MICHEL FLIESS

Séries formelles rationnelles et reconnaissables

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 13, nº 1 (1971-1972), exp. nº 12, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1971-1972__13_1_A11_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
13e année, 1971/72, n° 12, 14 p.

31 janvier 1972

SÉRIES FORMELLES RATIONNELLES ET RECONNAISSABLES

par Michel FLIESS

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
1. Introduction.	12-01
2. Définitions et propriétés générales.	12-01
3. Matrices de Hankel.	12-03
4. Cas d'un anneau de Krull.	12-06
5. Propriété de Fatou.	12-08
6. Décomposition en éléments simples.	12-09
7. Représentation matricielles minimales.	12-11
8. Projections.	12-12

1. Introduction.

La littérature sur les développements de Taylor des fractions rationnelles en une indéterminée est considérable : on y trouve, démontrés selon les méthodes les plus variées, d'importants théorèmes. Par contre, rares sont les résultats obtenus dans le cas de plusieurs indéterminées commutatives. A première vue, il y avait là un paradoxe d'autant plus irritant que, quoique développée seulement depuis une douzaine d'années, la théorie des séries rationnelles en plusieurs indéterminées non commutatives peut être déjà considérée comme plus riche que celle en plusieurs indéterminées commutatives.

La difficulté peut être levée en introduisant le concept de séries reconnaissables, dont nous donnerons ici les propriétés fondamentales. En toute généralité, nous traiterons le cas de plusieurs indéterminées qui commutent ou non. Notre méthodologie permet d'aborder de manière nouvelle des questions déjà étudiées dans le cas d'une seule indéterminée, comme, par exemple, la notion de matrice de Hankel et la propriété de Fatou.

2. Définitions et propriétés générales.

Soit X un ensemble non vide, appelé alphabet, qui, dans ce travail, sera supposé fini. Soit $X^*/(\mathcal{C})$ le monoïde dit littéral, engendré par X, et soumis aux relations de commutation

$$\mathcal{C} = \{xx' = x'x \mid (x , x') \in C \subset X \times X ; \ x \neq x'\} .$$

Lorsque $\mathcal{C}$ est vide, on obtient le monoïde libre X^*. Lorsque $\mathcal{C}$ contient toutes les relations de commutation possibles, on obtient le monoïde commutatif libre

X^+ . Quel que soit $\mathcal{C}$, il est clair qu'il existe un épimorphisme canonique de X^* sur $X^*/(\mathcal{C})$, d'où notre notation.

Tout élément de $X^*/(\mathcal{C})$ est appelé <u>mot</u> ; l'élément neutre, le <u>mot vide</u>, est noté "1" . Pour diverses propriétés des monoïdes littéraux, voir CARTIER et FOATA [4].

A étant un anneau commutatif unitaire, on note $A\langle X/(\mathcal{C})\rangle$ et $A\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$ les anneaux des <u>polynômes</u> et des <u>séries formelles</u> à coefficients dans A et en les indéterminées $x \in X$, soumises aux relations de commutation $\mathcal{C}$. Un élément $s \in A\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$ est noté

$$s = \sum\{(s\ ,\ w)w \mid w \in X^*/(\mathcal{C})\}\ ,\ \text{où}\ (s\ ,\ w) \in A\ .$$

Lorsque $\mathcal{C}$ est vide, on obtient les anneaux $A\langle X\rangle$ et $A\langle\langle X\rangle\rangle$ des polynômes et des séries formelles en les indéterminées associatives $x \in X$ (non commutatives si card $X \geqslant 2$). Lorsque $\mathcal{C}$ contient toutes les relations de commutation possibles, on obtient les anneaux $A[X]$ et $A[[X]]$ des polynômes et des séries en indéterminées commutatives.

Une série $s \in A\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$ est inversible, si et seulement si son terme constant $(s\ ,\ 1)$ l'est dans A . Un sous-anneau R de $A\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$ est dit <u>rationnellement clos</u>, si et seulement si l'inverse de tout élément inversible de R appartient encore à R . L'anneau $A\langle(X/(\mathcal{C}))\rangle$ des séries <u>rationnelles</u> (SCHÜTZENBERGER [15]) est le plus petit sous-anneau de $A\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$ contenant $A\langle X/(\mathcal{C})\rangle$, qui soit rationnellement clos. L'anneau des séries rationnelles en les indéterminées commutatives $x \in X$ est noté $A[(X)]$. K étant un corps, il est clair que r appartient à $K[(X)]$, si et seulement si c'est le développement de Taylor à l'origine d'une fraction rationnelle P/Q , où $P\ ,\ Q \in K[X]$ et $Q(0\ ,\ \ldots\ ,\ 0) \neq 0$.

N_1 , N_2 étant deux entiers positifs, on désigne par $A^{N_1 \times N_2}$ l'ensemble des matrices à N_1 lignes et N_2 colonnes, dont les coefficients appartiennent à A .

Une application $\mu : X^*/(\mathcal{C}) \to A^{N\times N}$ est appelée <u>représentation</u> si, et seulement si, c'est un homomorphisme de $X^*/(\mathcal{C})$ dans le monoïde multiplicatif $A^{N\times N}$.

Une série $r \in A\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$ est dite <u>reconnaissable</u>, si et seulement s'il existe un entier $N \geqslant 1$, une représentation $\mu : X^*/(\mathcal{C}) \to A^{N\times N}$, une matrice $p \in A^{N\times N}$, tels que

$$(1) \qquad r = \sum\{(\mathrm{Tr}\ p\mu w)\ w \mid w \in X^*/(\mathcal{C})\}\ ,$$

où $\mathrm{Tr}\ p\mu w$ désigne la trace de la matrice $p\mu w$. Soit $A^{rec}\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$ la famille des séries reconnaissables.

