Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

MICHEL MENDÈS FRANCE

Fonctions g-additives et les suites à spectre vide

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 12 (1970-1971), exp. n° 10, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1970-1971__12__A6_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
12e année, 1970/71, n° 10, 6 p.

25 janvier 1971

FONCTIONS g-ADDITIVES ET LES SUITES À SPECTRE VIDE

par Michel MENDÈS FRANCE

Introduction. - Soient

$$n = \overline{\ldots e_p \, e_{p-1} \ldots e_1 \, e_0} \qquad \text{et} \qquad m = \overline{\ldots e'_p \, e'_{p-1} \ldots e'_1 \, e'_0}$$

deux entiers non négatifs écrits dans le système décimal. On dit que n domine m $(n \succ m)$, si, pour tout $p = 0 , 1 , \ldots ,$ on a $e_p \geqslant e'_p$. Ceci définit un ordre partiel sur les entiers (exemple : $4312 \succ 202$). Soit $q(n)$ le nombre d'entiers $m \geqslant 0$ qui sont dominés par n.

Soit, d'autre part, $M = (m_n)$ la suite croissante des entiers "quadratfrei". Alors la suite $(\operatorname{Log} q(m_n))$ est équirépartie (mod 1) .

L'objet de cet exposé est de montrer comment on atteint ce style de résultat. Cela requiert un certain nombre de préliminaires.

1re partie

Spectre d'une suite

1. Suites à caractère presque-périodique.

Soit $M = (m_n)$ une suite non décroissante d'entiers positifs. On pose

$$\chi(k) = \operatorname{card}\{n \in \underset{\sim}{N} \mid m_n = k\} .$$

On appellera χ la fonction caractéristique de M (si M est strictement croissante, on retrouve la notion habituelle de fonction caractéristique).

Par définition, la suite M est à caractère presque-périodique (c. p.-p.), si χ est une fonction presque-périodique au sens de Bésicovitch, bornée, non nulle. Cela signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique $\theta : \underset{\sim}{N} \to \underset{\sim}{C}$ tel que

$$\|\chi - \theta\| = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\chi(k) - \theta(k)| < \varepsilon .$$

Exemple 1. - Soit $\alpha > 0$. La suite $([\alpha n])$ est à c. p.-p. ($[x]$ désigne la partie entière de x).

Exemple 2. - Soit E une partie finie ou infinie de $\underset{\sim}{N}$, telle que $\sum_{n\in E} \frac{1}{n} < \infty$. Soit $M(E)$ la suite croissante des entiers qui ne sont divisibles par aucun élément de E. Alors $M(E)$ est à c. p.-p.

En effet, si E est fini, $M(E)$ est à caractère périodique. Si E est infini, $M(E)$ est une "limite" de suites à caractères périodiques. Elle est donc à caractère presque-périodique.

La suite des entiers "quadratfrei" tombe évidemment dans cette classe.

2. Spectre d'une suite.

Soit $\Lambda = (\lambda_n)$ une suite infinie de nombres réels. On appelle spectre de Λ $(sp(\Lambda))$, l'ensemble des $\alpha \in \underset{\sim}{R}$ tels que la suite $\Lambda + \alpha\underset{\sim}{N} = (\lambda_n + \alpha n)$ ne soit pas équirépartie (mod 1).

On montre sans peine les deux résultats suivants :

THÉORÈME 1. - L'ensemble $sp(\Lambda)$ est de mesure (de Lebesgue) nulle.

THÉORÈME 2. - "Presque toutes" les suites Λ ont un spectre vide ("presque tous" au sens de la mesure de Haar sur le tore $(\underset{\sim}{R}/\underset{\sim}{Z})^{\underset{\sim}{N}}$).

Le dernier théorème montre qu'il y a un certain intérêt à considérer des suites à spectre vide. Il est d'ailleurs facile d'en donner une caractérisation :

THÉORÈME 3. - Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Λ est à spectre vide ;

(ii) Pour toute suite d'entiers non décroissante $M = (m_n)$ à c. p.-p., la suite $\Lambda_M = (\lambda_{m_n})$ est équirépartie (mod 1).

