb{C} -analytiques sont développables en série de Laurent sur leur domaine de définition.

C'est une conséquence immédiate du théorème 5.3 et du lemme 4.3.

On voit donc que la classe \mathbb{C} ne permet pas d'obtenir une classe assez vaste de fonctions analytiques.

6. Ensembles quasi-connexes.

6.1. Toutes les notions introduites jusqu'ici peuvent être relativisés par un changement d'origine. Si $y \in K^m$, on pose $v_y(x) = v(x - y)$; on introduit la fonction de valuation d'une fraction rationnelle R relativement à y :

$$v_y(R(x), \mu) = v(R(x + y), \mu).$$

On vérifie sans peine que si $v(y - z) = \mu$, alors $v_y(R, \mu) = v_z(R, \mu)$.

Λ est dit saturé relativement à y si $v_y^{-1}(v_y(\Lambda)) = \Lambda$.

Si $\Lambda \subset K^m$, nous appellerons partie saturée de Λ relativement à y , et nous noterons Λ_y^s le plus grand sous-ensemble de Λ saturé relativement à y . On voit que " $x \in \Lambda_y^s$ " équivaut à "pour tout $z \in K^n$,

$$v_y(z) = v_y(x) \text{ implique } z \in \Lambda".$$

Λ_y^s est la réunion de tous les polycercles centrés en y contenus dans Λ .

6.2. L'ouvert $\Lambda \subset K^m$ est appelé quasi-connexe élémentaire si, et seulement si, quel que soit $y \in \Lambda$, il existe un ouvert Ω de $\overline{R^m}$ tel que

- (a) $\Omega \cap v(K^m) \subset v_y(\Lambda_y^s)$;
- (b) (Ω_k) désignant la famille des composantes connexes de Ω , la famille $(\overline{\Omega_k} \cap R^m)$ est enchaînée;
- (c) $v_y(\Lambda) \subset (\bigcup_k \overline{\Omega_k})$.

Λ est dit quasi-connexe si c'est la réunion d'une famille enchaînée de quasi-connexes élémentaires.

Si $m = 1$, un quasi-connexe élémentaire est un quasi-connexe au sens de KRASNER [2].

6.3. Soient Λ un quasi-connexe élémentaire, f un élément analytique sur Λ , $y \in \Lambda$. Si R_n est une suite de fractions rationnelles sans singularités sur Λ et convergeant uniformément sur Λ vers f , on vérifie sans peine que, pour $\mu \in \overline{v_y(\Lambda)}$, $v_y(R_n, \mu)$ converge vers une limite, et que cette limite ne dépend pas de la suite R_n considérée. On note donc cette limite $v_y(f, \mu)$.

Sur $v^{-1}(\bar{\Omega}_k) \cap \Lambda_y^s$, f est développable en une série de Laurent f_k (théorème 5.3), et l'on a, pour $\mu \in \Omega_k$, $v_y(f, \mu) = f_k(\mu)$. Pour $\mu \in \Lambda_y^s$, on a

$$v_y(f, \mu) = \inf_{v_y(x) = \mu} v(f(x)).$$

Si y et $z \in \Lambda$, $v(y - z) = \mu$, alors $v_y(f, \mu) = v_z(f, \mu)$.

6.4. THÉORÈME. - Un ensemble quasi-connexe est analytique.

Il suffit de démontrer le théorème dans le cas où Λ est un quasi-connexe élémentaire.

6.5. LEMME. - Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{R}^m , et soit f un élément analytique sur $v_y^{-1}(\Omega)$. S'il existe $\mu \in \Omega \cap \mathbb{R}^m$ tel que $v_y(f, \mu) = +\infty$, on a $v_y(f, \mu) = +\infty$ pour tout $\mu \in \bar{\Omega} \cap \mathbb{R}^m$.

Preuve. - La fonction $v_y(f, \mu)$ se prolonge à $\bar{\Omega}$, d'après le théorème 5.3, $\bar{\Omega}$ étant convexe et la fonction $v_y(f, \mu)$ étant concave, on voit que si, pour $\lambda \in \bar{\Omega} \cap \mathbb{R}^m$, $v_y(f, \lambda) = +\infty$, alors $v_y(f, \mu) = +\infty$ pour tout $\mu \in \bar{\Omega}$, et le résultat reste vrai par continuité pour $\mu \in \bar{\Omega} \cap \mathbb{R}^m$.

6.6. Démonstration du théorème 6.4. - Soit f un élément analytique sur Λ , et supposons que f soit nulle au voisinage de y et ne soit pas nulle au voisinage de z .

Soient $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ les ouverts connexes de \mathbb{R}^m , annoncés par la définition 6.2, tels que

$$v_y^{-1}(\Omega_k) \subset \Lambda, \quad \bar{\Omega}_k \cap \bar{\Omega}_{k+1} \cap \mathbb{R}^m \neq \emptyset \quad \text{pour } 1 \leq k < n, \quad v_y(y) \in \bar{\Omega}_1, \quad \text{et } v_y(z) \in \bar{\Omega}_n.$$

Soient $\mu_k \in \bar{\Omega}_k \cap \bar{\Omega}_{k+1} \cap \mathbb{R}^m$. Par application répétée du lemme 6.5, on voit que, puisque $v(f, \mu) = +\infty$ au voisinage de $v_y(y)$, on a $v_y(f, \mu_k) = +\infty$ et donc $v_y(f, \lambda) = +\infty$ avec $\lambda = v(z - y)$.

Un raisonnement analogue relatif à z montre que $v_z(f, \lambda) \neq +\infty$. Or, d'après 6.4, on doit avoir $v_z(f, \lambda) = v_y(f, \lambda)$; il y a contraction.

6.7. On notera \mathcal{K} la classe des ensembles quasi-connexes. La classe \mathcal{K} n'épuise pas la classe \mathcal{A} des ensembles analytiques (on voit en effet que c'est le cas si $m = 1$ [4], mais les fonctions \mathcal{K} -analytiques forment une famille assez riche pour étudier le prolongement analytique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] INGLETON (A. W.). - The Hahn-Banach theorem for non-archimedean valued fields, Proc. Cambr. phil. Soc., t. 48, 1952, p. 41-45.
- [2] KRASNER (H.). - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets, Colloques internationaux du C. N. R. S. : Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres [143. 1964. Clermont-Ferrand]; p. 97-141. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1966.

- [3] LAZARD (M.). - Les zéros d'une fonction analytique d'une variable sur un corps valué complet. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 14 ; p. 47-76).
- [4] MOTZKIN (E.) et ROBBA (P.). - Prolongement analytique en analyse p -adique, Séminaire de théorie des nombres, Université de Bordeaux, 1970/71 (multigraphié).

Philippe ROBBA
138 rue Nationale
75013 PARIS

(Texte reçu le 10 janvier 1972)