PROPOSITION 2.1 (SCHÜTZENBERGER [15]). - <u>Pour qu'une série</u> $r \in A\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$ <u>soit reconnaissable, il faut et il suffit qu'il existe un entier</u> $N \geqslant 1$, <u>une représentation</u> $\mu : X^*/(\mathcal{C}) \to A^{N\times N}$ <u>tels que</u>

$$r = (r\ ,\ 1) + \sum\{(\mu w)_{1,N}\ w \mid w \in XX^*/(\mathcal{C})\}\ .$$

COROLLAIRE. - *Pour qu'une série* $r \in A\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$ *soit reconnaissable, il faut et il suffit qu'il existe un entier* $N \geq 1$, *une représentation* $\mu : X^*/(\mathcal{C}) \to A^{N\times N}$, *des matrices ligne* $\lambda \in A^{1\times N}$ *et colonne* $\gamma \in A^{N\times 1}$, *tels que*

(2) $$r = \sum\{(\lambda\mu w\gamma)\ w \mid w \in X^*/(\mathcal{C})\} ,$$

PROPOSITION 2.2 - *Toute série reconnaissable est rationnelle.*

Preuve. - Soit $r \in A^{rec}\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$ donnée comme en (1). Une partie non vide $F \subset X$ est dite commutative, si, et seulement si, deux de ses éléments commutent toujours. Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble de ces parties. Généralisant aux monoïdes littéraux la notion de fonction de Möbius, CARTIER et FOATA [4] ont montré que

$$(1 - \sum_{F\in\mathfrak{F}} (-1)^{\mathrm{card}F} \prod_{x\in F} x)^{-1} = \sum\{w \mid w \in X^*/(\mathcal{C})\} ,$$

ce qui prouve que le deuxième membre est une série rationnelle. Substituons-y à tout $x \in X$ la matrice μx . On obtient une matrice carrée m d'ordre N , dont on peut montrer (cf. SCHÜTZENBERGER [15], RICHARD [14]) que ses coefficients sont des séries rationnelles. Comme $r = \mathrm{Tr}\ pm$, r est rationnelle.

La proposition fondamentale suivante est due à SCHÜTZENBERGER [15] :

PROPOSITION 2.3 - *Il y a identité dans* $A\langle\langle X\rangle\rangle$ *entre les familles des séries rationnelles et reconnaissables.*

C'est, en particulier, le cas pour une seule indéterminée. K étant un corps, on peut montrer [6] qu'une série de $A[[x_1 , \dots , x_n]]$ est reconnaissable, si, et seulement si, elle est le développement d'une fraction de la forme

$P/\prod_{i=1}^{n} Q_i$, où $P \in K[x_1 , \dots , x_n]$, $Q_i \in K[x_i]$, $Q_i(0) \neq 0$ $(i = 1 , \dots , n)$.

Pour d'autres propriétés générales des séries rationnelles et reconnaissables, voir [6]. Pour une étude des séries *algébriques*, voir [8].

3. Matrices de Hankel.

A une série $s \in A\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$, on associe un tableau infini appelé *matrice de Hankel*, noté $\mathcal{H}(s)$, dont lignes et colonnes sont indexées par $X^*/(\mathcal{C})$ et tel que l'élément d'indice $(v , w) \in X^*/(\mathcal{C}) \times X^*/(\mathcal{C})$ soit le coefficient (s , vw) .

K étant un corps, le *rang* de la matrice de Hankel d'une série de $K\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$, que l'on appelle aussi rang de la série, est, par définition :

- zéro, si, et seulement si, la série, donc aussi la matrice, sont nulles ;

- fini, non nul, égal à r , si, et seulement si, l'on peut extraire un sous-déterminant non nul d'ordre r , et si tous les sous-déterminants d'ordre $r + 1$ sont nuls ;

- infini dans les autres cas.

A étant supposé intègre, de corps de fractions K , le rang d'une série de

$A\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$ est, par définition, celui de la série considérée comme appartenant à $K\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$.

La proposition suivante reprend et généralise, tant dans son énoncé que sa démonstration, SCHÜTZENBERGER [15], HELLER [9] et [10], CARLYLE et PAZ [3].

PROPOSITION 3.1 - K étant un corps, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une série $r \in K\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$ soit reconnaissable est qu'elle soit de rang fini $\bar{N}$. Il existe alors une représentation $\bar{\mu} : X^*/(\mathcal{C}) \to K^{\bar{N}\times\bar{N}}$, des matrices ligne $\bar{\lambda}\in K^{1\times\bar{N}}$ et colonne $\bar{\gamma} \in K^{\bar{N}\times 1}$, telles que

$$r = \sum \{(\bar{\lambda}\bar{\mu}w\bar{\gamma})\ w \mid w \in X^*/(\mathcal{C})\} .$$

On peut déterminer :

- deux ensembles de $\bar{N}$ mots $\{d_j\}_{j=1}^{\bar{N}}$, $\{g_i\}_{i=1}^{\bar{N}}$,

- une application $\chi : X^*/(\mathcal{C}) \to K^{\bar{N}\times\bar{N}}$ définie, pour tout $w \in X^*/(\mathcal{C})$, par $(\chi w)_{i,j} = (r\ ,\ g_i\ wd_j)$ $(i\ ,\ j = 1\ ,\ \dots\ ,\ \bar{N})$, telle que $\chi 1$ soit inversible, vérifiant $\chi w = \chi 1\ \bar{\mu} w$;

- $\bar{N}^2$ matrices $m_{i,j} \in K^{\bar{N}\times\bar{N}}$ $(i\ ,\ j = 1\ ,\ \dots\ ,\ \bar{N})$ vérifiant, pour tout $w\in X^*/(\mathcal{C})$,

$$\bar{\mu}w = \sum_{i,j} m_{i,j}(r\ ,\ g_i\ wd_j) .$$

Soient une représentation $\mu : X^*/(\mathcal{C}) \to K^{N\times N}$, $\lambda \in K^{1\times N}$, $\gamma \in K^{N\times 1}$, telles que

$$r = \sum \{(\lambda\mu w\gamma)\ w \mid w \in X^*/(\mathcal{C})\} .$$

Alors, $N \geq \bar{N}$, et il existe $P \in K^{N\times\bar{N}}$ de rang $\bar{N}$ telle que

$$P\mu w = \bar{\mu}wP\ ,\quad \bar{\lambda}P = \lambda\ ,\quad P\gamma = \bar{\gamma}\ .$$

Lorsque $N = \bar{N}$, les représentations μ et $\bar{\mu}$ sont semblables.