Montrons en effet que (i) implique (ii). On considère la somme de Weyl relative à Λ_M :

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \exp 2i\pi\, \ell\lambda_{m_k} \qquad (\ell \in \underset{\sim}{Z}^*) \quad .$$

Soit χ la fonction caractéristique de M. On a

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m_n} \chi(k) \exp 2i\pi\, \ell\lambda_k + o(1)$$

$$= \frac{m_n}{n} \frac{1}{m_n} \sum_{k=1}^{m_n} \chi(k) \exp 2i\pi\, \ell\lambda_k + o(1) \quad .$$

Comme par hypothèse M est à c. p.-p., $\frac{m_n}{n}$ tend vers une limite finie A quand $n \to \infty$. Soit, par ailleurs, θ un polynôme trigonométrique. On a

$$\sigma_n \sim A \frac{1}{m_n} \sum_{k=1}^{m_n} \theta(k) \exp 2i\pi \ell\lambda_k + A \frac{1}{m_n} \sum_{k=1}^{m_n} (\chi(k) - \theta(k)) \exp 2i\pi \ell\lambda_k \quad .$$

La première moyenne au second membre tend vers 0, car $sp(\Lambda) = \emptyset$. Donc

$$\limsup_{n\to\infty} |\sigma_n| \leqslant A\|\chi - \theta\| \quad .$$

$\varepsilon > 0$ étant donné, un choix convenable de θ permet donc de rendre $\limsup|\sigma_n|$ inférieure à ε. Donc $\sigma_n \to 0$.

C. Q. F. D.

La réciproque se démontre de façon analogue.

Exercice d'application. - Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, la suite $(\sqrt{2}\,[\alpha n]^2)$ est équirépartie (mod 1).

2e partie

Fonctions g-additives

1. Définition et caractérisation.

La notion de fonction g-additive est due à GEL'FOND. Soit $g \geqslant 2$ un entier supposé fixé une fois pour toute. Une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est dite *g-additive*, si, pour tous entiers a, k, b tels que $a \geqslant 0$, $k \geqslant 0$, $0 \leqslant b \leqslant g^a - 1$, on a

$$f(kg^a + b) = f(kg^a) + f(b) \quad .$$

(Ceci implique $f(0) = 0$.) Par exemple, $f(n) = n$ est g-additive. De même, la fonction s qui, à l'entier n fait correspondre la somme des chiffres de n, écrit en base g.

Dans la suite, on adopte la notation suivante :

$$n = \sum_{p=0}^{\infty} e_p(n)\, g^p \quad ,$$

où les $e_p(n)$ sont des entiers $0 \leqslant e_p(n) \leqslant g - 1$, tous nuls pour $p \geqslant 1 + [\frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log} g}]$. On considèrera e_p comme une application de $\mathbb{N}$ sur $G = \{0, 1, \dots, g-1\}$.

THÉORÈME 4. - *Une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est g-additive, si, et seulement si, il existe une suite de fonctions réelles $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ définies sur G, nulles* en 0 , telles que

$$f = \sum_{p=0}^{\infty} \varphi_p \circ e_p \quad .$$

La démonstration est élémentaire, et repose sur l'identité

$$f\Big(\sum_{p=0}^{\infty} e_p(n) g^p\Big) = \sum_{p=0}^{\infty} f(e_p(n) g^p)$$

vérifiée par les fonctions g-additives. (En fait, φ_p est définie par $\varphi_p(a) = f(ag^p)$.)

2. Propriétés de moyennes.

On a le résultat suivant :

THÉORÈME 5. - *Soit* f *une fonction* g-*additive réelle*,

$$f = \sum_{0}^{\infty} \varphi_p \circ e_p \quad .$$

Alors

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \Big| \sum_{k=0}^{n-1} \exp 2i\pi f(k) \Big| = \prod_{p=0}^{\infty} \frac{1}{g} \Big| \sum_{a=0}^{g-1} \exp 2i\pi \varphi_p(a) \Big| \quad .$$

Donnons ici une "preuve heuristique" du théorème ! Considérons le groupe compact $G^{\mathbb{N}} \simeq (\mathbb{Z}/g\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ muni de la mesure de Haar normalisée μ . Soit $\varepsilon = (\varepsilon(n)) \in (G^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ une suite équirépartie dans $G^{\mathbb{N}}$. Alors le théorème de Weyl montre que, pour des applications $\Phi : G^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}$ convenables, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Phi(\varepsilon(k)) = \int_{G^{\mathbb{N}}} \Phi(\eta)\, d\mu(\eta) \quad . \tag{1}$$

$\varepsilon(k)$ étant un élément de $G^{\mathbb{N}}$, nous préférons écrire $\varepsilon(k) = (\varepsilon_0(k) , \varepsilon_1(k) , \dots)$, et la formule (1) devient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Phi(\varepsilon_0(k) , \varepsilon_1(k) , \dots) = \int_{G^{\mathbb{N}}} \Phi(\eta_0 , \eta_1 , \dots) \prod_{p=0}^{\infty} d\nu(\eta_p) \quad ,$$

où ν est la mesure de Haar normalisée sur G . En particulier, si Φ se factorise,

$$\Phi(x_0 , x_1 , \dots) = \prod_{p=0}^{\infty} \Phi_p(x_p) \quad ,$$

on obtient

(2) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \prod_{p=0}^{\infty} \Phi_p(\varepsilon_p(k)) = \prod_{p=0}^{\infty} \frac{1}{g} \sum_{a=0}^{g-1} \Phi_p(a) \quad ,$$

car $\int_G = \frac{1}{g} \sum_0^{g-1}$.