Preuve.

(i) Soit $r \in K^{rec}\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$, définie comme en (2). Le K-espace vectoriel engendré par les colonnes de $\mathcal{H}(r)$ est de dimension finie : c'est un sous-espace vectoriel de celui engendré par les N colonnes dont les coefficients d'indice w sont ceux du N-uple $\mu w\gamma$. D'où la finitude du rang.

(ii) Soit $r \in K\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$ de rang fini $\bar{N}$. Il existe deux ensembles de $\bar{N}$ mots $\{d_1\ ,\ \dots\ ,\ d_{\bar{N}}\}$ $\{g_1\ ,\ \dots\ ,\ g_{\bar{N}}\}$ tels que $\det[(r\ ,\ g_i\ d_j)] \neq 0$. Pour deux mots quelconques w et w' , il vient

$$(3)\qquad (r\ ,\ w'w) = \sum_{j=1}^{\bar{N}} m_j(w)(r\ ,\ w'd_j)\ ,$$

où $m_j(w) = (-1)^{j+\bar{N}} \Delta_j(w)/\det[(r , g_i d_j)]$, $\Delta_j(w)$ étant le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant d_j par w dans $[(r , g_i d_j)]$. La formule (3) exprime que les colonnes d'indices $d_1 , \ldots , d_{\bar{N}}$ forement une base du K-espace vectoriel engendré par les colonnes de $\mathcal{H}(r)$.

Soient $\bar{\mu} , \chi : X/(\mathbb{C}) \to K^{\bar{N}\times\bar{N}}$ les applications définies par $(\bar{\mu}w)_{ij} = m_i(wd_j)$, $(\chi w)_{i,j} = (r , g_i wd_j)$.

En vertu de (3), il vient

(4) $$\chi w = \chi 1 \bar{\mu} w .$$

Comme χ^1 est inversible, $\bar{\mu}$ est une représentation. Soit $\bar{\lambda} \in K^{1\times\bar{N}}$ et $\bar{\gamma} \in K^{\bar{N}\times 1}$ les matrices ligne et colonne dont les j-ièmes coefficients sont respectivement (r , d_j) et $m_j(1)$. En vertu de (3), il vient

$$r = \sum\{(\bar{\lambda}\bar{\mu}w\bar{\gamma}) \, w \mid w \in X^*/(\mathbb{C})\} .$$

(4) permet de déterminer $\bar{N}^2$ matrices $m_{i,j} \in K^{\bar{N}\times\bar{N}}$, telles que

$$\bar{\mu}w = \sum_{i,j} m_{i,j}(r , g_i wd_j) .$$

(iii) Un $K\langle X/(\mathbb{C})\rangle$-<u>module sériel</u> (1) gauche est un triple (E , c , ℓ) , où E est un $K\langle X/(\mathbb{C})\rangle$-module gauche, c un élément de E , $\ell : E \to K$ une application K-linéaire. A un tel module sériel correspond la série

$$s = \sum\{(\ell wc) \, w \mid w \in X^*/(\mathbb{C})\} .$$

Réciproquement, à une série $s \in K\langle\langle X/(\mathbb{C})\rangle\rangle$ correspond un module sériel droit (E , c , p) , où E n'est autre que $K\langle X/(\mathbb{C})\rangle$, considéré comme $K\langle X/(\mathbb{C})\rangle$-module gauche, c le polynôme unité, ℓ l'application qui à $p \in K\langle X/(\mathbb{C})\rangle$ fait correspondre :

$$\sum p , w)(s , w) \mid w \in X^*/(\mathbb{C})\} .$$

Un morphisme $\varphi : (E , c , \ell) \to (E' , c' , \ell')$ de $K\langle X/(\mathbb{C})\rangle$-module sériel droit est un morphisme du $K\langle X/(\mathbb{C})\rangle$-module **E dans le** $K\langle X/( )\rangle$-module E' , tel que $\varphi c = c'$, ${}^t\varphi\ell' = \ell$. (${}^t\varphi$ désigne l'application duale de φ considéré comme morphisme de K-espaces vectoriels.) On a isomorphisme, si, et seulement si, φ est un isomorphisme entre E et E' .

Soit N le sous-$K\langle X/(\mathbb{C})\rangle$-module de E , défini par

$$N = \{n \mid \ell(K\langle X/(\mathbb{C})\rangle n) = 0\} .$$

Soient $R = E/N$ et $\alpha : E \to R$ l'épimorphisme canonique. Il existe une application K-linéaire $\ell_0 : R \to K$, telle que $\ell = \ell_0 \, \alpha . (R , c_0 , \ell_0)$, où $c_0 = \alpha c$, est le module sériel image par α de (E , c , ℓ) , qui est <u>réduit</u>, ce qui signifie que le sous-$K\langle X/(\mathbb{C})\rangle$-module de R

$$N_0 = \{n \mid \ell_0(K\langle X/(\mathbb{C})\rangle \, n) = 0\} ,$$

(1) Comparer avec les <u>modules stochastiques</u> de HELLER [9], [10].

est réduit à $\{0\}$. R étant cyclique, en ce sens que $R = K\langle X/(\mathcal{C})\rangle c_0$, on en déduit que deux modules sériels réduits, associés à la même série s, sont isomorphes. On peut doter l'ensemble des colonnes de la matrice de Hankel d'une série

$$s \in K\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$$

d'une structure de $K\langle X/(\mathcal{C})\rangle$-module gauche de la manière suivante : Tout mot $w \in X^*/(\mathcal{C})$ opérant sur la colonne d'indice w' lui fait correspondre la colonne d'indice ww' (R , c_0 , ℓ_0) désignant le module sériel gauche réduit associé à s, R est isomorphe au $K\langle X/(\mathcal{C})\rangle$-module gauche précédemment défini, ce qui en donne une interprétation remarquable.

On obtient des définitions et propriétés analogues pour les modules sériels droits et les lignes de la matrice de Hankel.

Soit $r \in K^{rec}\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$ donnée comme en (2). A μ, λ, γ, on peut associer le module sériel gauche (E , c , ℓ), où :

- $E = K^{N\times 1}$, K-espace vectoriel sur lequel opèrent canoniquement les matrices μw et que l'on peut donc considérer comme un $K\langle X/(\mathcal{C})\rangle$-module gauche ;
- $c = \gamma$;
- ℓ est l'application repérée par λ, c'est-à-dire $\ell wc = \lambda\mu w\gamma$.

Les assertions du théorème concernant les liens entre μ, λ, γ et $\bar{\mu}$, $\bar{\lambda}$, $\bar{\gamma}$ apparaissent alors comme la traduction en langage matriciel des propriétés des modules sériels réduits.

La représentation $\bar{\mu}$, qui est définie à une similitude près, est appelée <u>représentation matricielle réduite</u>.

<u>Remarques</u>.

(i) SCHÜTZENBERGER [15] donne une construction remarquable qui permet de retrouver en bonne partie les résultats de la proposition 3.1.

(ii) Dans le cas d'une seule indéterminée x, les liens entre matrices de Hankel de rang fini et séries rationnelles sont classiques (voir, par exemple, PÓLYA et SZEGÖ [13], p. 101, PISOT [12], p. 27).

Rappelons que le rang de la série rationnelle, développement de P/Q, où $P, Q \in K[x]$, $(P , Q) = 1$, $Q(0) \neq 0$ est égal,

- soit au degré de Q, si celui-ci est strictement supérieur à celui de P,
- soit au degré de P plus un, si celui-ci est supérieur ou égal à celui de Q.

4. Cas d'un anneau de Krull.

PROPOSITION 4.1. - A <u>étant un anneau de Krull</u>, <u>une condition nécessaire et suffisante pour qu'une série</u> $r \in A\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$ <u>soit reconnaissable est qu'elle soit de</u>

<u>rang fini</u> $\bar{N}$. <u>Il existe alors une représentation</u> $\bar{\mu}$: $X^*/(\mathcal{C}) \to A^{\bar{N}\times\bar{N}}$, <u>des matrices ligne</u> $\bar{\lambda} \in A^{1\times\bar{N}}$ <u>et colonne</u> $\bar{\gamma} \in A^{\bar{N}\times 1}$, <u>telles que</u>

$$r = \sum \{(\lambda\mu w\gamma)\ w \mid w \in X^*/(\mathcal{C})\} .$$

<u>On peut déterminer</u> $2\bar{N}$ <u>ensembles finis de mots</u> $\underset{\sim}{D}_j = \{d_j^{(\ell_j)}\}_{j=1}^{\bar{N}}$, $\underset{\sim}{G}_i = \{g_i^{(k_i)}\}_{i=1}^{\bar{N}}$, <u>une application</u> χ : $X^*/(\mathcal{C}) \to A^{\bar{N}\times\bar{N}}$, <u>définie, pour tout</u> $w \in X^*/(\mathcal{C})$, <u>par</u>

$$(\chi w)_{i,j} = \sum_{k_i,\ell_j} \alpha_{i,j}^{(k_i,\ell_j)} (r\ ,\ g_i^{(k_i)}\ w d_j^{(\ell_j)}) , \qquad (\alpha_{i,j}^{(k_i,\ell_j)} \in A) ,$$

<u>telle que</u> $\det \chi 1 \neq 0$, <u>vérifiant</u> $\chi w = \chi^1 \bar{\mu} w$.

<u>Preuve</u>. - En vertu du théorème 2.1.1, le rang d'une série reconnaissable est fini. Réciproquement, soit $r \in A\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$ de rang fini $\bar{N}$.

(i) Supposons d'abord que A soit un anneau principal, de corps de fractions K . La formule (3) permet de déterminer $M \in A$ tel que le A-module engendré par les colonnes de $\mathcal{H}(r)$ soit un sous-module d'un A-module libre de rang $\bar{N}$, engendré par $\bar{N}$ colonnes, dont les coefficients sont des éléments de K ayant des dénominateurs divisant M . En vertu des propriétés classiques des modules sans torsion sur un anneau principal, le A-module engendré par les colonnes de $\mathcal{H}(r)$ est libre, de type fini, de rang nécessairement égal à $\bar{N}$. On peut donc déterminer $\bar{N}$ ensembles finis $\underset{\sim}{R}_j = \{\rho_j^{(\ell_j)}\}_{j=1}^{\bar{N}}$ d'éléments de $X^*/(\mathcal{C})$ tels que, $\underset{\sim}{c}_w$ désignant la colonne d'indice w de $\mathcal{H}(r)$, les colonnes

$$\underset{\sim}{c}_j = \sum_{\ell_j} c_{\ell_j}\ \underset{\sim}{c}_{\rho_j^{(\ell_j)}} \qquad (c_{\ell_j} \in A\ ,\ j = 1\ ,\ \dots\ ,\ \bar{N}) ,$$

forment une base du A-module libre engendré par les colonnes de $\mathcal{H}(r)$.