Enfin, remarquons que la suite $e = (e(n)) \in (G^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, où

$$e(n) = (e_0(n) \ , \ e_1(n) \ , \ \dots \ , \ e_p(n) \ , \ \dots) \quad ,$$

est équirépartie dans $G^{\mathbb{N}}$. Choisissant $\Phi_p(x) = \exp 2i\pi \varphi_p(x)$, on obtient

(3) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \exp 2i\pi f(k) = \prod_{p=0}^{\infty} \frac{1}{g} \sum_{a=0}^{g-1} \exp 2i\pi \varphi_p(a) \quad .$$

Cette formule est plus précise que celle qui est énoncée dans le théorème 5, mais en contrepartie, elle n'est valable que si l'on fait des restrictions sur les φ_p de façon à pouvoir appliquer le théorème de Weyl. Une technique entièrement différente permet toutefois d'établir le théorème rigoureusement (voir [7]).

COROLLAIRE. - *Soit* $\varphi : G \to \mathbb{R}$ *telle que* $\varphi(0) = 0$, *et ayant au moins une valeur irrationnelle. Soit* f_φ *la suite dont le* n*-ième terme est*

$$f_\varphi(n) = \sum_{p=0}^{\infty} \varphi(e_p(n)) \quad .$$

Alors le spectre de f_φ *est vide. En particulier,* f_φ *est équirépartie* (mod 1) .

La preuve s'appuie sur le fait que la moyenne de Weyl

$$\limsup \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n} \exp 2i\pi \ell(f_\varphi(k) + k\alpha) \right|$$

est égale à

$$\prod_{p=0}^{\infty} \frac{1}{g} \left| \sum_{a=0}^{g-1} \exp 2i\pi \ell(\varphi(a) + a\alpha g^p) \right| \quad ,$$

quantité qui est nulle pour tout α .

Exercices d'application.

(i) Soit $d \in \mathbb{N}$. Soit $s^d(n)$ la somme des puissances d^e des chiffres de l'entier n (si $d = 0$, on pose $0^0 = 0$). Alors la suite $(xs^d(n))$ est équirépartie (mod 1) si, et seulement si, $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

(ii) Soit $q(n)$ le nombre d'entiers m qui sont dominés par n (voir l'introduction). On montre sans peine que

$$q(n) = \prod_{p=0}^{\infty} (1 + e_p(n)) \quad .$$

En déduire que, si $M = (m_n)$ est une suite à c. p.-p., alors la suite $(\mathrm{Log}\ q(m_n))$ est équirépartie (mod 1) .

BIBLIOGRAPHIE

Sur les fonctions presque-périodiques :

[1] BERTRANDIAS (Jean-Paul). - Espaces de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre p , Bull. Soc. math. France, Mémoire 5, 1966, 106 p. (Thèse Sc. math. Paris, 1964).

[2] KAHANE (J.-P.). - Sur les fonctions presque-périodiques généralisées dont le spectre est vide, Studia Math., Warszawa, t. 21, 1962, p. 231-236.

Sur les fonctions g-additives :

[3] BESINEAU (J.). - Sur un problème de Gel'fond relatif à la fonction somme des chiffres, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272, 1971, Série A, p. 453-456.

[4] GEL'FOND (A. O.). - Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données, Acta Arithm., Warszawa, t. 13, 1968, p. 259-265.

[5] MENDÈS FRANCE (Michel). - Nombres normaux. Applications aux fonctions pseudo-aléatoires, J. Anal. math., Jérusalem, t. 20, 1967, p. 1-56 (Thèse Sc. math. Paris, 1966).
[Voir, en particulier, le chapitre 3.]

[6] MENDÈS FRANCE (Michel). - La réunion des ensembles normaux, J. of Number Theory, t. 2, 1970, p. 345-351.
[Le théorème 5 y est partiellement démontré.]

[7] MENDÈS FRANCE (Michel). - Les suites à spectre vide et la répartition (mod 1) , J. of Number Theory (à paraître).

(Texte reçu le 25 janvier 1971)

Michel MENDÈS FRANCE
Faculté des Sciences de Bordeaux
Mathématiques
351 cours de la Libération
33 - TALENCE