Il existe $\bar{N}$ mots $\{\sigma_i\}_{i=1}^{\bar{N}}$ tels que les lignes d'indice σ_i de la matrice formée par les colonnes $\underset{\sim}{c}_j$ soient linéairement indépendantes. Pour deux mots quelconques w , w' il vient

(5) $$(r\ ,\ w'w) = \sum_{j=1}^{\bar{N}} m_j(w)\ \underset{\sim}{c}_j(w') \qquad (m_j(w) \in A ,$$

où $\underset{\sim}{c}_j(w')$ désigne le coefficient d'indice w' de $\underset{\sim}{c}_j$.

Soit $\bar{\mu}$, χ : $X^*/(\mathcal{C}) \to A^{\bar{N}\times\bar{N}}$ les applications définies par

$$(\bar{\mu} w)_{i,j} = \sum_{\ell_j} c_{\ell_j}\ m_i(w\rho_j^{\ell_j}) ,$$

$$(\chi w)_{i,j} = \sum_{\ell_j} c_{\ell_j} (r\ ,\ \sigma_i\ w\rho_j^{(\ell_j)}) .$$

En vertu de (5), il vient $\chi w = \chi 1\, \bar{\mu} w$. Comme $\det \chi 1 \neq 0$, $\bar{\mu}$ est une représentation. Soient $\bar{\lambda} \in K^{1\times\bar{N}}$, $\bar{\gamma} \in K^{\bar{N}\times 1}$ les matrices ligne et colonne dont les j-ièmes coefficients sont

$$\sum_{\ell_j} c_{\ell_j} (r\ ,\ \rho_j^{(\ell_j)}) \quad \text{et} \quad m_j(1) ,$$

il vient :

$$r = \sum\{(\bar{\lambda}\bar{\mu}w\bar{\gamma})\, w \mid w \in X^*/(\mathcal{C})\} .$$

(ii) Supposons maintenant que A soit un anneau de Krull. Comme l'a montré BERGMAN [2], A peut être considéré comme l'anneau fixe de l'automorphisme $t^a \mapsto t^{2a}$ opérant sur l'anneau principal $B = A[t , t^{1/2} , \dots , t^{1/2^n} , \dots]$ $(n \geqslant 0)$, où t est une nouvelle indéterminée. Le B-module engendré par les colonnes de $\mathcal{H}(r)$ est libre, de rang $\bar{N}$, il est loisible d'en choisir une base formée de colonnes, dont les coefficients appartiennent à A. Les coefficients c_{ℓ_j} et $m_j(w)$, définis dans la partie (i) de la démonstration, peuvent donc être choisis dans A, ce qui permet de conclure.

Des démonstrations des propositions 3.1 et 4.1, on déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE. - A étant un corps ou un anneau de Krull, pour qu'une série $r \in A\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$ soit reconnaissable, il faut et il suffit que le A-module engendré par les lignes ou les colonnes de $\mathcal{H}(r)$ soit libre, de type fini. Les rangs de ces deux modules sont égaux au rang de r.

Remarquons enfin qu'il existe une dualité canonique entre les modules engendrés par les lignes et les colonnes de $\mathcal{H}(r)$, celle qui à la ligne d'indice w et à la colonne d'indice w' associe (r , ww').

5. Propriété de Fatou.

A et B étant deux anneaux tels que $A \subset B$, B est dit extension de Fatou de A, si, et seulement si, pour tout alphabet X et tout ensemble $\mathcal{C}$ de relations de commutation, toute série de $B^{rec}\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$ à coefficients dans A, appartient à $A^{rec}\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$.

PROPOSITION 5.1 - Soient deux corps K et L tels que $K \subseteq L$, alors L est extension de Fatou de K.

Preuve. - Soit $r \in L^{rec}\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$ à coefficients dans K. Les déterminants d'ordre suffisamment grand extraits de $\mathcal{H}(r)$ étant nuls, r, considérée comme série de $K\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$, est encore de rang fini et, donc, appartient à $K^{rec}\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$.

Un anneau intègre A est dit anneau de Fatou faible, si, et seulement si, son corps de fractions est extension de Fatou de A.

Un anneau intègre A est dit anneau de Fatou fort, si, et seulement si, K étant son corps de fractions, pour toute série $r \in K^{rec}\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$ de rang $\bar{N}$, à coefficients dans A, il existe une représentation $\bar{\mu} : X^*/(\mathcal{C}) \to A^{\bar{N}\times\bar{N}}$, $\bar{\lambda} \in A^{1\times\bar{N}}$, $\bar{\gamma} \in A^{\bar{N}\times 1}$ telles que :

$$r = \sum\{(\bar{\lambda}\bar{\mu}w\bar{\gamma})\, w \mid w \in X^*/(\mathcal{C})\} .$$

Tout anneau de Fatou fort est évidemment un anneau de Fatou faible.

Il est aisé de vérifier que cette dernière définition généralise celle de BENZAGHOU [1], où seul le cas d'une indéterminée est étudié : toute série de $K[(x)]$ à coefficients dans A est développement d'une fraction rationnelle P/Q, où $P, Q \in A[x]$, $Q(0) = 1$, et où P et Q sont premiers entre eux en tant qu'éléments de $K[x]$; la démonstration se fait en utilisant la relation de récurrence linéaire à coefficients constants de longueur minimale à laquelle obéissent les coefficients, et la représentation matricielle réduite qui lui est associée.

La proposition suivante, qui n'est qu'une reformulation partielle de la proposition 4.1, retrouve, tout en le complétant, un résultat de BENZAGHOU [1] ; elle généralise aussi SCHÜTZENBERGER [15], où il est montré, en substance, que $\mathbb{Z}$ est un anneau de Fatou faible (2).

PROPOSITION 5.2. - Tout anneau de Krull est un anneau de Fatou fort.

Remarques.

(i) CHABERT [5] vient de montrer qu'un anneau est de Fatou au sens de BENZAGHOU [1], si et seulement s'il est complètement intégralement clos. On en déduit que tout anneau de Fatou fort est complètement intégrablement clos. D'autre part, un anneau de valuation discrète est de Fatou fort, si et seulement si la valuation est de hauteur 1 (cf. [1]).

On ne sait s'il existe des anneaux qui ne sont pas de Fatou faibles, ni s'il existe des anneaux de Fatou faibles qui ne sont pas de Fatou forts. [Voir l'Additif.]

(ii) On pourrait se poser des problèmes analogues pour les séries rationnelles. La proposition suivante donne un élément de réponse dans le cas commutatif.

PROPOSITION 5.3. - Pour qu'un anneau intègre A, de corps de fractions K, soit tel que toute série de $K[(x)]$, à coefficients dans A, soit développement de Taylor à l'origine de la fraction rationnelle P/Q, où $P, Q \in A[X]$, $Q(0,\dots,0)=1$, et où P et Q sont premiers entre eux en tant qu'éléments de $K[X]$, il faut et il suffit que A soit complètement intégralement clos.

Preuve. - La condition est évidemment nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, on raisonne par récurrence sur le nombre d'indéterminées. La vérification étant faite pour une seule indéterminée, supposons la condition suffisante pour $n-1$. Soit X tel que $\operatorname{card} X = n$; posons $X' = X \setminus \{x\}$, où $x \in X$. On sait (cf. [6]) que $A[(X)]$ est canoniquement isomorphe à $A[(X')][(x)]$. En vertu de l'hypothèse de récurrence, il vient $A[(X')] = A[[X']] \cap K(X')$. Comme $A[[X']]$ est complètement intégrablement clos, puisque A l'est, il en est de même de $A[(X')]$, ce qui permet de conclure.

6. Décomposition en éléments simples.

K étant un corps, on peut, en vertu du théorème de Krull-Schmidt, décomposer d'une

---

(2) Dans un rapport de D. E. A., non publié, Irène GUESSARIAN a obtenu, indépendamment de nous, des résultats sur la propriété de Fatou des anneaux principaux.

manière, et d'une seule, la représentation matricielle réduite $\bar{\mu}$ associée à une série $r \in K^{rec}\langle\langle X/(C)\rangle\rangle$ en la somme directe d'un nombre fini de représentations indécomposables $\bar{\mu}_i$: $\bar{\mu} = \bigoplus_{i=1}^{k} \bar{\mu}_i$. On en déduit, reprenant les notations de la proposition 3.1, les décompositions $\bar{\lambda} = \bigoplus_{i=1}^{k} \bar{\lambda}_i$, $\bar{\gamma} = \bigoplus_{i=1}^{k} \bar{\gamma}_i$, où $\bar{\lambda}_i$ et $\bar{\gamma}_i$ sont des matrices ligne et colonne de même dimension que $\bar{\mu}_i$, d'où les séries reconnaissables :

$$r_i = \Sigma\{(\bar{\lambda}_i\, \bar{\mu}_i\, w\bar{\gamma}_i)\, w \mid w \in X^*/(C)\} ,$$

qui vérifient $r = \sum_{i=1}^{k} r_i$.

Soit $J \subseteq \{1 , \dots , k\}$ l'ensemble, éventuellement vide, des indices tels que, pour tout $j \in J$, la représentation $\bar{\mu}_j$ soit nilpotente, c'est-à-dire telle que, pour tout $w \in XX^*/(C)$, $\bar{\mu}_j\, w$ soit une matrice nilpotente. En vertu d'un théorème, dû à LEVITZKI (cf. [11], p. 135), le semi-groupe de matrices nilpotentes

$$\{\bigoplus_{j\in J} \bar{\mu}_j\, w \mid w \in XX^*/(C)\} ,$$

est simultanément triangularisable. Donc, pour tout $w \in X^*/(C)$ de longueur suffisante, $\bigoplus_{j\in J} \bar{\mu}_j\, w$ est la matrice nulle, $\sum_{j\in J} r_j$ est un polynôme, appelé <u>partie entière</u> de r.

A une représentation indécomposable non nilpotente $\bar{\mu}_i$ correspond une série r_i dite <u>simple</u>. Deux séries r', $r'' \in K^{rec}\langle\langle X/(C)\rangle\rangle$ sont dites <u>étrangères</u>, si, et seulement si, pour tous α', $\alpha'' \in K \setminus \{0\}$, le rang de $\alpha' r' + \alpha'' r''$ est égal à la somme des rangs de r' et r''. On peut donc énoncer le résultat suivant.

PROPOSITION 6.1. - <u>K étant un corps, toute série de $K^{rec}\langle\langle X/(C)\rangle\rangle$ peut être décomposable de manière unique en la somme de ses parties entières et de séries reconnaissables simples deux à deux étrangères.</u>

<u>Remarques.</u>

(i) Suivant la terminologie de POLYA et SZEGÖ([13], p. 104), appelons <u>rang net</u> de r le rang de $\sum_{i\notin J} r_i$; le <u>rang brut</u> n'est autre que le rang précédemment défini. Une série reconnaissable, dont le rang brut est égal au rang net, est caractérisée par le fait que sa partie entière est nulle.

(ii) Dans le cas d'une seule indéterminée x, on obtient ainsi la décomposition classique d'une fraction rationnelle P/Q, où P, $Q \in K[x]$, $(P , Q) = 1$, $Q(0) \neq 1$. On peut, en effet, écrire

$$P/Q = E + \sum_{i=1}^{\ell} P_i/Q_i \qquad (E , P_i , Q_i \in K[x] , \ i = 1 , \dots , \ell) ,$$

où :

- E est la partie entière qui n'est autre que le quotient de la division euclidienne de P par Q,

- $Q_1 , \dots , Q_\ell$ sont des polynômes irréductibles tels que $P = \prod_{i=1}^{\ell} Q_i$,

- $P_1 , \dots , P_\ell$ sont de degrés strictement inférieurs à ceux respectivement de

$Q_1 , \dots , Q_\ell ,$

– $P_1/Q_1 , \dots , P_\ell/Q_\ell$ sont les éléments simples.

Exemple. – Soient $X = \{x_1 , x_2\}$, $\mu : X^* \to \underset{\sim}{Q}^{2\times 2}$ la représentation définie par

$$\mu x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mu x_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La série de $\underset{\sim}{Q}\langle\langle X\rangle\rangle$,

$$r = \sum \{(\mu f)_{1,2}\, f \mid f \in X^*\} = \sum \{(|f|_{x_1} - |f|_{x_2})\, f \mid f \in X^*\} \quad (3)$$

est rationnelle simple avec rangs brut et net égaux à deux.

7. Représentations matricielles minimales.

La proposition 3.1 fournit la représentation reduite définie à une similitude près. Mais, pour $r \in K^{rec}\langle\langle X/(C)\rangle\rangle$, il peut exister un entier $N \geq 1$, strictement inférieur au rang de r , une représentation $\mu : X^*/(C) \to K^{N\times N}$, une matrice $p \in K^{N\times N}$ produisant r selon la formule (1).

Exemple. – $K = \underset{\sim}{Q}$, $X = \{x_1 , x_2\}$; la représentation $\mu : X^* \to Q^{2\times 2}$ est définie par

$$\mu x_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mu x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il vient :

$$r = \sum \{(\mathrm{Tr}\ p\mu f)\, f \mid f \in X^*\}$$

$$= \sum_{m\geq 0} (2^m - 1)x^m + \sum_{n,\ell\geq 1} (2^{n-1}\, 3^{\ell+1} - 2^{n-1} - 3^\ell)x^n\, y^\ell ,$$

r est de rangs net et brut égaux à sept.

Deux séries $r_1 , r_2 \in K^{rec}\langle\langle X/(C)\rangle\rangle$ sont dites faiblement étrangères, si, et seulement si, elles sont étrangères et si, suivant les notations de la proposition 3.1, étant définies par $\bar N_i , \bar\mu_i , \bar\lambda_i , \bar\gamma_i$ $(i = 1 , 2 ;\ N_1 \geq N_2)$, il existe $\lambda_2' \in K^{1\times \bar N_1}$, $\gamma_2' \in K^{\bar N_1 \times 1}$ telles que :

$$r = \sum \{(\lambda_2'\, \bar\mu_1\, w\gamma_2')\, w \mid w \in X^*/(C)\} .$$

Comme r_1 et r_2 sont étrangères, les matrices $\bar\gamma_1\, \bar\lambda_1$ et $\gamma_2'\, \lambda_2'$ sont K-linéairement indépendantes ; pour tous $\alpha_1 , \alpha_2 \in K$, il vient :

$$(6) \qquad \alpha_1\, r_1 + \alpha_2\, r_2 = \sum \{\mathrm{Tr}(\alpha_1\, \bar\gamma_1\, \bar\lambda_1 + \alpha_2\, \gamma_2'\, \lambda_2')\, \bar\mu_1\, w \mid w \in X^*/(C)\} .$$

Deux séries sont dites fortement étrangères, si, et seulement si, elles sont étrangères, mais non faiblement.

(3) $|f|_{x_i}$ désigne le nombre d'occurrences de x_i dans f .

Soit $r = \sum_{i=1}^{k} r_i$ la décomposition de $r \in K^{rec}\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$. Regroupons les séries r_i en familles de séries deux à deux faiblement étrangères : plusieurs tels regroupements peuvent être possibles, car deux séries faiblement étrangères à une même troisième, ne sont pas nécessairement faiblement étrangères entre elles. La formule (6) permet alors d'obtenir, par sommation directe des représentations, une représentation matricielle produisant r selon la formule (1), qui peut être de dimension inférieure au rang. En vertu de la non nécessaire unité des regroupements, deux représentations ainsi obtenues et de dimension minimale ne sont pas nécessairement semblables.

Réciproquement, soit $r \in K^{rec}\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$, donnée par

$$r = \sum \{\mathrm{Tr}\ p\mu w)\ w \mid w \in X^*/(\mathcal{C})\} ,$$

où μ est de dimension inférieure au rang de r et p de rang supérieur à 1 . Le théorème de Krull-Schmidt permet d'écrire μ comme une somme directe de représentations indécomposables μ_j : $\mu = \bigoplus_{j=1}^{\ell} \mu_j$. La décomposition correspondante $p = \bigoplus_{j=1}^{\ell} p_j$ permet décrire $r = \sum_{j=1}^{\ell} r_j$, où

$$r_j = \sum \{(\mathrm{Tr}\ p_j\ \mu_j\ w)\ w \mid w \in X^*/(\mathcal{C})\} .$$

Ecrivant les matrices p_j comme des sommes de matrices de rang 1 (4), on obtient ainsi le regroupement décrit plus haut.

Remarque. - Dans le cas d'une seule indéterminée x , pour toute série $r \in K[(x)]$, définie par $r = \sum_{n \geq 0} (\mathrm{Tr}\ p\mu x^n)\ x^n$, quel que soit le rang de p , μ est de dimension N supérieure ou égale au rang de r . Sinon, en effet, comme d'après le théorème de Cayley-Hamilton, μx satisfait à l'équation caractéristique qui est de degré N , les coefficients $r_0 , r_1 , \ldots , r_n , \ldots$ de r satisferaient à une relation de récurrence à coefficients constants, de longueur N :

$$r_{n+N} = c_1\ r_{n+N-1} + \ldots + c_N\ r_n \qquad (c_1 , \ldots , c_N \in K) ,$$

et r serait de rang inférieur à N , d'où la contradiction.

8. Projections.

Soit A un anneau topologique. Un homomorphisme partiel (c'est-à-dire non partout défini) $p : A\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle \longrightarrow A\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$ est appelé projection si, et seulement si, pour tout $x \in X$, px vaut soit x , soit 1 . Une série $s \in A\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$ appartient au domaine de définition de p , si, et seulement si, pour tout $w \in X^*/(\mathcal{C})$, la famille de coefficients

$$\{(s , w') \mid w' \in p^{-1}\ pw\} ,$$

est sommable.

(4) Rappelons qu'une matrice carrée de rang 1 peut s'écrire comme le produit d'une matrice colonne par une matrice ligne. D'où le passage à une série donnée selon la formule (2).

Exemple. — $A = \underset{\sim}{Q}$, $s = \sum 2^n x^n \in \underset{\sim}{Q}[[x]]$. Soit p la projection définie par $px = 1$. Si $\underset{\sim}{Q}$ est muni de la topologie discrète triviale, ps n'est pas définie. Par contre, si $\underset{\sim}{Q}$ est muni de la topologie 2-adique, $ps = \sum_{n \geq 0} 2^n = -1$ est définie.

PROPOSITION 8.1. — A étant un corps ou un anneau de Krull valués complets, où valuations et topologie peuvent être triviales, la projection, si elle est définie, d'une série rationnelle de $A\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$ est une série rationnelle.

Preuve. — La méthode employée, qui consiste à utiliser la représentation réduite et une somme infinie de matrices, a déjà été mise en oeuvre en [7]. Soit

$$r \in A\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle \ ;$$

α désignant l'épimorphisme canonique de $A\langle\langle X\rangle\rangle$ sur $A\langle\langle X/(\mathcal{C})\rangle\rangle$, il existe $r' \in A\langle\langle X\rangle\rangle$ telle que $r = \alpha r'$ et une projection $p' : A\langle\langle X\rangle\rangle \longrightarrow A\langle\langle X\rangle\rangle$, telle que $p\alpha = \alpha p'$. Employons les notations des propositions 3.1 et 4.1 appliquées à r' : $p'r'$ est défini, si, et seulement si, pour tout couple d'indices $(i\ ,\ j)$, la famille de matrices $\{\chi g \mid g \in p'^{-1}\, 1\}$ est absolument sommable. La formule $\chi w = \chi \mathbf{1} \bar{\mu} w$ montre que la famille de matrices $\{\bar{\mu} g_{-} \mid_{-} g \in p'^{-1}\, 1\}$ est aussi absolument sommable, de somme σ . Soit $\bar{\mu}' : X^* \rightarrow A^{\bar{N}\times\bar{N}}$ la **représentation définie,** pour tout $x \in X$, par $\bar{\mu}'x = \bar{\mu}x\sigma$. Il vient :

$$p'r' = \sum \{(\mathrm{Tr}\ \bar{\gamma}\bar{\lambda}\sigma\bar{\mu}'f)\ f \mid f \in X'^*\} \ ,$$

où $X' = \{x \mid x \in X \ ;\ p'x = x\}$. $p'r'$ étant rationnelle, il en est de même de $pr = \alpha p'r'$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BENZAGHOU (B.). — Algèbres de Hadamard, Bull. Soc. math. France, t. 98, 1970, p. 209-252.

[2] BERGMAN (G. M.). — Groups acting on hereditary rings, Proc. London math. Soc., Series 3, t. 23, 1971, p. 70-82.

[3] CARLYLE (J. W.) and PAZ (A.). — Realizations by stochastic finite automata, J. Comput. System Sc., t. 5, 1971, p. 26-40.

[4] CARTIER (P.) et FOATA (D.). — Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements. — Berlin, Springer-Verlag, 1969 (Lecture Notes in Mathematics, 85).

[5] CHABERT (J.-L.). — Anneaux de Fatou, Ens. math., 2e série, t. 18, 1972, p. 141-144.

[6] FLIESS (M.). — Séries reconnaissables, rationnelles et algébriques, Bull. Sc. math., Série 2, t. 94, 1970, p. 231-239.

[7] FLIESS (M.). — Deux applications de la représentation matricielle d'une série rationnelle non commutative, J. of Algebra, t. 19, 1971, p. 344-353.

[8] FLIESS (M.). — Sur la définition des séries formelles algébriques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 273, 1971, Série A, p. 284-287.

[9] HELLER (A.). — On stochastic processes derived from Markov chains, Annals of math. Statistics, t. 36, 1965, p. 1286-1291.

[10] HELLER (A.). — Probabilistic automata and stochastic transformations, Math.

Systems Theory, t. 1, 1967, p. 197-208.

[11] KAPLANSKY (I.). - Fields and rings. - Chigago, The University of Chigago Press, 1969.

[12] PISOT (C.). - Quelques aspects de la théorie des entiers algébriques. - Montréal, Département de Mathématiques, 1963 (Séminaire de Mathématiques supérieures. Eté 1963, 5).

[13] PÓLYA (G.) und SZEGÖ (G.). - Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Vol. 2. - Berlin, Springer-Verlag, 1925 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 20).

[14] RICHARD (J.). - Représentations matricielles des séries rationnelles en variables non commutatives, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, 1970, Série A, p. 224-227.

[15] SCHUTZENBERGER (M. P.). - On the definition of a family of automata, Information and Control, t. 4, 1961, p. 245-270.

(Texte reçu le 6 mars 1972)

ADDITIF [ajouté à la correction des épreuves le 6 novembre 1972]. - Le problème de la propriété de Fatou faible, dans le cas d'une seule indéterminée, a été résolu par P.-J. CAHEN et J.-L. CHABERT : Eléments quasi-entiers et extensions de Fatou. - Kingston, Queen's University, 1972 (Queen's mathematical preprint, 1972-22).

Michel FLIESS
50 rue de Charonne
75011 PARIS